ISAAC NEWTON

ISAAC NEWTON

PRINCIPIILE MATEMATICE ALE FILOZOFIEI NATURALE

La mulți ani, Puiule!

Aurel

1 Mai 1957



Ultimul portret al lui ISAAC NEWTON executat de pictorul Vanderbank

Isaac Newton

PRINCIPIILE MATEMATICE ALE FILOZOFIEI NATURALE

Traducere și adnotări
de PROF. VICTOR MARIAN

Text revizuit
de PROF VICTOR VÂLCOVICI

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
1956



CUPRINSUL

CARTEA A II-a. DESPRE MIŞCAREA CORPURILOR

SECŢIUNEA

CARTEA A III-a. DESPRE SISTEMUL LUMII

Prefața traducătorului

Volumul de față este prima traducere în limba romînă a celebrei opere a lui Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica* care reprezintă o piatră fundamentală în istoria gîndirii omenești.

Textul original după care s-a făcut traducerea este acela al ediției a III-a a *Principiilor* din 1726. Motivul care a determinat această alegere este faptul că ediția menționată este cea mai completă și apărută cea din urmă în timpul cît trăia încă Newton, avînd și aprobarea lui.

Traducerea a fost pregătită în vederea comemorării a 300 de ani de la nașterea lui Newton și era plănuită să apară în colecția *Gazetei Matematice*, unde se tipăriseră în traducere și *Elementele* lui *Euclid*. Din motive independente de voința traducătorului apariția nu a putut fi realizată de cît în prezent, datorită Academiei Republicii Populare Romîne.

Traducerea s-a ținut cît mai aproape de text chiar atunci cînd acesta implica unele dificultăți de exprimare. Chiar figurile au fost păstrate sub forma lor originală, deși uneori ele ar fi putut fi simplificate; din aceleași motive ele nu au fost numerotate. Această atitudine inspirată de respectul față de o operă atît de valoroasă se justifică prin aceea că lucrarea nu este un manual didactic, care să servească începătorului pentru a se iniția în disciplina mecanicii. Cartea se adresează acelora care doresc să aprofundeze principiile mecanicii newtoniene.

Textul definitiv al traducerii a fost stabilit după o prelucrare amănunțită de către traducător împreună cu prof. V. Vâlcovici. În această prelucrare s-a comparat textul romîn din nou cu originalul, și afară de aceasta cu unele traduceri în alte limbi, precum: traducerea franceză a marchizei du Châstelet din 1759, traducerea germană a lui Wolfers din 1872 și cea engleză a lui Motte din 1729 revizuită de Cajori în 1934.

Portretul de la începutul cărții este datorit pictorului Vanderbank și datează din jurul anului 1726; este de altfel ultimul portret al lui Newton

reprezentîndu-l așezat în fotoliul prezidențial al Societății Regale din Londra.

Am reprodus atît foaia de titlu a ediției I cît și aceea a ediției a III-a, socotindu-le ca prețioase documente istorice.

Oda lui Halley închinată lui Newton a fost tradusă în hexametri de prof. Teodor A. Naum. Cu acest prilej îi aducem viile noastre mulțumiri.

La sfîrșitul traducerii am pus o scurtă povestire a vieții și activității lui Newton însoțită de o bibliografie cronologică a operelor sale. Urmează apoi adnotările, care au drept scop să ajute pe cititor la înțelegerea chestiunilor fundamentale tratate mai ales în ceea ce privește aspectul lor filozofic. În aceste adnotări se fac considerații istorico-critice asupra problemelor delicate din operă (spațiu, timp, acțiune la distanță etc.) precum și asupra tendinței categoric idealiste pe care a încercat să o imprime Cotes în Ediția a II-a.

Cluj, 30 iunie 1955 V. MARIAN

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore *J S.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

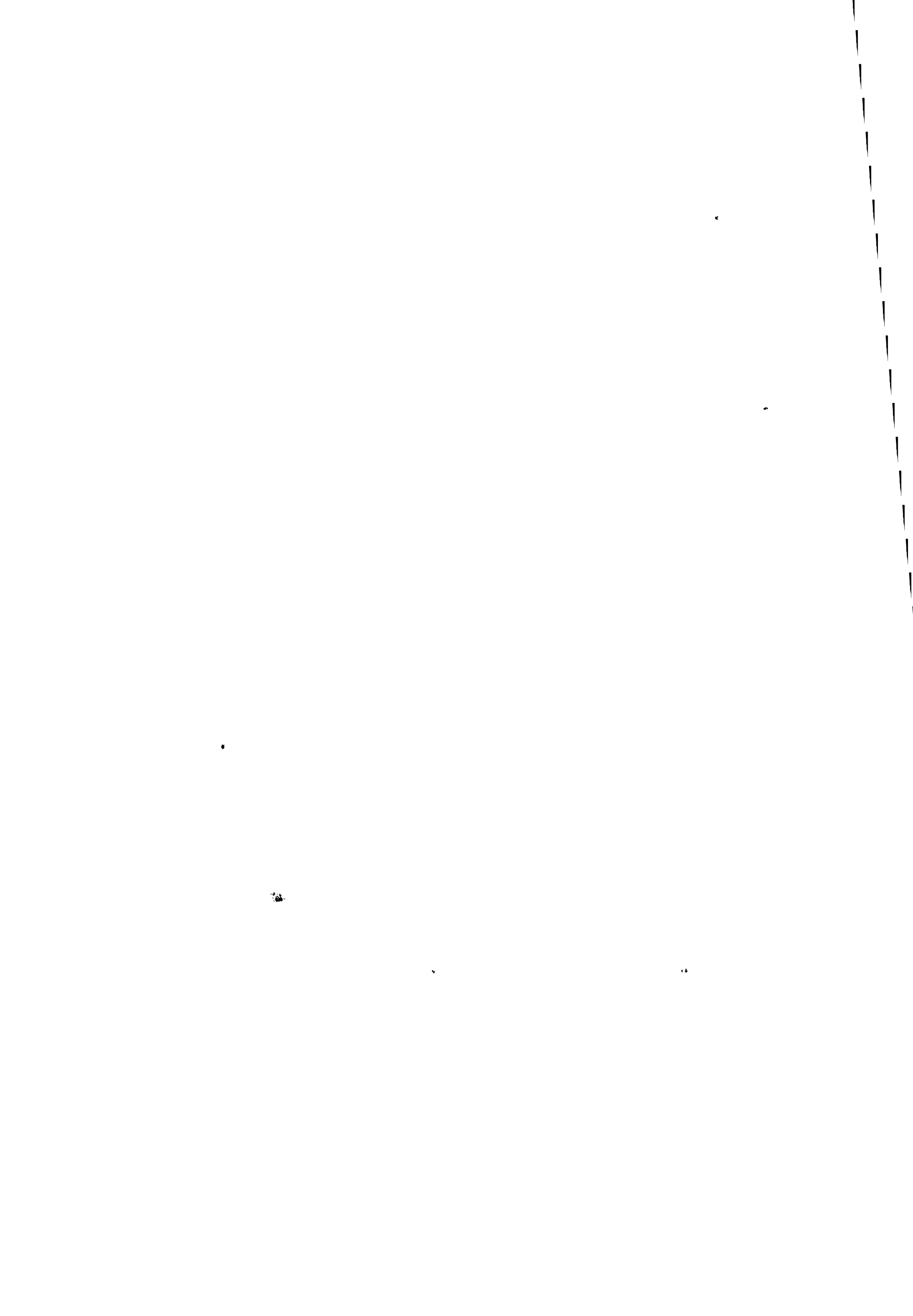
[illegible]

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

[illegible]

Foaia de titlu a ediţiei I a *Principiilor*



ÎNTRU PREAMĂRIREA ACESTEI OPERE
MATEMATICO-FIZICE
— PODOABA ALEASĂ A VEACULUI ŞI GINŢII NOASTRE —
A
PREASTRĂLUCITULUI DOMN

ISAAC NEWTON

Iată şi-a cerului lege şi cumpăna lumii divine,
Măsurătoarea lui Jupiter iat-o şi legile care
Nu le-a călcat nici Părintele lumii, Atotfăcătorul,
Cînd i-a urzit începutul şi iat' ale lumii temeiuri
Puse de dînsul! Acum şi-a deschis nepătrunsele-adîncuri
Cerul învins! De-acuma vei şti ce putere roteşte
Lumile toate 'mprejur! Din scaunul său porunceşte
Soarele toate să tindă spre el şi spre el să se 'ncline.
Nu lasă el să se mişte-ale stelelor care prin hăul
Fără de margini pe drumul cel drept, ci pe toate cu sine,
El rămînînd la mijloc, mi le duce 'n rotiri hotărîte.
Ştim ş'abătuta cărare-a cometelor îngrozitoare,
Nici ne mai prinde mirarea acuma de stele cu coadă.
Ştim în sfîrşit din ce pricină lun'argintie nu face
Paşii tot una de mari şi de ce, pîn' acum nesupusă,
Frînele ei nu le dă astronomului; ştim noi acuma
Nodurile de ce merg înapoi şi de ce înainte
Merg afeliile; ştim şi cu cîtă putere pribeaga
Cynthie 'mpinge noianu 'napoi, cînd truditele valuri
Algele varsă pe mal şi cînd marea 'n adînc dezgoleşte
Praguri temute de corăbieri, bătînd în răstimpuri
Pînă departe la ţărm. Tot ce-a chinuit altădată
Mintea 'nţelepţilor vechi şi tot ce frămîntă zadarnic
Şcolile noastre cu lărmuitoare dezbateri, în faţă
Astăzi privim, căci ştiinţa lui Newton împrăştie norii!
Astăzi pe cei îndoiţi rătăcirea cu negru 'ntuneric
Nu-i mai apasă, căci lor agerimea sublimului geniu
Chiar în locaşele zeilor datu-le-a voie să intre

Şi să se urce 'n văzduh, pe 'nălţimile cerului nostru.
Sus, muritori! Pămînteştile griji părăsiţi-le-acuma!
Şi să cunoaşteţi de-aice puterile minţii divine,
Care-i aşa de departe de traiul sărmanelor turme!
Cel ce, cu table de legi, porunci să se 'nfrîne omorul
Şi preacurvia şi furtul şi crima 'nşelării perfide,
Cel care-i puse pe oameni să 'ncingă cu ziduri oraşe,
Sau ferici mai întîi pe popoare cu-a' Cererei daruri,
Cel ce din struguri a stors alinarea durerilor noastre,
Ori ne-a 'nvăţat să'mbinăm, c'o pană de trestie 'n mînă,
Sonuri pictate şi vorbele noastre sub ochi să le punem,
Au ridicat mai puţin decît Newton a omului soartă,
Nenorocitei vieţi aducînd mîngîieri prea puţine.
Noi ins' acuma sîntem primiţi la a masă cu zeii,
Cerul înalt îl ajungem cu mîna ş' acuma se vede
Tainiţa oarb' a pămîntului, soarta cea nestrămutată,
Secolii lumii trecute ce-au stat pîn' acu 'n întuneric.
Deci preamăriţi-l în versuri, cu mine, pe dascălul lumii,
Voi care-acum, bucuroşi, vă hrăniţi cu nectarul din ceruri!
Voi preamăriţi-l pe Newton, ce scrinul ascunselor taine
L-a descuiat în sfîrşit, pe Newton cel drag şi la Muze,
Căruia-i stă 'n ajutor, cu inima lui preacurată,
Foebus Apollo şi mintea-i însuflă cu toată puterea.
Nici se cuvine pe zei să-i atingă vreun om mai de-aproape.

EDM. HALLEY

Traducere de TEODOR A. NAUM

Prefața autorului către cititor

Deoarece cei vechi (după cum spune *Pappus*) au dat o mare importanță *mecanicii* în cercetarea naturii, iar modernii înlăturînd formele substanțiale și calitățile oculte, s-au străduit să reducă fenomenele naturale la legi matematice, mi s-a părut potrivit să cultiv în acest tratat matematica, întrucît ea privește filozofia. Într-adevăr, cei vechi considerau mecanica de două feluri: cea *rațională* care procedează prin demonstrații precise și cea *practică*. Celei practice aparțin toate artele manuale, de la care s-a împrumutat chiar numele de mecanică. Cum însă meseriașii obișnuiesc să lucreze cu puțină precizie, se întîmplă că *mecanica* se deosebește de geometrie, astfel că tot ce este precis să aparțină geometriei iar ceea ce este mai puțin precis mecanicii. Dar erorile nu aparțin artelor, ci artiștilor. Cine lucrează cu mai puțină precizie este un mecanic mai imperfect, și dacă cineva poate lucra cel mai precis el va fi mecanicul cel mai perfect dintre toți. Căci descrierile liniilor drepte și ale cercurilor pe care se bazează geometria aparțin mecanicii. Geometria nu ne învață cum se descriu aceste linii, ci le postulează. Căci ea pretinde ca discipolul să fi învățat a le descrie în mod precis înainte de a începe studiul geometriei, apoi arată cum se rezolvă problemele prin aceste operații; descrierile dreptelor și cercurilor sînt probleme, însă nu de geometrie. Soluția lor se cere de mecanică, în geometrie se învață folosirea soluțiilor. Și geometria se mîndrește că folosind așa de puține principii luate de aiurea produce atît de mult. Așadar geometria se întemeiază pe practica mecanică și nu este nimic altceva decît acea parte a mecanicii universale care propune și demonstrează arta de a măsura precis. Dar fiindcă artele manuale se ocupă în deosebi de corpurile în mișcare, se întîmplă că geometria se referă de obicei la mărime iar mecanica la mișcare. În acest sens mecanica rațională va fi știința propusă precis și demonstrată, a mișcărilor care rezultă din forțe oarecare și a forțelor necesare unor mișcări oarecare. Această parte a mecanicii a fost cultivată în cele cinci puteri privitoare la artele manuale, de cei vechi care nu considerau gravitatea (fiindcă nu este o putere manuală) decît în mișcarea greutăților cu ajutorul acelor puteri. Noi însă neocupîndu-ne cu artele ci cu filozofia, și nescriind despre puterile manuale, ci despre cele naturale, tratăm în deosebi acelea care privesc gravitatea, ușurința, forța elastică, rezistența fluidelor și forțele asemănătoare fie atractive fie repulsive. Și de aceea expunem acestea ca principiile matematice ale filozofiei. Căci toată dificultatea filozofiei pare a consta în aceea ca din fenomenele de mișcare să cercetăm forțele naturii, apoi din aceste forțe să deducem celelalte fenomene. Și la aceasta servesc propozițiile generale pe care le vom trata în Cartea întîia și a doua. Iar în Cartea a treia ne-am propus un exemplu al acestui procedeu prin explicarea sistemului lumii. Căci acolo, din fenomenele cerești, cu ajutorul propozițiilor matematice demonstrate în Cărțile precedente se deduc forțele gravitații după care corpurile tind spre Soare și spre diversele planete. Apoi din aceste forțe, iarăși prin propoziții matematice se deduc

legile mişcărilor planetelor, cometelor, ale Lunii şi mării. De s-ar putea ca toate celelalte fenomene ale naturii să se deducă din principiile mecanice prin acelaşi fel de raţionament. Căci am multe motive să cred, că toate acelea pot depinde de forţe oarecare prin care particulele corpurilor, din cauze necunoscute încă, sau sînt împinse unele spre altele şi se adună în figuri regulate. sau se resping şi se îndepărtează reciproc; despre care forţe necunoscute, filozofii în zadar au întrebat pînă acum natura. Sper însă că principiile stabilite aici vor aduce oarecare lumină fie acestui mod de a filozofa, fie altuia mai adevărat.

La editarea acestora a depus multă stăruinţă Edmund Halley, un bărbat pătrunzător şi foarte erudit în toate ramurile literilor, care nu numai că a făcut corecturile tipografice şi a îngrijit executarea figurilor dar a fost şi cel care m-a îndemnat să purced la publicarea acestora. Căci obţinînd de la mine demonstraţia figurii orbitelor cereşti, nu a încetat de a mă ruga să o comunic *Societăţii Regale*, care apoi prin îndemnurile şi auspiciile sale binevoitoare a făcut să mă gîndesc la publicarea lor. Dar după ce am ajuns la inegalităţile mişcărilor lunare şi am început să mă ocup şi cu altele care privesc legile şi măsurile gravităţii şi ale altor forţe, şi figurile ce trebuie descrise de corpuri după oarecare legi date de atracţie, mişcările mai multor corpuri între ele, mişcările corpurilor în medii rezistente, forţele, densităţile şi mişcările mediilor, orbitelor cometelor şi altele asemenea, m-am gîndit să amîn scoaterea ediţiei pentru alte timpuri, pentru a le aprofunda pe celelalte şi a le publica împreună. Cele ce privesc mişcările Lunii (fiind neperfecte) le-am adunat laolaltă în corolarele propoziţiei LXVI, pentru ca să nu expun chestiunile diverse cu o metodă mai lungă decît cere importanţa lor, şi să fiu silit a le demonstra separat întrerupînd seria celorlalte propoziţii. Am preferat să pun în locuri mai puţin potrivite unele pe care le-am aflat mai tîrziu decît să schimb numărul propoziţiilor şi citatele. Rog cu insistenţă ca toate să fie citite cu bună credinţă şi greşelile într-o materie atît de grea să nu fie prea mult imputate, cît mai ales să fie cercetate prin noi studii ale cititorilor şi întregite cu bunăvoinţă.

Cambridge, Trinity College, 8 mai 1686

IS NEWTON

Prefața autorului la ediția a doua

În această a doua ediție a *Principiilor* se corectează multe în diverse părți și se adaugă unele. In secțiunea II a primei Cărți se redă mai ușor și mai pe larg aflarea forțelor prin care corpurile pot fi aduse a se roti în orbite date. În secția VII a Cărții a doua se studiază mai precis teoria rezistenței fluidelor și se confirmă prin noi experiențe. În Cartea a treia se deduc mai complet teoria Lunii și precesia echinocțiilor din principiile lor și se confirmă teoria cometelor prin mai multe exemple de orbite calculate mai precis.

Londra, 28 martie 1713

IS NEWTON

Prefaţa editorului la ediţia a doua

Îţi dăm, cititorule binevoitor, o ediţie nouă şi îndelung aşteptată a filozofiei lui Newton, acum mult îmbunătăţită şi adăugită. Cuprinsul mai important al acestei foarte renumite opere se poate afla din tabla de materii anexată: ce s-a adăugat sau s-a schimbat îţi va indica prefaţa autorului. Mai rămîne să se adauge cîte ceva asupra metodei acestei filozofii.

Cei care s-au apucat să trateze fizica, se pot împărţi aproximativ în trei clase. Anume, erau unii care atribuiau diverselor specii ale lucrurilor, calităţi specifice şi oculte; de care apoi presupuneau că depind operaţiile diverselor corpuri ca de o cauză oarecare necunoscută. Pe aceasta se întemeiază esenţa doctrinei scolastice, care provine de la Aristotel şi peripateticieni; aceştia afirmă că diversele efecte se nasc din diversele naturi ale corpurilor; dar nu spun de unde provin acele naturi; aşadar ei nu ne învaţă nimic. Şi fiindcă sînt preocupaţi de numele lucrurilor nu de lucrurile înşişi, se poate spune că ei au inventat un limbaj filozofic, însă nu se poate spune că au cultivat filozofia.

Alţii au sperat să obţină lauda unei rîvne mai bune înlăturînd amestecul inutil al vorbelor. Astfel au presupus că întreaga materie este omogenă şi că toată varietatea formelor, care se observă în corpuri, se naşte din unele relaţii foarte simple şi uşor de înţeles ale particulelor componente. Şi într-adevăr progresul se stabileşte de la cele mai simple la cele mai complicate dacă nu se atribuie acelor relaţii primare ale particulelor alte înţelesuri decît acelea pe care le dă natura. Dar fiindcă ei îşi îngăduie să admită după voie figuri şi mărimi necunosute ale părţilor şi poziţii şi mişcări nesigure; precum şi să imagineze oarecare fluide oculte care pătrund foarte uşor prin porii corpurilor, fiind prevăzute cu o prestabilită subtilitate atotputernică şi fiind agitate de mişcări oculte, ei cad în visări neglijînd adevărata constituţie a corpurilor: ceea ce desigur în zadar se urmăreşte a se afla prin presupuneri înşelătoare cînd abia se poate cerceta prin observaţiile cele mai sigure. Cei care iau temeiul speculaţiilor lor din ipoteze, deşi în urmă procedează foarte precis conform legilor mecanice, trebuie să spunem că alcătuiesc o fabulă foarte elegantă şi fermecătoare, dar totuşi o fabulă.

Mai rămîne aşadar a treia clasă, anume aceea care se ocupă cu filozofia experimentală. Aceştia într-adevăr pretind că pot deduce cauzele tuturor lucrurilor din principiile cele mai simple posibile. Însă ei nu consideră nimic ca principiu ce nu ar fi confirmat de fenomene. Nu imaginează ipoteze, nici nu le acceptă în fizică decît ca probleme asupra adevărului cărora se discută. Prin urmare se folosesc de o metodă dublă, analitică şi sintetică. Forţele naturii şi legile mai simple ale forţelor le deduc prin analiză, din unele fenomene alese, de unde apoi scot prin sinteză constituţia celorlalte. Aceasta este metoda cu mult cea mai bună de a filozofa, pe care vestitul nostru autor a apreciat-o pe drept cuvînt preferabilă celorlalte. Pe aceasta singură a judecat-o vrednică de a fi folosită, dîndu-şi toată silinţa de a o perfecţiona şi

înfrumuseța. Așa a dat un exemplu foarte strălucit al acesteia, deducînd în mod cu totul fericit explicarea sistemului lumii din teoria gravitații. Că forța gravitații se află în toate corpurile au presupus-o sau și-au imaginat-o alții: el cel dintîi și singurul a putut s-o demonstreze din aparențe și să o pună ca bază solidă speculațiilor distinse.

Știu în adevăr că unii bărbați chiar de mare renume prinși prea mult de anumite prejudecăți, cu silă au putut să-și dea asentimentul acestui nou principiu și au preferat chiar cele nesigure celor sigure. Nu este intenția mea să micșorez reputația acestora: vreau numai să-ți expun pe scurt, cititorule binevoitor, acele considerații din care tu însuți să-ți faci o judecată dreaptă.

În consecință pentru a începe expunerea de la cele mai simple și apropiate, să cercetăm puțin care este natura gravitații în fenomenele pămîntești pentru ca apoi să purcedem mai sigur cînd vom ajunge la corpurile cerești foarte îndepărtate de pozițiile noastre. Toți filozofii admit că toate corpurile din jurul Pămîntului gravitează spre Pămînt. Că nu există corpuri în adevăr ușoare a confirmat-o pînă acuma o experiență multiplă. Ceea ce se zice relativ ușor, nu este ușor în realitate ci numai în aparență; și aceasta provine din gravitatea precumpănitoare a corpurilor vecine.

Mai departe, după cum toate corpurile gravitează spre Pămînt, tot așa invers Pămîntul gravitează la fel spre corpuri; că acțiunea gravitații este reciprocă și egală de ambele părți se probează astfel. Să se împartă masa întregului Pămînt în două părți oarecare, fie egale fie neegale: atunci dacă greutățile părților nu sînt reciproc egale, greutatea mai mică ar ceda celei mai mari și părțile unite ar continua să se miște în linie dreaptă la infinit spre regiunea către care tinde greutatea mai mare: cu totul contrar experienței. Prin urmare trebuie să spunem că greutățile părților se află în echilibru: adică acțiunea gravitații este reciprocă și egală de ambele părți.

Greutățile corpurilor la distanțe egale de centrul Pămîntului sînt ca și cantitățile de materie în corpuri. Aceasta se deduce din accelerația egală a tuturor corpurilor care cad din repaus din cauza forțelor greutăților: căci forțele prin care corpuri neegale sînt accelerate în mod egal trebuie să fie proporționale cu cantitățile de materie ce trebuie mișcată. Că acum toate corpurile căzătoare sînt accelerate la fel apare din faptul că în vidul lui B o y l e căzînd în timpuri egale, ele descriu spații egale, anume înlăturînd rezistența aerului: dar aceasta se demonstrează mai precis prin experiențele pendulelor.

Forțele atractive ale corpurilor la distanțe egale sînt ca și cantitățile de materie în corpuri. Căci deoarece corpurile gravitează spre Pămînt și invers Pămîntul spre corpuri cu momente egale, greutatea Pămîntului față de un corp oarecare sau forța cu care corpul atrage Pămîntul va fi egală cu greutatea acelui corp față de Pămînt. Dar această greutate era precum cantitatea de materie în corp: prin urmare și forța cu care acel corp atrage Pămîntul, adică forța absolută a corpului va fi precum aceeași cantitate de materie.

Așadar forța atractivă a corpurilor întregi se naște și se compune din forțele atractive ale părților: pentrucă dacă se mărește sau se micșorează masa materiei, s-a arătat că în mod proporțional va crește sau se va micșora puterea aceleia. În consecință trebuie să se admită că acțiunea Pămîntului constă din suma acțiunilor părților; și de aceea toate corpurile pămîntești trebuie să se atragă reciproc cu forțe absolute care sînt proporționale cu materia atrăgătoare. Aceasta este natura gravitații pe Pămînt: să vedem acum care este ea în ceruri.

Că orice corp persevereaza în starea sa de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă pînă ce nu este silit de forțele imprimate să-și schimbe acea stare, este o lege a naturii acceptată de toți filozofii. De aici în adevăr urmează că corpurile care se mișcă pe curbe și de aceea se îndepărtează încontinuu de liniile drepte tangente orbitelor lor, sînt reținute pe drumul curbiliniu de o forță oarecare ce lucrează într-una. Prin urmare asupra planetelor ce se mișcă pe orbite curbe în mod necesar acționează o forță oarecare, prin ale cărei acțiuni repetate sînt abătute de la tangente în mod permanent.

Şi este raţional să admitem ceea ce se arată prin raţionamente matematice şi se demonstrează în mod foarte sigur; anume că toate corpurile care se mişcă pe o linie curbă oarecare descrisă într-un plan, şi care ducînd o rază la un punct fie în repaus fie în mişcare de orice fel descriu în jurul acelui punct arii proporţionale cu timpurile, sînt acţionate de forţe care tind spre acelaşi punct. Aşadar fiindcă astronomii ne învaţă că planetele primare descriu arii proporţionale cu timpurile în jurul Soarelui, iar cele secundare în jurul primarelor lor, rezultă că forţa prin care ele sînt abătute încontinuu de la tangentele rectilinii şi silite să se mişte pe orbite curbilinii este îndreptată spre corpurile care sînt situate în centrele orbitelor. Prin urmare această forţă nu în mod nepotrivit se poate numi centripetă faţă de corpul în mişcare şi atractivă faţă de corpul central; din orice cauză ne-am închipui că provine.

Mai mult şi cele următoare trebuie admise, demonstrîndu-se în mod matematic. Dacă mai multe corpuri se mişcă cu o mişcare uniformă pe cercuri concentrice şi pătratele timpurilor periodice sînt ca şi cuburile distanţelor de la centrul comun; forţele centripete ale corpurilor mobile vor fi invers proporţionale cu pătratele distanţelor. Sau dacă corpurile se mişcă pe orbite care sînt foarte apropiate de cercuri şi apsidele orbitelor sînt în repaus; forţele centripete ale corpurilor mobile vor fi invers proporţionale cu pătratele distanţelor. Astronomii consimt că unul din aceste două cazuri se obţine la toate planetele. Prin urmare forţele centripete ale tuturor planetelor sînt invers proporţionale cu pătratele distanţelor de la centrele orbitelor. Dacă cineva obiectează că apsidele planetelor şi în deosebi aceea a Lunii nu sînt chiar în repaus; ci se deplasează încet şi progresiv: se poate răspunde că deşi admitem că această mişcare foarte înceată provine din faptul că raportul forţei centripete se deosebeşte întrucîtva de legea pătratului distanţei, acea deviaţie se poate determina prin calcul matematic şi mai ales este neglijabilă. Căci însuşi raportul forţei centripete lunare care trebuie să fie deranjată mai mult decît toate celelalte va întrece în realitate cu foarte puţin pe cel al pătratelor; şi va fi aproximativ de şasezeci de ori mai aproape de acesta decît de cel al cuburilor. Dar răspunsul va fi mai just dacă zicem că această progresie a apsidelor nu provine din deviaţia de la raportul pătratelor, ci din o cauză cu totul diferită, după cum se demonstrează în chip admirabil în această filozofie. Rămîne stabilit aşadar că forţele centripete, prin care planetele primare tind spre Soare şi cele secundare spre primarele lor, sînt precis invers proporţionale cu pătratele distanţelor.

Din cele spuse pînă aici rezultă că planetele sînt reţinute pe orbitele lor de o forţă oarecare acţionînd încontinuu asupra lor: rezultă că acea forţă este îndreptată totdeauna spre centrele orbitelor: rezultă că intensitatea acesteia creşte cu apropierea de centru, descreşte prin îndepărtarea de acesta; şi anume creşte în aceeaşi proporţie în care scade pătratul distanţei, şi scade în aceeaşi proporţie în care creşte pătratul distanţei.

Să vedem acum făcînd o comparaţie între forţele centripete ale planetelor şi forţa gravităţii dacă nu cumva ele sînt de aceeaşi natură. Ele vor fi de aceeaşi natură dacă şi de aici şi de acolo se deduc aceleaşi legi şi aceleaşi relaţii. Să cercetăm deci mai întîi forţa centripetă a Lunii care este cea mai apropiată de noi.

Spaţiile rectilinii care sînt descrise într-un timp dat de corpurile pornite din starea de repaus chiar la începutul mişcării, dacă sînt acţionate de forţe oarecare, sînt proporţionale cu înseşi forţele: aceasta rezultă din raţionamente matematice. Prin urmare forţa centripetă a Lunii care se mişcă pe orbita sa este către forţa gravităţii la suprafaţa Pămîntului, după cum spaţiul pe care-l descrie Luna într-un timp foarte scurt căzînd cu o forţă centripetă pe Pămînt, dacă ne-am închipui-o lipsită de orice mişcare circulară, este către spaţiul pe care în acelaşi timp foarte scurt îl descrie un corp greu în apropierea Pămîntului căzînd prin forţa gravităţii sale. Primul dintre aceste spaţii este egal cu sinus versus-ul arcului descris de Lună în acelaşi timp, adică acela care măsoară translaţia Lunii de la tangentă cauzată de forţa centripetă; şi de aceea se poate calcula atît din datele perioadei de revoluţie a Lunii, cît şi din distanţa ei de la centrul Pămîntului. Spaţiul din urmă se află prin experienţa pendulelor după cum a

arătat Huygens). Aşadar făcînd calculul, primul spaţiu către ultimul sau forţa centripetă a Lunii ce se mişcă pe orbita sa către forţa gravităţii la suprafaţa Pămîntului va fi precum pătratul semidiametrului Pămîntului către pătratul semidiametrului orbitei. Acelaşi raport îl are, din cauza celor arătate mai sus, forţa centripetă a Lunii ce se mişcă pe orbita sa către forţa centripetă a Lunii în apropierea suprafeţei Pămîntului. Deci forţa centripetă la suprafaţa Pămîntului este egală cu forţa gravitaţională. În consecinţă forţele nu sînt diferite, ci una şi aceeaşi: căci dacă ar fi diferite, corpurile din cauza forţelor adunate ar cădea pe Pămînt de două ori mai repede decît numai din cauza gravităţii. Rezultă deci că acea forţă centripetă cu care Luna este încontinuu sau atrasă sau împinsă de la tangetă şi este reţinută pe orbită, este însăşi forţa gravităţii pămînteşti care ajunge pînă la Lună. Şi raţiunea trebuie să consimtă că acea proprietate se extinde la distanţe enorme, fiindcă nu se poate observa nici o micşorare sensibilă a ei nici chiar pe vîrfurile munţilor celor mai înalţi. Prin urmare Luna gravitează spre Pămînt: dar şi printr-o acţiune reciprocă Pămîntul la rîndul său gravitează de asemenea spre Lună: ceea ce se confirmă pe larg în această filozofie, în care se tratează despre maree şi despre precesiunea echinocţiilor, produse atît de acţiunea Lunii cît şi a Soarelui asupra Pămîntului. În sfîrşit de aceea arătăm, după care lege scade forţa gravitaţională la distanţe mai mari de la Pămînt. Căci fiindcă gravitatea nu se deosebeşte de forţa centripetă lunară şi aceasta în adevăr este invers proporţională cu patratul distanţei, gravitatea de asemenea scade în acelaşi raport.

Să trecem acum la celelalte planete. Deoarece revoluţiile planetelor primare în jurul Soarelui şi ale celor secundare în jurul lui Jupiter şi Saturn sînt fenomene de acelaşi gen cu revoluţia Lunii în jurul Pămîntului, apoi fiindcă s-a demonstrat că forţele centripete ale celor primare sînt dirijate spre centrul Soarelui, ale celor secundare spre centrul lui Jupiter şi Saturn, după cum forţa centripetă a Lunii este îndreptată spre centrul Pămîntului; atunci deoarece toate acele forţe sînt invers proporţionale cu pătratele distanţelor de la centre, în acelaşi fel cum forţa Lunii este cu pătratul distanţei de la Pămînt: trebuie să conchidem că natura tuturora este aceeaşi. Aşadar după cum Luna gravitează spre Pămînt şi Pămîntul la rîndul său spre Lună, astfel vor gravita şi toate cele secundare spre primarele lor şi invers primarele spre secundare; la fel şi toate cele primare spre Soare şi Soarele la rîndul lui spre cele primare.

În consecinţă Soarele gravitează spre toate planetele şi acestea toate spre Soare. Căci cele secundare în timp ce însoţesc pe primarele lor, în acelaşi timp se rotesc în jurul Soarelui, împreună cu primarele.

Prin urmare din acelaşi motiv, ambele feluri de planete gravitează spre Soare şi Soarele spre ele. Că planetele gravitează spre Soare se mai constată în mod abundent şi din inegalităţile lunare a căror teorie foarte precisă explicată cu o admirabilă sagacitate, o aflăm expusă în Cartea a treia a acestei opere.

Că proprietatea atractivă a Soarelui se propagă în toate direcţiile pînă la distanţe foarte mari, şi se împrăştie asupra diverselor părţi ale spaţiului înconjurător, se poate deduce foarte clar din mişcarea cometelor, care vin în vecinătatea Soarelui de la distanţe imense, şi se apropie uneori atît de mult de sfera lui învîrtindu-se în periheliile lor, încît numai doar că nu-l ating. Teoria acestora căutată pînă acum în zadar de astronomi, descoperită în sfîrşit în mod fericit în secolul nostru şi demonstrată foarte sigur prin observaţii, o datorăm eminentului nostru autor. Prin urmare este clar că cometele se mişcă în secţiuni conice avînd focarele în centrul Soarelui şi descriu cu razele duse la Soare arii proporţionale cu timpurile. În adevăr din aceste fenomene este evident şi se dovedeşte în mod matematic, că acele forţe, prin care cometele sînt menţinute pe orbitele lor, privesc spre Soare şi sînt invers proporţionale cu pătratele distanţelor de la centrul lui. Deci cometele gravitează spre Soare: şi de aceea forţa de atracţie a Soarelui nu ajunge numai pînă la corpurile planetelor situate la distanţe date şi aproape în acelaşi plan, ci ajunge şi la cometele situate în cele mai diverse regiuni ale cerurilor şi la cele mai diverse distanţe. Aşadar aceasta este natura corpurilor ce gravitează, că forţele lor ating la

toate distanțele toate corpurile ce gravitează. De unde în adevăr rezultă că toate planetele și cometele se atrag reciproc și sînt grele reciproc: ceea ce se confirmă și prin perturbația lui Jupiter și Saturn, nu necunoscută astronomilor și produsă de acțiunile acestor planete între ele; ca și prin mișcarea aceea foarte înceată a apsidelor, care a fost menționată mai sus, și care provine dintr-o cauză asemănătoare.

În sfîrșit ajungem să putem spune că Pămîntul și Soarele și toate corpurile cerești, care însoțesc Soarele, se atrag reciproc. Așadar particulele oricît de mici ale diverselor corpuri vor avea forțele lor de atracție, acționînd în raport cu cantitatea de materie; după cum s-a arătat mai sus la cele pămîntești. La distanțe diverse însă și forțele acestora vor fi invers proporționale cu pătratele distanțelor: căci se demonstrează în mod matematic că din particulele ce se atrag după această lege trebuie să se compună sferele care se atrag după aceeași lege.

Concluziile precedente se bazează pe această axiomă, admisă de toți filozofii; anume că efectele de același fel, ale căror proprietăți cunoscute sînt aceleași, au aceleași cauze și aceleași proprietăți necunoscute încă. Căci cine se îndoiește că dacă gravitatea este cauza căderii unei pietre în *Europa*, să nu fie tot ea cauza căderii în *America*? Dacă gravitatea va fi reciprocă între piatră și Pămînt în *Europa*; cine va contesta că ea va fi reciprocă în *America*? Dacă forța atractivă a pietrei și a Pămîntului se compune, în *Europa*, din forțele atractive ale părților; cine va contesta că compunerea va fi analogă în *America*? Dacă atracția Pămîntului către toate felurile de corpuri și la toate distanțele se propagă în *Europa*, pentru ce să nu spunem că ea se propagă la fel în *America*? Pe această regulă se bazează toată filozofia: așa că înlăturînd-o nu putem afirma nimic general. Constituția diverselor lucruri se cunoaște prin observații și experiențe: de unde natural nu judecăm despre natura tuturor lucrurilor decît prin această regulă.

Fiindcă toate corpurile care se află pe Pămînt sau în ceruri și asupra cărora se pot face experiențe sau observații sînt grele; în general trebuie să spunem că gravitatea aparține tuturor corpurilor. Și după cum nu trebuie să se conceapă corpuri care să nu fie extinse, mobile și impenetrabile, tot astfel nu trebuie să se conceapă corpuri care să nu fie grele. Extinderea, mobilitatea și impenetrabilitatea corpurilor nu se cunosc decît prin experiență: în același fel se cunoaște și gravitatea. Toate corpurile în privința cărora posedăm observații, sînt extinse și mobile și impenetrabile: și deci aici conchidem că toate corpurile, chiar și acelea în privința cărora nu posedăm observații sînt extinse și mobile și impenetrabile. Astfel toate corpurile asupra cărora posedăm observații sînt grele: și de aici conchidem că toate corpurile, chiar și acelea asupra cărora nu posedăm observații sînt grele. Dacă cineva spune că corpurile stelelor fixe nu sînt grele, fiindcă gravitația lor nu s-a observat încă; cu același drept se va putea spune că nu sînt nici extinse, nici mobile, nici impenetrabile, fiindcă nici aceste proprietăți ale stelelor fixe nu s-au observat pînă acum. Ce să mai vorbim? Între proprietățile fundamentale ale tuturor corpurilor sau are loc și gravitatea, sau nu au loc nici extinderea, mobilitatea și impenetrabilitatea. Și natura lucrurilor sau se va explica în mod corect prin gravitatea corpurilor sau nu se va explica în mod corect nici prin extinderea, mobilitatea și impenetrabilitatea corpurilor.

Aud că unii nu aprobă această concluzie și mormăie nu știu ce despre calitățile oculte. Obișnuiesc să susțină încontinuu că gravitatea este ceva ocult; în adevăr cauzele oculte trebuie îndepărtate din filozofie. Dar acestora li se răspunde ușor; oculte nu sînt acele cauze a căror existență se demonstrează foarte clar prin observații, ci numai acelea a căror existență este ocultă și fictivă, nedovedită pînă acuma cu adevărat. Prin urmare gravitatea nu va fi cauza ocultă a mișcărilor cerești; fiindcă s-a arătat prin fenomene, că această putere există în realitate. Mai de grabă aceia recurg la cauze oculte, care stabilesc nu știu ce vîrtejuri ale unei materii fictive și cu totul necunoscută simțurilor, pentru a dirija acele mișcări.

Dar oare pentru aceea se numește gravitatea cauză ocultă, și din acest motiv este înlăturată din filozofie, pentrucă este ocultă cauza gravității însăși și pînă acuma nu este cunoscută? Cei care afirmă aceasta, să bage de seamă să nu afirme o absurditate prin care să răstoarne

la urma urmei fundamentele întregei filozofii. Căci, cauzele obişnuiesc să procedeze prin legătură continuă de la cele compuse la cele mai simple: cînd ajungi la cauza cea mai simplă, nu-ţi va fi îngăduit să mergi mai departe. Aşadar nici o explicaţie mecanică nu se poate da cauzei celei mai simple: căci dacă s-ar da, cauza nu ar mai fi cea mai simplă. Pentru aceasta vei numi oculte cauzele cele mai simple şi vei vrea să le înlături? Atunci, în acelaşi timp se vor înlătura şi acelea care depind imediat de ele şi acelea care depind mai departe de aceasta, pînă ce filozofia va fi golită de toate cauzele şi complet curăţită.

Sînt unii care spun că gravitatea este nenaturală şi o numesc miracol perpetuu. Aşadar ei voiesc să o înlăture fiindcă în fizică nu ar avea loc cauzele nenaturale. Abia merită să ne oprim pentru a respinge această obiecţiune cu totul ineptă care ea însăşi dărîmă întreaga filozofie. Căci sau vor contesta că gravitatea se află în toate corpurile, ceea ce totuşi nu se poate spune: sau vor afirma că ea este împotriva naturii pe motivul că, nu îşi are originea în alte proprietăţi ale corpurilor deci nu în cauze mecanice. Desigur există proprietăţi primare ale corpurilor; care, deoarece sînt primare, nu depind de altele. Să vadă deci dacă nu cumva şi acestea toate sînt de asemenea împotriva naturii, şi în acelaşi fel de înlăturat; să vadă apoi care ar fi într-adevăr viitoarea filozofie.

Sînt unii cărora această întreagă fizică cerească le place mai puţin, fiindcă pare că se opune dogmelor lui Descartes şi că abia se poate împăca cu ele. Acestora le este permis să se bucure de părerea lor; dar trebuie să procedeze corect: deci să nu refuze altora libertatea ce pretind a li se acorda lor. Aşadar ne va fi îngăduit a menţine şi a adopta filozofia newtoniană, care nouă ni se pare mai adevărată, urmînd să cerceteze mai mult cauzele probate prin fenomene decît pe cele fictive şi încă neconfirmate. Aparţine adevăratei filozofii, să deducă naturile lucrurilor din cauze ce există în mod real; să caute legile prin care marele creator a voit să stabilească această foarte frumoasă ordine a lumii; nu acelea prin care ar fi putut dacă ar fi voit astfel. Căci este conform cu raţiunea, că din mai multe cauze, diferind întru cîtva între ele poate rezulta aceleaşi efecte: dar cauza adevărată va fi aceea din care în adevăr şi de fapt provine; celelalte nu au loc în adevărata filozofie. În orologiile automate aceeaşi mişcare a arătătoarelor orare poate proveni fie din atîrnarea unei greutăţi fie dintr-un resort închis înlăuntru. Dacă orologiul menţionat de fapt este prevăzut cu o greutate, va fi luat în rîs cel care şi-ar imagina un resort, şi ar încerca să explice mişcarea arătătorului cu ajutorul ipotezei imaginată în grabă în acest fel: căci va trebui să se cerceteze cu de-amănuntul construcţia internă a maşinii, pentru ca astfel să se poată explora adevăratul principiu al mişcării propuse. Aceeaşi părere sau una asemănătoare ne vom face despre acei filozofi care ar vrea ca cerurile să fie pline cu o materie oarecare foarte subtilă, iar aceasta să acţioneze fără încetare în vîrtejuri. Căci dacă prin ipotezele lor se pot explica fenomenele în mod foarte precis; totuşi nu se poate spune că ei ne dau o filozofie adevărată, şi că au aflat adevăratele cauze ale mişcărilor cereşti; decît dacă vor demonstra sau că acestea există în adevăr, sau că cel puţin altele nu există. Prin urmare dacă se va dovedi că atracţiunea tuturor corpurilor îşi are locul adevărat în natura lucrurilor; mai mult, dacă se va fi arătat în ce fel se soluţionează toate mişcările cereşti prin aceasta; ar fi zadarnic şi cu drept cuvînt de rîs obiecţiunea, dacă cineva ar spune că acele mişcări trebuie explicate prin vîrtejuri: chiar dacă am admite că aceasta s-ar putea întîmpla. Dar nu admitem aşa ceva: căci în nici un caz nu se pot explica fenomenele prin vîrtejuri; ceea ce autorul nostru dovedeşte pe larg şi prin raţionamente foarte clare; astfel că ar trebui să fie mai mult decît indulgenţi cu visurile acelia care corectînd imaginile inepte, şi împodobindu-le apoi cu noi comentarii, fac o operă zadarnică.

Dacă corpurile planetelor şi cometelor sînt purtate în jurul Soarelui de vîrtejuri, trebuie ca corpurile purtate şi părţile vîrtejurilor aflătoare în apropiere să se mişte cu aceeaşi viteză şi aceeaşi direcţie şi să aibă aceeaşi densitate sau aceeaşi forţă de inerţie pentru cantitatea de materie. Într-adevăr se constată că planetele şi cometele, mişcîndu-se în aceleaşi regiuni cereşti,

se mişcă cu viteze diferite şi în direcţii diverse. Urmează deci în mod necesar că acele părţi ale fluidului ceresc, care se află la aceleaşi distanţe de Soare se mişcă în acelaşi timp în regiuni diverse cu viteze diferite: căci este nevoie de un fel de direcţie şi viteză ca să poată înainta planetele; de un alt fel ca să poată înainta cometele. Ceea ce neputîndu-se explica sau va trebui să admitem că nu toate corpurile cereşti sînt antrenate de materia vîrtejului; sau va trebui să spunem că mişcările lor nu sînt cauzate de unul şi acelaşi vîrtej, ci de mai multe care sînt diferite între ele, şi pătrund acelaşi spaţiu aflător în jurul Soarelui.

Dacă în acelaşi spaţiu se află mai multe vîrtejuri şi se admite că ele se pătrund reciproc şi se rotesc cu mişcări diferite; deoarece aceste mişcări trebuie să fie conforme cu mişcările corpurilor antrenate care sînt extrem de regulate, şi au loc în secţiuni conice, cînd foarte excentrice, cînd foarte apropiate de forma cercurilor; cu drept cuvînt va trebui să se pună întrebarea cum este posibil ca ele să se păstreze întregi şi să nu fie perturbate de acţiunile materiei ce li se opun de atîtea secole. În adevăr dacă aceste mişcări închipuite sînt mai complicate şi se explică mai greu decît adevăratele mişcări ale planetelor şi cometelor; mi se pare că în zadar le acceptăm în filozofie; căci orice cauză trebuie să fie mai simplă decît efectul ei. Admiţînd libertatea imaginaţiei cineva ar putea afirma că toate planetele şi cometele sînt înconjurate de atmosferă la fel cu Pămîntul nostru; care ipoteză este mai conformă cu raţiunea decît ipoteza vîrtejurilor. El ar putea afirma apoi că aceste atmosfere, prin natura lor se mişcă în jurul Soarelui şi descriu secţiuni conice; care mişcare natural se poate concepe cu mult mai uşor ca mişcarea asemănătoare a vîrtejurilor ce se pătrund reciproc. În sfîrşit ar putea susţine că înseşi planetele şi cometele sînt antrenate în jurul Soarelui de atmosferele lor, şi triumfă prin cauzele descoperite ale mişcărilor cereşti. Dar cine crede că această fabulă trebuie respinsă acela respinge şi cealaltă fabulă: căci oul nu este mai asemănător cu oul decît ipoteza atmosferelor cu ipoteza vîrtejurilor. Galileu ne-a învăţat că devierea de la traiectoria rectilinie a unei pietre aruncate care se mişcă pe o parabolă provine din cauza greutăţii pietrei pe Pămînt, adică dintr-o calitate ocultă. Se poate totuşi ca un alt filozof cu nasul mai fin să afle o altă cauză.

Aşadar el poate imagina că o materie oarecare subtilă care să nu fie percepută nici cu vederea nici cu pipăitul nici cu vreun alt simţ, se agită în regiunile din apropierea suprafeţei Pămîntului. Această materie însă este purtată în diverse regiuni cu mişcări diferite şi cu totul contrare, şi se trudeşte să descrie linii parabolice, apoi în adevăr deviaţia pietrei se explică uşor astfel, şi el va primi aplauzele poporului. Piatra, spune el, înoată în acel fluid subtil şi urmînd cursului lui, nu poate să nu descrie acelaşi drum. În adevăr, fluidul se mişcă pe linii parabolice; prin urmare este necesar ca piatra să se mişte pe o parabolă. Acum cine nu va admira ingeniozitatea foarte ascuţită a acestui filozof care din cauze mecanice, anume din materie şi mişcare, deduce fenomenele naturii, în mod clar la înţelesul vulgului. Cine în adevăr nu-şi va rîde de bunul Galileu care cu multă trudă matematică a susţinut reintroducerea calităţilor oculte, alungate în mod fericit din filozofie? Dar mi-e ruşine să mă opresc mai mult asupra unor lucruri fără importanţă.

Totul revine la următoarele: numărul cometelor este foarte mare; mişcările lor sînt foarte regulate şi urmează aceleaşi legi ca mişcările planetelor. Se mişcă pe orbite conice, iar aceste orbite sînt foarte excentrice. Sînt purtate în toate părţile cerurilor, şi trec foarte liber prin regiunile planetelor şi adesea se împotrivesc ordinei semnelor zodiacului. Aceste fenomene sînt confirmate cu multă certitudine de observaţiile astronomice: şi nu se pot explica cu ajutorul vîrtejurilor. Dimpotrivă, sînt incompatibile cu vîrtejurile planetelor. Mişcările cometelor nu vor avea loc decît dacă materia fictivă este complet eliminată din ceruri.

Căci dacă planetele sînt antrenate în jurul Soarelui de vîrtejuri; părţile vîrtejurilor, care se află în imediata apropiere a fiecărei planete, vor avea aceeaşi densitate ca şi planetele; după cum s-a spus mai sus. Aşadar întreaga materie care se află în vecinătatea perimetrului orbitei celei mari, va avea o densitate egală cu a Pămîntului, iar aceea care se află între orbita cea mare

şi orbita lui Saturn va avea sau una egală sau una mai mare. Căci ca să poată rămînea constituţia vîrtejului, părţile mai puţin dense trebuie să ocupe centrul, iar cele mai dense trebuie să se îndepărteze mai mult de centru. Căci deoarece timpurile periodice ale planetelor sînt ca puterea 3/2 a distanţelor de la Soare, trebuie ca perioadele părţilor vîrtejului să păstreze acelaşi raport. De aici în adevăr rezultă, că forţele centrifuge ale acestor părţi vor fi inverse cu pătratele distanţelor. Aşadar acelea care se află la o distanţă mai mare de centru, tind să se îndepărteze de acesta cu o forţă mai mică: astfel că dacă sînt mai puţin dense, ele trebuie să cedeze forţei mai mari, cu care părţile mai apropiate de centru tind să se urce. Prin urmare cele mai dense se urcă, cele mai puţin dense se coboară, şi va fi necontenit o schimbare reciprocă a locurilor; pînă ce materia fluidă a întregului vîrtej va fi în aşa fel dispusă şi orînduită, încît să poată rămînea în echilibru. Dacă două fluide, a căror densitate este diferită, sînt cuprinse în acelaşi vas; se va întîmpla că fluidul de densitate mai mare să tindă a ocupa locul cel mai de jos din cauza forţei gravitaţionale mai mare: şi printr-un raţionament cu totul asemănător se poate spune că părţile mai dense ale vîrtejurilor tind spre locul cel mai de sus cu o forţă centrifugă mai mare. Prin urmare cea mai mare parte a vîrtejului, care toată este situată în afară de orbita Pămîntului, va avea o densitate şi deci o forţă de inerţie faţă de masa materiei, care nu va fi mai mică decît densitatea şi forţa de inerţie a Pămîntului: de aici în adevăr se va naşte o rezistenţă foarte mare contra mersului cometelor şi chiar foarte sensibilă; ca să nu spun una care se pare cu tot dreptul că poate opri complet şi absorbi mişcarea lor. Dar din mişcarea foarte regulată a cometelor se constată că ele nu sufăr nici o rezistenţă care să fie cîtuşi de puţin observabilă; şi de aceea nu întîlnesc nici un fel de materie, care să aibă vreo forţă de rezistenţă oarecare sau care să aibă vreo densitate sau forţă de inerţie. Căci rezistenţa mediilor provine sau din inerţia materiei fluide sau din lipsa de lubricitate. Aceea care provine din lipsa de lubricitate este foarte mică; şi abia se poate observa în fluidele obişnuite, dacă ele nu sînt foarte vîscoase cum este uleiul şi mierea. Rezistenţa ce se simte în aer, apă, mercur şi fluide nevîscoase de acest fel aproape întreagă este de genul întîi; şi nu poate fi micşorată prin nici un grad de fineţe dacă rămîne densitatea sau forţa de inerţie a fluidului cu care această rezistenţă este totdeauna proporţională; ceea ce s-a demonstrat foarte clar de autorul nostru în admirabila sa teorie a rezistenţelor, care acum se expune ceva mai precis, în această a doua ediţie şi se confirmă mai complet prin experienţele corpurilor în cădere.

Corpurile înaintînd comunică treptat mişcarea lor fluidului înconjurător şi comunicînd-o o pierd, iar pierzînd-o ele sînt întîrziate. Aşadar întîrzierea este proporţională cu mişcarea comunicată; iar mişcarea comunicată cînd se dă viteza corpului ce înaintează este ca densitatea fluidului; prin urmare întîrzierea sau rezistenţa va fi precum aceeaşi densitate a fluidului; şi nici nu poate fi nimicită decît dacă fluidul ce se întoarce restituie părţilor dinapoi ale corpului mişcarea luată. Dar aceasta nu s-ar putea spune decît dacă acţiunea imprimată de fluid asupra părţilor posterioare ale corpului ar fi egală cu acţiunea imprimată de corp asupra fluidului în părţile anterioare, adică decît dacă viteza relativă cu care fluidul împinge corpul de la spate ar fi egală cu viteza cu care corpul împinge fluidul, adică decît dacă viteza absolută a fluidului ce se întoarce va fi de două ori mai mare decît viteza absolută a fluidului care împinge înainte, ceea ce nu poate avea loc. Prin urmare în nici un chip nu poate fi înlăturată rezistenţa fluidelor ce se naşte din densitatea şi forţa lor de inerţie. Deci trebuie să conchidem; că fluidul ceresc nu are nici o forţă de inerţie, fiindcă nu are nici o forţă de rezistenţă; nu are nici o forţă prin care să se comunice mişcarea, fiindcă nu are nici o forţă de inerţie; nu are nici o forţă prin care să se producă vreo schimbare oarecare fie unui singur corp, fie mai multora, fiindcă nu are nici o forţă prin care să se comunice mişcarea; nu are nici o eficacitate fiindcă nu are nici o proprietate de a produce vreo schimbare. În consecinţă această ipoteză care este lipsită de orice bază şi care nu serveşte de loc la explicarea naturii lucrurilor, s-ar putea numi cea mai ineptă şi cu totul nedemnă de un filozof. Cei care vor ca cerurile să fie pline cu o materie

fluidă, afirmă că aceasta nu este inertă; ei înlătură vidul prin vorbe, însă în realitate îl readuc. În adevăr deoarece materia fluidă de acest fel în nici un chip nu poate fi separată de spațiul vid; întreaga discuție are loc în jurul numelor, nu al naturilor lucrurilor. Dacă sînt unii atît de atașați materiei încît cu nici un preț nu vor să admită un spațiu vid de corpuri; să vedem unde trebuie în sfîrșit să ajungă.

Căci sau zic că această constituție a lumii pline peste tot, pe care ei o imaginează, s-a făcut prin voința lui Dumnezeu în scop ca în operațiile naturii să se poată avea un ajutor prezent de la eterul foarte subtil care pătrunde și umple toate; ceea ce totuși nu se poate spune, fiindcă s-a dovedit deja cu fenomenele cometelor că acest eter nu are nici un efect: sau zic că ea s-a făcut prin voința lui Dumnezeu, cu un scop oarecare necunoscut; ceea ce iarăși nu trebuie să se spună, fiindcă din același motiv se poate stabili la fel o constituție deosebită a lumii: sau în sfîrșit nu zic că ea s-a făcut prin voința lui Dumnezeu, ci dintr-o necesitate oarecare a naturii. Așadar trebuie să se cufunde în sfîrșit în mocirlele murdare ale turmei necurate. Aceștia sînt cei care visează că toate sînt guvernate de soartă, nu de providență; că materia a existat totdeauna și pretutindeni prin necesitatea naturii sale, este infinită și eternă. Admițînd acestea ea va fi și pretutindenea uniformă: căci varietatea formelor este cu totul incompatibilă cu necesitatea. Ea va fi și nemișcată: căci dacă în mod necesar s-ar mișca într-o direcție determinată, cu o viteză oarecare determinată; dintr-o necesitate asemănătoare se va mișca într-o regiune diferită cu o viteză diferită; dar ea nu se poate mișca în direcții diferite cu viteze diferite; prin urmare trebuie să fie nemișcată. În adevăr lumea, distinsă prin cea mai frumoasă varietate a formelor și mișcărilor, nu s-a putut naște în nici un caz decît prin voința cu totul liberă a lui Dumnezeu care toate le prevede și le guvernează.

Așadar din acest izvor au emanat toate cele ce se numesc legile naturii: în care apar multe urme ale celei mai înțelepte concepții, nici una a necesității. De aceea nu trebuie să le scoatem din conjecturi nesigure, ci trebuie să le învățăm observîndu-le și experimentîndu-le. Cine își închipuie că poate să afle principiile fizicii și legile lucrurilor, numai prin puterea minții și flacăra interioară a rațiunii; acela sau trebuie să afirme că lumea există din necesitate și să urmărească legile propuse din aceeași necesitate; sau dacă ordinea naturii a fost stabilită prin voința lui Dumnezeu, că el sărman om să poată spune ce ar fi fost mai potrivit să se fi făcut. Orice filozofie sănătoasă și adevărată se bazează pe fenomenele lucrurilor: care dacă ne conduc chiar fără voie și cu toată opunerea noastră la astfel de principii, în care se evidențiază cît se poate de clar cea mai bună înțelepciune și dominația supremă a ființei celei mai înțelepte și atotputernice; aceste principii nu vor fi mai puțin sigure fiindcă poate unor oameni le vor fi mai puțin plăcute. Acele care displac, vor fi pentru aceștia fie minuni fie calități oculte: de fapt însă numirile date cu răutate nu trebuie extinse din greșeală asupra lucrurilor; decît dacă vor să afirme că filozofia trebuie să se bazeze pe ateism. De dragul acestor oameni nu trebuie să nimicim filozofia, întrucît ordinea lucrurilor nu vrea să se schimbe.

Prin urmare față de judecători cinstiți și drepți va avea valoare metoda sublimă de a filozofa, care se bazează pe experiențe și observații. Acesteia în adevăr abia se poate spune cîtă lumină, cîtă demnitate, îi revine din această splendidă operă a distinsului nostru autor; a cărui minte extraordinar de fericită care poate dezlega problemele cele mai dificile, și care se întinde pînă la acelea la înălțimea cărora mintea omenească nu avea nici o speranță să se poată ridica, cu drept cuvînt este admirat și respectat de oricine este familiarizat ceva mai adînc cu astfel de lucruri. Inlăturînd așadar piedicile, el ne-a deschis drumul spre misterele cele mai frumoase ale lucrurilor. In sfîrșit ne-a lămurit astfel structura foarte elegantă a sistemului lumii și ne-a permis a o pătrunde mai profund; încît nici însuși regele Alfons dacă ar reînvia acum, nu ar simți lipsa nici a simplicității, nici a grației armoniei. Prin urmare ne este îngăduit să aprofundăm mai bine măreția naturii, și să ne bucurăm de cea mai deliciosă contemplare, și în adevăr putem stima și venera mai mult pe creatorul și stăpînul universului, ceea ce este recolta cea mai bogată

a filozofiei. Trebuie să fie orb acela care din structurile cele mai bune şi mai înţelepte ale lucrurilor nu vede imediat înţelepciunea şi bunătatea infinită a atotputernicului creator: nebun acela care nu vrea să o recunoască.

Excelenta operă a lui *Newton* se prezintă ca o cetate foarte întărită împotriva atacurilor ateiştilor: căci nici nu vei putea lua mai bine din alt loc decît din această tolbă săgeţile împotriva hoardei necredincioase. Aceasta a simţit-o de mult şi, în cuvîntări foarte erudit editate în englezeşte şi latineşte, a demonstrat-o în mod distins întîi *R'chard Bentley*, vestitul bărbat în toate genurile literare şi eminentul protector al bunelor arte, podoaba veacului său şi a Academiei noastre, profesor foarte distins şi foarte integru la Trinity College. Acestuia sînt dator să-i mărturisesc obligaţia mea: nici tu cetitorule binevoitor, nu-i vei refuza mulţumirile tale care i se cuvin. Căci el, bucurîndu-se de mult timp de prietenia intimă a vestitului nostru autor (care nici la generaţiile viitoare nu va preţui mai puţin, decît propriile scrieri care sînt bine apreciate de lumea literară) a ajutat pe prieten deodată la creşterea renumelui şi înaintarea ştiinţelor. Prin urmare deoarece exemplarele primei ediţii au devenit foarte rare şi au ajuns la un preţ exorbitant; prin repetate cereri l-a convins şi aproape mustrîndu-l l-a decis în sfîrşit pe prea distinsul bărbat, vestit nu mai puţin prin modestie decît prin cea mai înaltă erudiţie, să-i permită a scoate cu cheltuielile şi îngrijirea sa această nouă ediţie a operei revăzută toată şi îmbogăţită cu admirabile adaosuri: iar mie, mi-a cerut cum avea dreptul, să-mi iau sarcina nu ingrată de a îngriji ca ea să apară cît se poate de lipsită de erori.

Canterbury, 12 mai 1713

ROGER COTES
membru la Trinity College,
profesor Plumian de astronomie
şi filozofie experimentală.

Prefața autorului la ediția a treia

În această a treia ediție, pe care a îngrijit-o Enric Pemberton, M. D., bărbat foarte expert în astfel de chestiuni, se explică în Cartea a doua ceva mai pe larg decît mai înainte unele lucruri, privind rezistența mediilor și se adaugă experiențe noi asupra rezistenței corpurilor grele ce cad în aer. In Cartea a treia se expune ceva mai pe larg demonstrația prin care se arată că Luna se menține în orbita sa din cauza gravitației, și se adaugă observații noi asupra proporției diametrului lui Jupiter făcute între timp de d-l Pound. Se mai adaugă unele observații asupra cometei apărute în anul 1680, obținute în luna noiembrie, în Germania de către d-l Kirch, care mi-au căzut de curînd în mînă, și prin care se constată cît de precis corespund orbitele parabolice la mișcările cometelor. Iar orbita acelei comete pe care a calculat-o Halley se determină ceva mai precis decît mai înainte, adică în elipsă. Și se arată că cometa în această orbită eliptică, printre cele nouă constelații cerești, are un curs nu mai puțin precis decît cel descris de planete în orbitele lor eliptice definite în astronomie. Se anexează și orbita cometei care a apărut în anul 1723, calculată de d-l Bradley profesor pe astronomie la *Oxford*.

Is. NEWTON

Londra, 12 ianuarie 1725/1726

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO, EQ. AUR.

Editio tertia aucta & emendata.

LONDINI:
Apud GUIL. & JOH. INNYS, Regiæ Societatis typographos.
MDCCXXVI.

Foaia de titlu a ediției a III-a a *Principiilor*

DEFINIŢII

DEFINIŢIA I

Cantitatea de materie este măsura ei, născută din densitatea şi volumul ei luate împreună.

Aerul de densitate dublă într-un spaţiu iarăşi dublu este cvadruplu; într-unul triplu este sextuplu. Acelaşi lucru se poate spune şi despre zăpada şi pulberea condensate prin compresiune sau lichefiere; de asemenea despre toate corpurile care se condensează din anumite cauze şi în diferite feluri. Nu mă ocup aici de mediul care pătrunde liber în intervalul dintre părţi admiţînd că el există. În cele ce urmează voi numi această cantitate corp sau masă. Ea se cunoaşte prin greutatea unui corp: căci prin experienţe precise efectuate asupra pendulelor am aflat că ea este proporţională cu greutatea, după cum se va arăta ulterior.

DEFINIŢIA II

Cantitatea de mişcare este măsura ei, născută din viteză şi cantitatea de materie luate împreună.

Mişcarea întreagă este suma mişcărilor părţilor; astfel că într-un corp dublu, dar de aceeaşi viteză, ea este dublă, iar dacă şi viteza este dublă ea este cvadruplă.

DEFINIŢIA III

Forţa ce rezidă în materie este putinţa de rezistenţă, cu care un corp oarecare, lăsat liber, persistă în starea sa de repaus sau de mişcare uniformă rectilinie.

Această forţă este totdeauna proporţională cu corpul şi nu se deosebeşte de inerţia masei decît prin felul de a o concepe. Căci inerţia materiei este aceea care face ca orice corp să fie perturbat cu greu din starea sa de repaus sau de mişcare. De aceea şi forţei ce rezidă în materie i se poate da numele foarte semnificativ de forţă de inerţie. În adevăr corpul exercită această

forţă numai cînd îşi schimbă starea din cauza unei alte forţe ce i se imprimă şi o exercită sub forme diferite, fie ca rezistenţă fie ca impuls: rezistenţă, atunci cînd corpul se opune unei forţe imprimate tinzînd să-şi păstreze starea; impuls, atunci cînd acelaşi corp, cedînd cu greutate forţei de rezistenţă a unui obstacol, tinde să schimbe starea unui astfel de obstacol. De obicei, rezistenţa se atribuie corpurilor în repaus iar impulsul celor în mişcare; dar mişcarea şi repausul, după cum se concep de obicei, se deosebesc între ele numai în mod relativ şi nu totdeauna corpurile care de obicei se consideră în repaus sînt de fapt în repaus.

DEFINIŢIA IV

Forţa imprimată este acţiunea exercitată asupra unui corp, pentru a-i schimba starea de repaus sau de mişcare uniformă rectilinie.

Această forţă constă numai din acţiune şi ea nu rămîne în corp după acţiune. Căci corpul persistă în orice stare nouă numai mulţumită forţei de inerţie. Forţa imprimată provine din diverse origini precum din ciocnire, din presiune, sau din forţa centripetă.

DEFINIŢIA V

Forţa centripetă este aceea, prin care corpurile sînt atrase spre un punct ca spre un centru, sau împinse, sau tind spre acel punct într-un mod oarecare.

Acestei categorii aparţin: gravitatea prin care corpurile tind spre centrul Pămîntului; forţa magnetică prin care fierul tinde spre magnet, şi forţa aceea, oricare ar fi ea, prin care planetele sînt abătute necontenit de la mişcările rectilinii şi sînt constrînse să se mişte pe linii curbe. Piatra ce se roteşte cu praştia tinde să se îndepărteze de la mîna care o învîrteşte; prin tendinţa sa, ea întinde praştia cu atît mai tare cu cît se roteşte mai repede, iar imediat ce scapă îşi ia sborul îndepărtîndu-se. Numesc forţă centripetă forţa contrară tendinţii de mai sus, anume aceea cu care praştia atrage necontenit piatra spre mînă şi o menţine pe orbită, fiindcă ea este îndreptată spre mînă adică spre centrul orbitei. Acelaşi este cazul tuturor corpurilor, care se mişcă pe un cerc. Toate acestea tind să se îndepărteze de centrele orbitelor, şi dacă nu ar fi o altă forţă, de sens contrar acestei tendinţe, cu ajutorul căreia să fie dirijate şi reţinute pe orbitele lor, pe care o numesc forţă centripetă, ele s-ar mişca pe linii drepte cu mişcare uniformă. Un proiectil, dacă ar fi lipsit de forţa gravitaţională, nu ar cădea la Pămînt, ci s-ar duce în ceruri pe o linie dreaptă, adică cu mişcare uniformă, dacă se înlătură rezistenţa aerului. Din cauza greutăţii sale este deviat de la mişcarea rectilinie şi abătut încontinuu spre Pămînt anume mai mult sau mai puţin după greutatea sa şi viteza mişcării. Cu cît va fi mai mică greutatea lui în raport cu cantitatea de materie, sau mai mare viteza cu care este proiectat, cu atît va devia mai puţin de la drumul rectiliniu continuîndu-l mai departe. Dacă un proiectil de tun aruncat orizontal din vîrful unui munte prin forţa prafului de puşcă descrie o curbă pe o distanţă de două mile înainte de a cădea la pămînt, aruncat cu o viteză dublă parcurge o distanţă aproape

dublă, iar cu o viteză de zece ori mai mare parcurge una de zece ori mai mare, dacă se înlătură rezistenţa aerului. Iar mărind viteza se poate mări după voie distanţa la care se aruncă, şi micşora curbura liniei pe care o descrie, astfel că în sfîrşit să cadă la o distanţă de zece, treizeci sau nouăzeci de grade; sau astfel ca să înconjure întreg Pămîntul sau în sfîrşit să meargă în ceruri şi să-şi continue mişcarea deviată la infinit. Şi din aceeaşi cauză pentru care proiectilul prin forţa gravitaţională poate curba orbita înconjurînd Pămîntul, din aceeaşi cauză şi Luna, fie prin forţa gravitaţională, dacă Luna este grea, fie printr-o altă forţă care o împinge spre Pămînt, este într-una deviată din mişcarea sa rectilinie spre Pămînt şi curbată pe orbita sa. Fără o astfel de forţă Luna nu poate fi reţinută pe orbita sa. Dacă această forţă ar fi mai mică, ea nu ar abate Luna deajuns de la cursul său rectiliniu. Dacă ar fi mai mare, ar devia-o mai mult decît trebuie şi ar duce-o spre Pămînt. Trebuie deci să aibă o mărime potrivită. Rămîne ca matematicienii să afle forţa prin care un corp poate fi reţinut pe orbită cu viteză dată; şi invers, să afle orbita curbilinie pe care este deviat un corp ce pleacă dintr-un loc dat cu o viteză dată, sub influenţa unei forţe date. Cantitatea acestei forţe centripete este de trei genuri: absolută, acceleratoare şi motoare.

DEFINIŢIA VI

Cantitatea absolută a forţei centripete este măsura mai mare sau mai mică ei, în raport cu efectul cauzei care o propagă de la centru în regiunile înconjurătoare.

Astfel forţa magnetică este mai mare într-un magnet şi mai mică în altul, după mărimea magnetului şi intensitatea forţei sale.

DEFINIŢIA VII

Cantitatea acceleratoare a forţei centripete este măsura ei proporţională cu viteza pe care o produce într-un timp dat.

Astfel forţa unui magnet este mai mare la o distanţă mai mică şi mai mică la o distanţă mai mare. Sau forţa gravitaţională este mai mare în văi şi mai mică pe vîrfurile munţilor înalţi; chiar şi mai mică (după cum se va vedea mai tîrziu) la distanţe mai mari de globul pămîntesc; iar la distanţe egale ea este aceeaşi pretutindeni, fiindcă toate corpurile ce cad (grele sau uşoare, mari sau mici) abstracţie făcînd de rezistenţa aerului, sînt accelerate la fel.

DEFINIŢIA VIII

Cantitatea motoare a forţei centripete este măsura ei, proporţională cu mişcarea pe care o produce într-un timp dat.

Astfel greutatea este mai mare la un corp mai mare şi mai mică la unul mai mic; iar pentru acelaşi corp este mai mare aproape de Pămînt şi mai mică în ceruri. Această cantitate este tendinţa sau împingerea spre centru

a întregului corp, și (ca să zic așa) greutatea; ea se cunoaște întotdeauna cînd cunoaștem forța egală și de sens contrar cu ea, prin care se poate împiedica descinderea corpului.

Aceste cantități ale forțelor se pot numi, pentru simplificare, forțe *motoare*, *acceleratoare* și *absolute*, iar pentru a le distinge le putem referi la corpurile care tind spre centru, la locurile corpurilor și la centrul forțelor: anume forța motoare la corp ca tendința întregului corp, compusă din tendințele tuturor părților; forța acceleratoare, la locul corpului, ca o cauză eficientă propagată de la centru înspre diversele locuri înconjurătoare pentru a mișca corpurile ce se află acolo; iar forța absolută la centru, prevăzut cu o anumită cauză, fără de care forțele motoare nu s-ar propaga în regiunea înconjurătoare, fie că acea cauză este un corp central oarecare (cum ar fi magnetul în centrul forței magnetice, sau Pămîntul în centrul forței gravitaționale) fie că este altceva ce nu se manifestă. Cel puțin aceasta este concepția pur matematică. Căci nu am pretenția să explic cauzele și sediile fizice ale forțelor.

Forța acceleratoare se raportă așadar către cea motoare, precum viteza către mișcare. În adevăr, cantitatea de mișcare este născută prin produsul dintre viteză și cantitatea de materie, iar forța motoare prin produsul dintre forța acceleratoare și cantitatea aceleiași materii. Căci suma acțiunilor forței acceleratoare asupra diverselor părți ale corpului este forța motoare a întregului corp. Deci la suprafața Pămîntului, unde gravitația acceleratoare, adică forța acceleratoare a gravității este aceeași pentru toate corpurile, gravitația motoare sau greutatea este proporțională cu corpul: dacă însă ne urcăm în regiuni unde gravitația acceleratoare este mai mică, greutatea de asemenea se va micșora, fiind totdeauna proporțională cu produsul dintre corp și gravitația acceleratoare. Astfel în regiunile unde gravitația acceleratoare este de două ori mai mică, greutatea unui corp de două sau trei ori mai mic, va fi de patru sau de șase ori mai mic.

De aici înainte atracțiile și impulsurile le numesc în același sens acceleratoare și motoare. De asemenea folosesc în mod indiferent și amestecat numirile de atracție, impuls sau împingere spre un centru oarecare, considerînd aceste forțe nu în mod fizic, ci numai matematic. De aceea cititorul nu trebuie să-și închipuie că prin aceste numiri definesc cumva o specie sau un fel de acțiune, cauză sau rațiune fizică, sau că atribui centrelor (care sînt puncte matematice) forțe într-un înțeles real și fizic, atunci cînd din întîmplare voi spune sau că centrele atrag, sau că există forțe centrale.

SCOLIE

Pînă aici am încercat să lămuresc în ce sens trebuie luate unele numiri mai puțin cunoscute. Timpul, spațiul, locul și mișcarea sînt perfect cunoscute de toată lumea. Trebuie totuși notat că lumea de rînd concepe aceste cantități numai prin relația cu lucrurile ce cad sub simțuri. De aici se nasc anumite prejudecăți pentru înlăturarea cărora este bine să deosebim aceste cantități în absolute și relative, adevărate și aparente, matematice și comune.

I. Timpul absolut, adevărat și matematic, în sine și după natura sa, curge în mod egal fără nici o legătură cu ceva extern și cu un alt nume se

chiamă şi durată. Timpul relativ, aparent şi comun este acea măsură (precisă sau neegală) sensibilă şi externă a oricărei durate determinată prin mişcare, care se foloseşte de obicei în loc de timpul adevărat, ca oră, ziuă, lună, an.

II. Spaţiul absolut, considerat în natura sa, fără nici o relaţie cu ceva extern, rămîne totdeauna asemenea şi imobil. Spaţiul relativ este o măsură sau o parte oarecare mobilă a celui absolut, care se relevă simţurilor noastre prin poziţia sa faţă de corpuri, şi de obicei se confundă cu spaţiul imobil. Astfel este o parte a unui spaţiu subteran, aerian sau ceresc determinată prin poziţia sa faţă de Pămînt. Spaţiul absolut şi relativ sînt aceleaşi ca specie şi mărime, dar nu rămîn totdeauna aceleaşi ca număr. Căci dacă de pildă Pămîntul se mişcă, spaţiul nostru aerian, care relativ şi faţă de Pămînt rămîne totdeauna acelaşi, va fi cînd o parte cînd alta a spaţiului absolut prin care trece aerul şi astfel în mod absolut el se va schimba încontinuu.

III. Locul este o parte a spaţiului pe care o ocupă corpul şi este sau absolut sau relativ după cum este spaţiul. Zic, parte a spaţiului şi nu poziţia corpului, sau suprafaţa înconjurătoare. Căci locurile solidelor egale sînt totdeauna egale; suprafeţele însă din cauza neasemănării figurilor de cele mai multe ori sînt neegale, poziţiile propriu vorbind, nu au cantitate şi nici nu sînt atît locuri, cît mai ales afecţiuni ale locurilor. Mişcarea întregului este aceeaşi cu suma mişcărilor părţilor, adică translaţia întregului de la locul său este aceeaşi cu suma translaţiei părţilor de la locurile lor. De aceea locul întregului este acelaşi cu suma locurilor părţilor şi din aceste motive el este intern şi în tot corpul.

IV. Mişcarea absolută este translaţia unui corp dintr-un loc absolut într-un loc absolut, cea relativă din unul relativ în altul relativ. Astfel într-o corabie mînată de pînzele sale locul relativ al unui corp este acea parte a corăbiei în care se află corpul, sau acea parte a cavităţii pe care o umple corpul şi care se mişcă împreună cu corabia. Repausul relativ este permanenţa corpului în aceeaşi regiune sau aceeaşi parte a acelui spaţiu imobil, în care se mişcă corabia însăşi împreună cu cavitatea sa, şi tot ceea ce conţine. Prin urmare dacă Pămîntul este cu adevărat nemişcat, corpul care se află în repaus relativ faţă de corabie se va mişca cu o mişcare adevărată şi absolută cu viteza cu care se mişcă corabia însăşi faţă de Pămînt. Dar dacă şi Pămîntul se mişcă, se va naşte mişcarea adevărată şi absolută a corpului parte din mişcarea adevărată a Pămîntului în spaţiul imobil, parte din mişcarea relativă a corăbiei faţă de Pămînt. Iar dacă şi corpul se mişcă faţă de corabie, mişcarea lui adevărată se va naşte parte din mişcarea adevărată a Pămîntului în spaţiul imobil, parte din mişcările relative atît ale corăbiei faţă de Pămînt cît şi ale corpului faţă de corabie; şi din aceste mişcări relative va rezulta mişcarea relativă a corpului faţă de Pămînt. Astfel dacă acea parte a Pămîntului în care se află corabia se mişcă în realitate spre răsărit cu o viteză de 10 010 părţi, în timp ce corabia este purtată de pînze şi vînt spre apus cu viteză de 10 părţi, iar corăbierul se plimbă în corabie spre răsărit cu o parte a vitezei menţionate: atunci corăbierul se va mişca în mod real şi absolut în spaţiul imobil cu viteza de 10001 părţi spre răsărit, şi faţă de Pămînt spre apus cu 9 părţi a vitezei.

Timpul absolut se deosebeşte de cel relativ în astronomie prin ecuaţia timpului obişnuit. Căci, zilele naturale, care de obicei se consideră ca egale

în măsurarea timpului sînt neegale. Astronomii corectează această neegalitate pentru a măsura mișcările cerești cu un timp mai aproape de adevăr. Este posibil să nu existe nici o mișcare egalabilă, prin care să se măsoare precis timpul. Toate mișcările pot fi accelerate și întîrziate dar fluxul timpului absolut nu poate fi schimbat. Durata sau perseverența existenței lucrurilor este aceeași, fie că mișcările sînt repezi sau încete sau nule. Prin urmare, cu drept cuvînt se distinge aceasta de măsurile sale sensibile și se evaluează din ele prin ecuația astronomică. Necesitatea acestei ecuații pentru determinarea fenomenelor se evidențiază atît cu ajutorul experienței orologiului oscilator, cît și prin eclipsele sateliților lui Jupiter.

După cum ordinea părților timpului este imutabilă, tot așa este și ordinea părților spațiului. Dacă acestea ar fi mișcate din locul lor aceasta ar însemna (ca să zicem așa) că ele s-ar îndepărta de sine înșile. Căci timpurile și spațiile sînt ca și cînd ar fi locurile lor înșile și ale tuturor lucrurilor. Toate se află în timp în ceea ce privește ordinea de succesiune, în spațiu în ce privește ordinea așezării. Esența lor este că sînt locuri și este absurd să se miște locurile primare. Prin urmare acestea sînt locuri absolute și numai translațiile din aceste locuri sînt mișcări absolute.

Dar fiindcă aceste părți ale spațiului nu se pot nici vedea nici distinge unele de altele cu ajutorul simțurilor noastre, în locul lor considerăm măsuri sensibile. Căci din pozițiile și distanțele lucrurilor de la un corp oarecare pe care-l considerăm imobil, definim toate locurile: apoi apreciem și toate mișcările referindu-le la locurile astfel fixate, întrucît observăm că corpurile se îndepărtează de ele. Astfel, în locul locurilor și mișcărilor absolute ne servim de cele relative; aceasta fără vreo stînjenire a treburilor omenești; în cele filozofice însă trebuie să facem abstracție de simțuri. Căci se poate întîmpla ca nici un corp să nu se afle în repaus adevărat față de care să se refere locurile și mișcările.

Însă repausul și mișcarea absolută și relativă se deosebesc între ele prin proprietățile, cauzele și efectele lor. Proprietatea repausului este că corpurile în repaus adevărat sînt în repaus între ele. Și de aceea deoarece se poate ca un corp oarecare din regiunile stelelor fixe sau cu mult mai departe să fie în repaus absolut, totuși din poziția reciprocă a corpurilor din regiunile noastre nu se poate ști dacă unul din acestea își păstrează sau nu poziția dată față de acel corp îndepărtat; așa că nu se poate defini din situația lor reciprocă starea de repaus adevărat.

O proprietate a mișcării este că părțile care păstrează poziții date față de întreg iau parte la mișcarea întregului. Căci toate părțile corpurilor în rotație tind să se îndepărteze de axa de mișcare, și impulsul corpurilor care înaintează este produs de suma impulsurilor părților componente. Prin urmare corpurile care se află în repaus relativ față de corpurile înconjurătoare participă la mișcările celor înconjurătoare. Și de aceea mișcarea adevărată și absolută nu poate fi determinată prin îndepărtarea dinspre corpurile care totuși par a fi în repaus. Căci corpurile exterioare nu trebuie numai să pară a fi în repaus, ci de fapt trebuie să fie în repaus. Altfel toate corpurile înconjurate în afară de îndepărtarea dinspre corpurile înconjurătoare vor participa și la mișcările adevărate ale corpurilor înconjurătoare; și dacă suprimăm îndepărtarea ele nu sînt în repaus adevărat, ci vor părea numai ca fiind în repaus. Căci cele înconjurătoare sînt față de cele încon-

jurate în acelaşi raport precum este partea exterioară a întregului către cea interioară, sau ca învelişul către sîmbure. Iar dacă învelişul se mişcă se va mişca şi sîmburele ca parte a întregului fără a se îndepărta de vecinătatea învelişului.

O proprietate înrudită cu cea precedentă este că dacă se mişcă un loc, se mişcă orice este aşezat în acel loc; astfel că un corp care se mişcă dinspre un loc mobil, ia parte şi la mişcarea locului său. Prin urmare toate mişcările care se produc dinspre locuri mobile sînt numai părţi ale mişcărilor întregi şi absolute. Şi orice mişcare întreagă se compune din mişcarea corpului din primul său loc, şi din mişcarea acestuia din locul său şi aşa mai departe; pînă ce se ajunge la un loc imobil, ca în exemplul marinarului amintit mai sus. De unde rezultă că mişcările întregi şi absolute nu pot fi determinate decît cu ajutorul locurilor imobile: şi pentru aceea le-am referit mai sus pe acestea la locuri imobile iar pe cele relative la cele mobile. Locuri imobile însă nu există decît toate acelea care din veci în veci păstrează poziţiile reciproce date; deci care rămîn totdeauna nemişcate şi constituie un spaţiu pe care eu îl numesc imobil.

Cauzele prin care se deosebesc între ele mişcările adevărate şi relative sînt forţele imprimate asupra corpurilor pentru a produce mişcarea. Mişcarea adevărată nici nu se naşte nici nu variază decît prin forţele imprimate asupra corpului mişcat însuşi, pe cînd mişcarea relativă se poate produce şi schimba fără forţe imprimate asupra acestui corp. Căci este deajuns să se imprime numai asupra altor corpuri cu care corpul este în relaţie pentru ca acestea cedînd lor, să se schimbe acea relaţie care determină repausul sau mişcarea relativă a corpului. Invers, mişcarea adevărată este schimbată totdeauna de forţele imprimate asupra corpului mişcat: pe cînd mişcarea relativă nu este în mod necesar schimbată de aceste forţe. Căci dacă aceleaşi forţe se aplică şi asupra altor corpuri cu care este în relaţie în aşa fel ca situaţia relativă să se păstreze, relaţia care determină mişcarea relativă se va păstra. Prin urmare orice mişcare relativă se poate schimba cînd cea adevărată se păstrează invariabilă şi se poate păstra, cînd cea adevărată se schimbă, şi de aceea mişcarea adevărată nu este determinată în nici un chip de relaţii de această natură.

Efectele prin care se deosebesc între ele mişcările absolute şi relative sînt forţele cu care corpurile tind să se îndepărteze de la axa mişcării circulare. În adevăr, în mişcarea circulară pur relativă aceste forţe sînt nule, însă în mişcarea circulară adevărată şi absolută ele sînt mai mari sau mai mici după cantitatea de mişcare. Dacă se atîrnă un vas de un fir lung şi se învîrteşte incontinuu pînă ce firul devine rigid din cauza sucirii, apoi se umple cu apă şi se aduce în stare de repaus împreună cu apa, atunci dacă printr-o forţă instantanee oarecare se pune în mişcare circulară de sens contrar şi firul desrăsucindu-se, vasul perseverează mai mult timp în această mişcare, suprafaţa apei la început va fi plană ca şi înainte de mişcarea vasului. Dar după aceea vasul imprimînd forţa încetul cu încetul apei, face ca şi aceasta să înceapă a se roti; ea se îndepărtează pe încetul de centru şi se ridică pe pereţii vasului luînd o formă concavă (după cum am experimentat eu însumi) şi mişcarea devenind tot mai rapidă, se ridică din ce în ce mai mult pînă ce, rotaţiile efectuîndu-se în intervale egale cu ale vasului, apa ajunge în repaus relativ faţă de el Această ridicare indică ten-

dinţa de îndepărtare de la axa de mişcare şi printr-o atare tendinţă se cunoaşte şi se măsoară mişcarea circulară adevărată şi absolută a apei, aici cu totul contrară celei relative. La început cînd mişcarea relativă a apei faţă de vas era maximă, această mişcare nu provoca nici o tendinţă de îndepărtare de axă. Apa nu căuta periferia ridicîndu-se pe pereţii vasului, ci rămînea plană, şi de aceea mişcarea ei circulară adevărată nu începuse încă. Dar după aceea, cînd mişcarea relativă a apei descreştea, ridicarea ei pe pereţii vasului indica tendinţa de îndepărtare de axă, şi această tendinţă arăta mişcarea circulară adevărată incontinuu crescătoare a apei, şi în sfîrşit atingerea maximului cînd apa se afla în repaus absolut faţă de vas. Aşadar această tendinţă nu depinde de deplasarea apei faţă de corpurile înconjurătoare, şi pentru aceea mişcarea circulară adevărată nu poate fi determinată prin astfel de deplasări. Mişcarea circulară adevărată a unui corp oarecare în rotaţie este unică corespunzînd unei sforţări unice ca unui efect propriu şi potrivit. Iar mişcările relative, din cauza relaţiilor variate faţă de corpurile externe, sînt nenumărate, şi după chipul relaţiilor sînt cu totul lipsite de efecte reale afară doar dacă iau parte la mişcarea adevărată şi unică. De aceea şi în sistemul acelora care vor ca cerurile noastre să se rotească dincoace de cerurile stelelor fixe ducînd cu ele planetele, părţile constitutive ale cerurilor şi planetele care se află în repaus relativ faţă de cerurile lor cele mai apropiate efectuează o mişcare adevărată. Căci ele îşi schimbă poziţiile reciproce (altfel de cum se întîmplă cu cele care se află în repaus adevărat) şi antrenate împreună cu cerurile iau parte la mişcările lor şi ca părţi ale unui tot rotitor tind să se îndeparteze de axelor lor.

Aşadar cantităţile relative nu sînt cantităţile înseşi al căror nume îl poartă, ci sînt acele măsuri sensibile ale lor (adevărate sau greşite) care se folosesc îndeobşte în locul cantităţilor măsurate. Dar dacă semnificaţiile cuvintelor se definesc prin întrebuinţarea ce li se dă, atunci prin numirile de timp, spaţiu, loc şi mişcare, trebuie să se înţeleagă propriu-zis aceste măsuri sensibile; iar limbajul va fi neobişnuit şi pur matematic dacă aici se înţeleg cantităţile măsurate. Prin urmare deformează înţelesul textului consacrat aceia care interpretează acolo aceste numiri drept cantităţi măsurate. La fel, ating puritatea matematicii şi filozofiei aceia care confundă cantităţile adevărate cu relaţiile dintre ele şi măsurile lor obişnuite.

De fapt este foarte greu să se cunoască mişcările adevărate ale diverselor corpuri şi să se distingă în mod efectiv de cele aparente; fiindcă părţile acelui spaţiu imobil, în care corpurile se mişcă în realitate, nu cad sub simţurile noastre. Totuşi cauza nu este lipsită de orice speranţă. Căci se pot obţine indicaţii fie din mişcările aparente care sînt diferenţele mişcărilor adevărate, fie din forţele care sînt cauzele şi efectele mişcărilor adevărate. Astfel, dacă două sfere, legate prin intermediul unui fir la o distanţă dată una de cealaltă se rotesc în jurul centrului lor de gravitate, din tensiunea firului se poate afla tendinţa sferelor de a se îndepărta de axa de mişcare şi din aceasta se poate calcula cantitatea de mişcare circulară. Apoi dacă se imprimă simultan oarecare forţe egale pe feţele alterne ale sferelor pentru a mări sau micşora simultan mişcarea circulară,atunci din tensiunea mărită sau micşorată a firului se poate cunoaşte creşterea sau descreşterea mişcării, şi în sfîrşit se pot determina feţele sferelor asupra cărora trebuie să se imprime forţele pentru ca mişcarea să crească cel mai mult, adică părţile poste-

rioare, sau acelea care urmează mișcării. Dar dacă se cunosc fețele care urmează precum și fețele opuse care preced mișcarea, se va cunoaște și determinarea mișcării. In acest fel se pot afla atît cantitatea cît și determinarea acestei mișcări circulare în orice vid imens unde nu ar exista nimic extern și perceptibil cu care sferele să se poată compara. Dacă acum în acel spațiu s-ar așeza oarecare corpuri foarte îndepărtate păstrînd unul față de altul o poziție dată, cum sînt stelele fixe în regiunile cerești; atunci din deplasarea relativă a sferelor printre corpuri nu se poate ști dacă mișcarea trebuie atribuită acestora sau acelora. Dacă însă cercetăm firul și aflăm că tensiunea lui este chiar aceea pe care o cere mișcarea sferelor, se poate conchide că mișcarea aparține sferelor iar corpurile sînt în repaus; și atunci în sfîrșit din deplasarea sferelor printre corpuri se poate afla determinarea acestei mișcări. Insă cum trebuie să se obțină mișcările adevărate din cauzele, efectele și deosebirile lor aparente, și invers, cauzele și efectele lor din mișcările lor fie adevărate fie aparente, se va arăta mai pe larg în cele ce urmează. Fiindcă în acest scop am compus tratatul de față.

AXIOMELE SAU LEGILE MIŞCĂRII

LEGEA I

Orice corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare uniformă în linie dreaptă, dacă nu este constrîns de forţe imprimate să-şi schimbe starea.

Proiectilele persevereazä în mişcările lor atîta timp cît nu sînt întîrziate de rezistenţa aerului şi împinse în jos de forţa gravitaţională. O sfîrlează ale cărei părţi se îndepărtează incontinuu din cauza coeziunii de la mişcările rectilinii, nu încetează să se rotească dacă nu este întîrziată de aer. Insă corpurile mai mari ale planetelor şi cometelor păstrează timp mai îndelungat mişcările lor progresive şi circulare efectuate în spaţii mai puţin rezistente.

LEGEA II

Variaţia mişcării este proporţională cu forţa motoare imprimată şi este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forţa.

Dacă o forţă oarecare produce o anumită mişcare, una dublă va produce una dublă, una triplă — una triplă, fie că se imprimă laolaltă şi de o dată, fie treptat şi succesiv. Şi această mişcare (fiindcă este determinată totdeauna de aceeaşi parte a forţei generatoare) dacă corpul se află deja în mişcare, sau se adună la mişcarea lui dacă au aceeaşi direcţie sau se scade din cealaltă de direcţie contrară, sau dacă acţionează oblic, se adumă oblic şi se compune cu ea după determinările amîndorora.

LEGEA III

Reacţiunea este totdeauna contrară şi egală cu acţiunea: sau, acţiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale şi dirijate în sensuri contrarii.

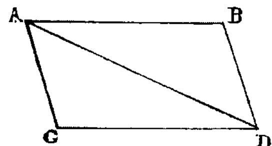
Ceea ce apasă sau trage altceva, este apăsat sau tras cu aceeaşi putere de acel ceva. Dacă cineva apasă o piatră cu degetul, degetul lui de asemenea este apăsat de piatră. Dacă un cal trage o piatră legată cu o funie, calul (ca să zic aşa) de asemenea este tras în mod egal de piatră. Căci funia întinsă de ambele părţi, făcînd sforţări egale de destindere, va trage calul spre piatră şi piatra spre cal: şi împiedică tot atît progresul unuia, cît pro-

movează pe al celuilalt. Dacă un corp oarecare ciocnind un alt corp va schimba prin forţa sa într-un mod oarecare, mişcarea aceluia, el însuşi va suferi de asemenea în mişcarea proprie aceeaşi schimbare în sens contrar prin forţa celuilalt (din cauza egalităţii presiunii reciproce). Cu aceste acţiuni devin egale variaţiile, nu ale vitezelor, ci ale mişcărilor; adică în corpurile care nu sînt altfel împiedicate. Căci variaţiile vitezelor care au loc în sensuri contrarii sînt invers proporţionale cu corpurile, fiindcă mişcările variază în mod egal. Această lege este valabilă şi în cazul atracţiilor, după cum se va arăta în scolia ce urmează.

COROLARUL I

Un corp sub acţiunea a două forţe unite descrie diagonala unui paralelogram în acelaşi timp, în care ar descrie laturile sub acţiunile separate ale forţelor.

Dacă corpul într-un timp dat sub acţiunea singurei forţe *M* aplicată în locul *A* este purtat cu o mişcare uniformă de la *A* la *B*; şi sub acţiunea numai a forţei *N* aplicată în acelaşi loc este purtat de la *A* la *C*: să se completeze paralelogramul *ABCD*, şi sub acţiunea comună a forţelor, acel corp va fi purtat în acelaşi timp pe diagonală de la *A* la *D*. Căci fiindcă forţa *N* lucrează de-a lungul liniei *AC* paralelă cu *BD*, această forţă potrivit legii II nu va schimba de loc viteza de apropiere de linia *BD* născută de cealaltă forţă. Aşadar corpul ajunge la linia *BD* în acelaşi timp fie că se imprimă, fie că nu se imprimă forţa *N*, şi astfel la sfîrşitul acelui timp va fi reperat undeva pe linia *BD*. Din acelaşi motiv la sfîrşitul aceluiaşi timp va fi reperat undeva pe linia *CD* şi deci este necesar să se găsească la întîlnirea *D* a celor două linii. Însă parcurge drumul de la *A* la *D* cu o mişcare rectilinie, potrivit legii I.

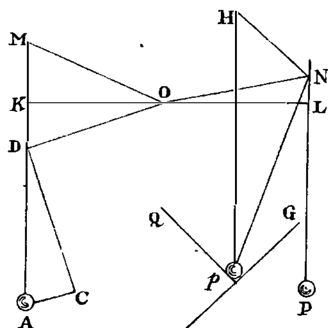


COROLARUL II

Şi de aici se evidenţiază compunerea forţei directe AD din forţele oblice oarecare AB şi BD: şi invers descompunerea unei forţe directe oarecare AD în forţele oblice oarecare AB şi BD. Această compunere şi descompunere se confirmă abundent în mecanică.

Astfel dacă razele neegale *OM*, *ON*, pornind din centrul *O* al unei roţi susţin prin mijlocirea firelor *MA*, *NP* greutăţile *A* şi *P*, şi se caută forţele greutăţilor necesare ca să mişte roata: Prin centrul *O* să se ducă dreapta *KOL* întîlnind perpendicular firele în *K* şi *L*, şi din centrul *O* cu *OL* cea mai mare dintre distanţele *OK*, *OL* să se descrie un cerc ce întîlneşte firul *MA* în *D* şi fie *AC* paralelă iar *DC* perpendiculară pe dreapta dusă *OD*. Deoarece este indiferent dacă punctele *K*, *L*, *D* ale firelor sînt fixate sau nu pe planul roţii, greutăţile vor avea aceeaşi valoare dacă sînt atîrnate la punctele *K* şi *L* sau *D* şi *L*. Să reprezentăm forţa totală a greutăţii *A* prin linia *AD* şi să o descompunem în forţele *AC*, *CD* dintre care *AC*

trăgînd raza OD direct de la centru nu are nici un efect asupra mișcării roții; pe cînd cealaltă forță DC trăgînd raza DO perpendicular are același efect ca și cînd ar trage perpendicular pe raza OL egală cu OD; adică aceeași valoare ca și greutatea P, dacă această greutate se raportă către greutatea A după cum forța DC către forța DA, adică (din cauza asemănării triunghiurilor ADC, DOK) după cum OK către OD sau OL. Prin urmare, greutățile A și P care sînt invers proporționale cu razele OK, OL situate pe aceeași dreaptă vor avea același efect și astfel rămîn în echilibru: ceea ce este proprietatea foarte cunoscută a balanței, a pîrghiei și a axei macaralei. Dacă însă una din greutăți este mai mare decît în acest raport, cu atît mai mare va fi forța ei pentru mișcarea roții.



Dacă greutatea p egală cu greutatea P parte este suspendată de firul Np, parte se sprijină pe planul înclinat pG, să se ducă pH, NH, cea dintîi perpendiculară pe orizont, cea din urmă pe planul pG; și dacă se reprezintă prin linia pH forța greutății p îndreptată în jos, aceasta se poate descompune în forțele pN, HN. Dacă pe firul pN este perpendicular un plan oarecare pQ intersectînd un alt plan pG după o linie paralelă cu orizontul: și dacă greutatea p se sprijină numai pe aceste plane pQ, pG, ea ar apăsa asupra acestor plane cu forțele perpendiculare pN, NH, anume asupra planului pQ cu forța pN și asupra planului pG cu forța HN. Astfel că dacă se îndepărtează pQ așa încît greutatea să întindă firul, deoarece greutatea care întinde firul înlocuiește planul îndepărtat, ea îl întinde cu aceeași forță pN cu care aceasta apăsa mai înainte planul. De unde tensiunea acestui fir oblic va fi către tensiunea celuilalt fir perpendicular PN, precum pN către pH. De aceea dacă greutatea p se află către greutatea A într-un raport care se compune din raportul invers al distanțelor minime ale firelor sale pN, AM de la centrul roții și din raportul direct pH către pN, greutățile vor avea același efect asupra mișcării roții și deci se vor susține reciproc, după cum poate oricine experimenta.

Dar greutatea p sprijinindu-se pe cele două plane oblice se află în situația unei pene înfipte între fețele interne ale corpului despicat: și deci forțele penei și ciocanului sînt cunoscute. Deoarece după cum forța cu care greutatea p apasă asupra planului pQ, este către forța cu care ea fie prin greutatea sa, fie prin lovitura ciocanului este împinsă spre plane după linia pH, tot așa pN către pH: și către forța care apasă asupra celuilalt plan pG, după cum pN către NH. Dar și forța șurubului se află printr-o descompunere analogă a forțelor: deoarece aceasta este o pană împinsă de o pîrghie. Așadar aplicarea acestui colorar se întinde foarte departe și întinzîndu-se departe se confirmă și se arată veracitatea lui, fiindcă toată mecanica atît de variat demonstrată de autori, depinde de cele deja spuse. Căci din acestea se deduc ușor forțele mașinilor care de obicei se compun din roți, tobe, scripeți, pîrghii, funii întinse și greutăți ridicîndu-se direct sau oblic și din celelalte puteri mecanice, ca forțele tendoanelor pentru a mișca oasele animalelor.

COROLARUL III

Cantitatea de mişcare ce se obţine luînd suma mişcărilor dirijate în aceeaşi parte şi diferenţa celor dirijate în părţi contrarii nu se schimbă sub acţiunea corpurilor între ele.

În adevăr acţiunea şi reacţiunea contrară ei sînt egale potrivit legii III, şi de aceea după legea II ele produc în mişcări schimbări egale în părţi contrarii. Prin urmare dacă mişcările au loc de aceeaşi parte, tot ceea ce se adună la mişcarea corpului ce înaintează se scade din mişcarea celui ce-i urmează în aşa fel că suma să rămînă aceeaşi ca mai înainte. Dacă corpurile se întîlnesc în sens contrar; scăderea din mişcarea fiecăruia va fi egală şi de aceea diferenţa mişcărilor dirijate în părţi contrarii va rămîne aceeaşi.

Astfel dacă corpul sferic *A* este de trei ori mai mare decît corpul sferic *B*, şi are două părţi de viteză; şi *B* îi urmează pe aceeaşi dreaptă cu zece părţi de viteză, astfel că mişcarea lui *A* este către cea a lui *B* precum şase către zece: să presupunem că mişcările lor se iau egale cu şase părţi şi zece părţi şi suma va fi de şasesprezece părţi. Aşadar cînd la întîlnirea corpurilor, dacă corpul *A* cîştigă trei, patru sau cinci părţi de mişcare, corpul *B* va pierde tot atîtea părţi, astfel că corpul *A* după reflexie continuă cu nouă, zece sau unsprezece părţi, iar *B* cu şapte, şase sau cinci părţi, suma părţilor menţinîndu-se totdeauna şasesprezece ca mai înainte. Dacă corpul *A* cîştigă nouă, zece, unsprezece sau douăsprezece părţi, astfel că după întîlnire continuă drumul cu cincisprezece, şasesprezece, şaptesprezece sau optsprezece părţi; corpul *B*, pierzînd tot atîtea părţi cîte cîştigă *A*, sau va înainta cu o parte pierzînd nouă părţi sau va rămîne nemişcat pierzînd zece părţi din mişcarea sa progresivă, sau va merge înapoi cu o parte pierzîndu-şi mişcarea şi (ca să zic aşa) o parte în plus, sau va merge înapoi cu două părţi din cauza pierderii a douăsprezece părţi din mişcarea progresivă. Şi astfel sumele mişcărilor de acelaşi sens $15 + 1$ sau $16 + 0$, şi diferenţele celor contrare $17 - 1$ şi $18 - 2$ vor fi totdeauna de şasesprezece părţi, întocmai ca înainte de ciocnire şi reflexie. Dar cunoscute fiind mişcările cu care corpurile înaintează după reflexie, se poate afla viteza fiecăruia, presupunînd că ea este către viteza dinainte de reflexie, aşa cum mişcarea după ciocnire este către mişcarea dinainte de ciocnire. Astfel în cazul din urmă, cînd mişcarea corpului *A* era de şase părţi înainte de reflexie şi optsprezece părţi după aceea, şi viteza dinainte de reflexie de două părţi; viteza lui de şase părţi după reflexie se va afla zicînd, că după cum şase părţi de mişcare dinainte de reflexie către optsprezece părţi de mişcare de după aceea, tot aşa două părţi de viteză dinainte de reflexie către şase părţi de viteză de după aceea.

Dar dacă corpurile sau nu sînt sferice, sau mişcîndu-se pe drepte diferite se întîlnesc în mod oblic, şi se caută mişcările lor de după reflexie; trebuie să se cunoască poziţia planului care atinge corpurile ce se ciocnesc în punctul de contact: apoi mişcarea fiecărui corp (potrivit corolarului II) trebuie să se împartă în două, una perpendiculară pe acest plan, cealaltă paralelă cu el: mişcările paralele însă, din cauză că corpurile acţionează unul asupra altuia după dreapta perpendiculară pe acest plan, trebuie să rămînă aceleaşi după reflexie ca şi înainte; şi variaţiile mişcărilor perpendi-

culare trebuie considerate egale în părţi contrarii, astfel ca suma celor de acelaşi sens şi diferenţa celor de sens contrar să rămînă aceleaşi ca mai înainte. Din reflexiile de acest fel de obicei iau naştere mişcările circulare ale corpurilor în jurul centrelor proprii. În cele ce urmează însă nu consider aceste cazuri, şi ar fi prea lung să demonstrez tot ce se referă la acesta.

COROLARUL IV

Centrul comun de greutate a două sau mai multe corpuri sub acţiunile corpurilor între ele nu-şi schimbă starea fie de mişcare fie de repaus; şi de aceea centrul de greutate al tuturor corpurilor care se acţionează reciproc (excluzîndu-se acţiunile şi piedicele externe) sau se află în repaus sau se mişcă cu o mişcare uniformă în linie dreaptă.

Căci, dacă două puncte progresează cu o mişcare uniformă în linii drepte, şi distanţa lor se împarte după un raport dat, punctul de diviziune sau rămîne în repaus sau progresează uniform în linie dreaptă. Aceasta se demonstrează mai tîrziu în lema XXIII şi corolarul ei, dacă mişcarea punctelor are loc în acelaşi plan; şi în acelaşi fel se poate demonstra dacă mişcările nu au loc în acelaşi plan. Prin urmare dacă oricîte corpuri se mişcă în mod uniform pe linii drepte, centrul comun de greutate al oricăror două, sau rămîne în repaus sau înaintează uniform pe linie dreaptă; fiindcă linia, ce uneşte centrele acestor corpuri care înaintează pe drepte în mod uniform, se împarte de acest centru comun după un raport dat. În mod analog şi centrul comun al acestor două şi al unui al treilea oarecare sau rămîne în repaus sau înaintează în mod uniform pe o linie dreaptă; fiindcă el împarte distanţa dintre centrul comun al celor două corpuri şi centrul corpului al treilea după un raport dat. În acelaşi fel şi centrul comun al acestor trei şi al unui al patrulea oarecare sau rămîne în repaus sau înaintează uniform pe o linie dreaptă; fiindcă el împarte distanţa dintre centrul comun al celor trei şi centrul celui de al patrulea într-un raport dat, şi aşa pînă la infinit. Aşadar într-un sistem de corpuri care sînt lipsite atît de acţiuni reciproce cît şi de orice acţiuni exterioare aplicate asupra sa, astfel că fiecare se mişcă în mod uniform pe diverse drepte, centrul comun de greutate al tuturora sau rămîne în repaus sau se mişcă uniform în linie dreaptă.

Apoi, într-un sistem de două corpuri ce se acţionează reciproc, deoarece distanţele de la fiecare dintre centre la centrul comun de greutate sînt invers proporţionale cu corpurile; mişcările relative ale acelor corpuri, fie de apropiere fie de îndepărtare de la el, vor fi egale între ele. De aceea schimbările egale ale mişcărilor care au loc în părţi contrarii sau acţiunile reciproce ale acestor corpuri nu vor putea nici accelera nici întîrzia sau schimba starea de mişcare sau de repaus a acestui centru de greutate. Dar într-un sistem de mai multe corpuri, fiindcă centrul comun de greutate a oricăror două care se acţionează reciproc nu-şi schimbă de loc starea din cauza acelei acţiuni; şi centrul comun de greutate al celorlalte asupra cărora acea acţiune nu se extinde, nu suferă nici o influenţă din partea lor; iar distanţa dintre aceste două centre se împarte de către centrul comun al tuturor corpurilor în părţi care sînt invers proporţionale cu sumele corpurilor cărora aparţin

centrele de greutate; astfel că cele două centre menţinîndu-şi starea de mişcare sau de repaus, centrul comun al tuturora de asemenea îşi va păstra starea: este evident că centrul comun al tuturora nu-şi schimbă niciodată starea de mişcare sau de repaus din cauza acţiunilor reciproce a cîte două corpuri. Dar într-un atare sistem toate acţiunile corpurilor sau au loc între ele două cîte două sau se compun din acţiunile reciproce luate două cîte două; şi de aceea ele nu produc niciodată vre-o schimbare în starea de mişcare sau de repaus a centrului comun al tuturora. De aceea, fiindcă acel centru, cînd corpurile nu se acţionează reciproc, sau este în stare de repaus sau înaintează pe o dreaptă oarecare în mod uniform; el îşi menţine starea deşi corpurile se acţionează reciproc, adică sau va rămîne totdeauna nemişcat sau se va mişca rectiliniu şi uniform; afară doar dacă nu-i turburat din această stare de către forţe externe imprimate sistemului. Aşadar în ceea ce priveşte persistenţa în starea de mişcare sau de repaus legea unui sistem de mai multe corpuri este tot una cu aceea a unui singur corp. Căci mişcarea progresivă fie a unui singur corp fie a unui sistem de corpuri trebuie evaluată totdeauna din mişcarea centrului de greutate.

COROLARUL V

Mişcările corpurilor închise într-un spaţiu dat sînt aceleaşi între ele, fie că acel spaţiu se află în repaus fie că el se mişcă rectiliniu şi uniform fără mişcare circulară.

În adevăr, diferenţele mişcărilor tinzînd spre aceeaşi parte şi sumele celor ce tind spre părţi contrare sînt, la început aceleaşi în amîndouă cazurile (prin ipoteză) şi din aceste sume sau diferenţe iau naştere întîlnirile şi percusiunile, cu care corpurile lucrează unul asupra altuia. Aşadar conform legii II efectele întîlnirilor în ambele cazuri vor fi egale; şi de aceea mişcările între ele într-un caz vor rămîne egale cu mişcările între ele din celălalt caz. Aceasta se demonstrează printr-o experienţă clară. Într-o corabie toate mişcările se întîmplă la fel, fie că ea este în stare de repaus fie că se mişcă uniform în linie dreaptă.

COROLARUL VI

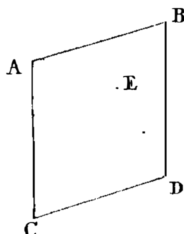
Dacă corpurile se mişcă între ele într-un fel oarecare şi dacă sînt acţionate de forţe acceleratoare egale după linii paralele; toate continuă a se mişca între ele în acelaşi fel ca şi cînd nu ar fi acţionate de acele forţe.

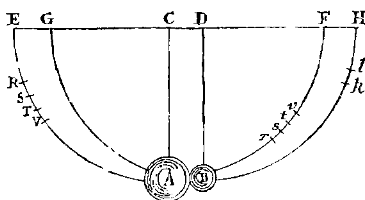
Căci forţele acţionînd în mod egal (în raport cu cantităţile corpurilor ce urmează a se mişca) şi după linii paralele, vor mişca în mod egal toate corpurile (în ce priveşte viteza) după legea II, astfel că ele nu vor schimba niciodată nici poziţiile nici mişcările lor între ele.

SCOLIE

Pînă aici am redat principiile acceptate de matematicieni şi confirmate de experienţe multiple. Prin primele două legi şi primele două corolare, Galileu a găsit căderea corpurilor grele proporţională cu pătratul tim-

pului și mișcarea proiectilelor pe o parabolă; ceea ce confirmă experiența dacă acele mișcări nu ar fi întru cîtva întîrziate de rezistența aerului. Cînd un corp cade, gravitatea uniformă acționînd la intervale de timp egale în mod egal imprimă acelui corp forțe egale și produce viteze egale: iar în intervalul întreg de timp imprimă forța întreagă și produce viteza întreagă proporțională cu timpul. Și spațiile descrise în timpuri proporționale, sînt precum vitezele și timpurile luate împreună; adică proporționale cu pătratele timpurilor. Și aruncînd un corp în sus gravitatea uniformă îi imprimă forțe și îi răpește viteze proporționale cu timpurile: și timpurile de urcare până la înălțimile maxime sînt ca vitezele ce urmează a fi nimicite, iar înălțimile sînt precum vitezele și timpurile luate împreună, adică proporționale cu pătratele vitezelor. Și mișcarea unui corp, aruncat în direcția unei drepte, provenită din aruncare se compune cu mișcarea cauzată de gravitate. Atunci dacă corpul *A* numai prin mișcarea aruncării poate descrie într-un timp dat dreapta *AB* și numai prin mișcarea căderii în același timp poate descrie înălțimea *AC*: să se completeze paralelogramul *ABCD*, și corpul prin compunerea mișcărilor se va afla la sfîrșitul timpului în locul *D*; și linia curbă *AED*, pe care o descrie acel corp, va fi o parabolă pe care dreapta *AB* o atinge în *A* și a cărei ordonată *BD* este ca AB^2. De aceleași legi și corolarii depind demonstrațiile asupra timpurilor de oscilație ale pendulelor, ajutate de experiența zilnică a orologiilor. Din aceleași și din legea III cavalerul Christophr Wren, John Wallis și Christian Huygens, fără îndoială cei mai de seamă geometri ai epocei imediat trecute, au aflat independent unul de altul, regulile ciocnirii și ale reflexiei corpurilor dure, și le-au comunicat aproape în același timp Societății Regale, fiind cu totul de acord (în ceea ce privește aceste legi): și în adevăr le-a comunicat mai întîi Wallis apoi Wren și Huygens. Dar Wren a confirmat adevărul înaintea Societății Regale printr-o experiență asupra pendulelor: pe care și vestitul Mariotte a considerat-o vrednică de a fi expusă într-o întreagă carte. În adevăr pentru ca această experiență să fie de perfect acord cu teoriile, trebuie să se țină seamă atît de rezistența aerului cît și de forța elastică a corpurilor ce se întîlnesc. Să atîrnăm corpurile sferice *A*, *B* atîrnate de firele paralele și egale *AC*, *BD* de centrele *C*, *D*. Din aceste centre și cu aceste intervale să descriem semicercurile *EAF*, *GBH* împărțite în cîte două părți egale prin razele *CA*, *DB*. Să ducem corpul *A* la un punct oarecare *R* al arcului *EAF*, și îndepărtînd corpul *B* să-l lăsăm apoi liber, și după o oscilație să presupunem că se întoarce în punctul *V*. *RV* este întîrzierea datorită rezistenței aerului. Din acest *RV* fie *ST* a patra parte situată în mijloc, anume în așa fel ca *RS* și *TV* să fie egale, și fie *RS* către *ST* ca 3 la 2. *ST* va exprima în mod foarte apropiat întîrzierea în căderea de la *S* la *A*. Să readucem corpul *B* în locul său. Să presupunem





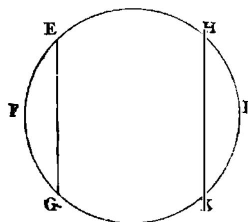
că corpul *A* cade din punctul *S*, atunci viteza lui în punctul de reflexie *A* va fi fără eroare sensibilă, aceeași ca și cînd ar cădea în vid din locul *T*. Prin urmare această viteză poate fi reprezentată prin coarda arcului *TA*. Căci o propoziție foarte cunoscută geometrilor este că viteza pendulului în punctul cel mai de jos este precum coarda arcului descris în cădere. După reflexie să presupunem că corpul *A* ajunge în locul *s*, și corpul *B* în locul *k*. Să îndepărtăm corpul *B* și să determinăm locul *v*; din care dacă lăsăm liber corpul *A* și după o oscilație el revine în locul *r*, fie *st* a patra parte a lui *rv* situată în mijloc, anume în așa fel ca *rs* și *tv* să fie egale; și prin coarda arcului *tA* să exprimăm viteza pe care a avut-o corpul *A* imediat după reflecție în locul *A*. Căci *t* va fi locul adevărat și corect, în care ar trebui să se ridice corpul *A* dacă se înlătură rezistența aerului. Printr-o metodă analogă va trebui corectat locul *k* la care se ridică corpul *B*, determinîndu-se locul *l* în care acel corp ar trebui să se ridice în vid. În acest mod pot fi experimentate toate ca și cînd am fi în vid. În sfîrșit, pentru a obține mișcarea corpului *A* în locul *A* imediat înaintea reflexiei, va trebui să luăm produsul corpului *A* (ca să zic așa) prin coarda arcului *TA*, care exprimă viteza lui, pentru a obține mișcarea lui în locul *A* imediat înaintea reflexiei; apoi prin coarda arcului *tA* pentru a obține mișcarea lui în locul imediat după reflexie. Și așa corpul *B* va trebui înmulțit cu coarda arcului *Bl* pentru a obține mișcarea lui imediat după reflexie. Și printr-o metodă analogă, dacă două corpuri sînt lăsate liber din locuri diferite trebuie să aflăm mișcările ambelor atît înainte cît și după reflexie; și apoi trebuie comparate mișcările între ele și determinate efectele reflexiei. În acest fel încercînd experiența cu pendule de 10 picioare, și aceasta cu corpuri atît de neegale cît și egale, și făcînd ca corpurile să se întîlnească de la distanțe foarte mari de 8, 12 sau 16 picioare; am aflat totdeauna fără eroare mai mare de trei degete cînd corpurile se întîlneau direct, că variațiile mișcărilor corpurilor efectuate în părți contrarii sînt egale, și că astfel acțiunea și reacțiunea sînt întotdeauna egale. Așadar, dacă corpul *A* cădea asupra corpului *B* aflător în repaus cu 9 părți de mișcare și pierzînd 7 părți, după reflexie își continuă drumul cu 2, corpul *B* sărea înapoi avînd 7 părți. Dacă corpurile se întîlneau cu mișcări contrarii, *A* cu 12 părți și *B* cu 6, și *A* se întorcea cu 2; *B* se întorcea cu 8, amîndouă corpurile pierzînd 14 părți. Dacă din mișcarea lui *A* se scad 12 părți nu va mai rămîne nimic: dacă se mai scad alte 2 părți, atunci mișcarea va fi cu 2 părți în sens contrar: și astfel din mișcarea corpului *B* de 6 părți, scăzînd 14 părți vor rămîne 8 părți în sens contrar. Dar dacă corpurile se mișcau în același sens, *A* mai repede cu 14 părți iar *B* mai încet cu 5 părți și după reflexie *A* își urma drumul cu 5 părți, atunci *B* se mișca cu 14, realizînd o trecere de 9 părți de la *A* la *B*. La fel în celelalte cazuri. Cantitatea de mișcare nu se schimbă niciodată prin întîlnirea și ciocnirea corpurilor, după cum se constata făcînd suma mișcărilor de același sens și diferența celor de sens contrar. Căci erorile de măsură de unul sau două degete le atribuiam dificultății de a măsura precis. Era greu atît de a lăsa libere deodată pendulele, astfel ca corpurile să se întîlnească în poziția cea mai de jos *AB*, cît si de a nota locurile *s*, *k* la care se urcau corpurile după ciocnire. Dar mai produceau erori în înseși corpurile pendulelor densitatea neegală a părților și compoziția neregulată datorită altor cauze.

Apoi, pentru ca să nu se aducă obiecţia că regula, pentru a cărei demonstraţie s-a imaginat această experienţă, presupune că corpurile sînt sau absolut dure sau cel puţin perfect elastice, gen de corpuri care nu există în natură; adaug că experienţele descrise mai sus se fac atît cu corpuri moi cît şi cu corpuri dure, deci nedepinzînd de loc de condiţia de duritate. Căci dacă regula trebuie încercată în cazul corpurilor care nu sînt perfect dure, va trebui numai să se micşoreze reflexia într-o anumită proporţie, cerută de cantitatea forţei elastice. În teoria lui W r e n şi H u y g e n s corpurile absolut dure se îndepărtează unul de altul cu viteza de întîlnire. Aceasta se va putea afirma cu mai multă siguranţă în cazul corpurilor elastice. La corpurile mai puţin elastice viteza de întoarcere trebuie micşorată deodată cu forţa elastică; fiindcă acea forţă (afară de cazul cînd părţile corpului sînt deteriorate din cauza ciocnirii, sau cînd suferă o dilatare ca sub ciocan) este sigură şi determinată (cît pot eu observa) şi face ca corpurile să se depărteze unul de celălalt cu o viteză relativă, care se află într-un raport dat cu viteza relativă de întîlnire. Aceasta am încercat-o eu, cu mingi de lînă înfăşurate tare şi bine strînse, astfel: mai întîi lăsînd libere pendulele şi măsurînd reflexia am aflat cantitatea forţei elastice; apoi prin mijlocirea acestei forţe am determinat reflexiile în alte cazuri de întîlniri, şi experienţele corespundeau. Mingile totdeauna se îndepărtau una de alta cu o viteză relativă, care este către viteza relativă a întîlnirii ca aproximativ 5 către 9. Aproape cu aceeaşi viteză se îndepărtau mingile de oţel: altele din plută cu o viteză ceva mai mică; iar pentru cele de sticlă proporţia era aproximativ 15 la 16. Şi în acest fel legea III a fost verificată, în ce priveşte ciocnirile şi reflexiile, printr-o teorie care este în acord perfect cu experienţa.

În cazul atracţiilor demonstrez acest lucru pe scurt în felul următor. Între două corpuri oarecare *A*, *B* care se atrag între ele, să ne închipuim că este pus un obstacol oarecare, prin care întîlnirea lor este împiedicată. Dacă unul din cele două corpuri *A* este atras mai mult spre corpul celălalt *B* decît celălalt *B* către cel dintîi *A*, obstacolul va fi apăsat mai tare de presiunea corpului *A* decît de presiunea corpului *B*; deci el nu va rămîne în echilibru. Va prevala presiunea mai mare şi va face ca sistemul format din cele două corpuri şi obstacol să se mişte rectiliniu spre *B*, cu o mişcare veşnic accelerată şi să îndepărteze în spaţii libere la infinit. Ceeace este absurd şi contrar legii I. Căci conform legii I sistemul va trebui să rămînă în starea sa de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, şi de aceea corpurile vor apăsa obstacolul în mod egal, şi deci se vor atrage reciproc în mod egal. Am încercat aceasta cu un magnet şi o bucată de fier. Dacă acestea fiind puse separat în vase potrivite care se ating, plutesc unul lîngă altul într-o apă stătătoare; niciunul nu va împinge pe celălalt, ci din cauza egalităţii atracţiei de ambele părţi îşi vor susţine reciproc presiunile, şi în sfîrşit ajungînd în echilibru rămîn nemişcate.

Astfel şi gravitatea între Pămînt şi părţile lui este reciprocă. Să tăiem Pămîntul *FI* cu un plan oarecare *EG* în două părţi *EGF* şi *EGI*: atunci greutăţile lor reciproce vor fi egale. Căci dacă tăiem partea mai mare *EGI* printr-un alt plan *HK* paralel cu cel de mai sus în două părţi *EGHK* şi *HKI*, dintre care *HKI* să fie egală cu partea *EFG* tăiată mai sus: este evident că partea mijlocie *EGKH* prin propria sa greutate nu va tinde spre nici una din părţile extreme, ci ca să zic aşa, va pluti în echilibru între

amîndouă şi va fi în repaus. Însă partea extremă *KHI* va apăsa cu întreaga sa greutate asupra părţii mijlocii, şi o va împinge înspre cealaltă parte extremă *EGF*; şi de aceea forţa cu care suma *EGI* a părţilor *HKI* şi *EGHK* tinde spre partea a treia *EGF*, este egală cu greutatea părţii *HKI*, adică cu greutatea părţii a treia *EGF* şi de aceea greutăţile reciproce ale celor două părţi *EGI*, *EGF* sînt egale, după cum am voit să arăt. Şi dacă acele greutăţi nu sînt egale, întreg Pămîntul plutind în eterul liber ar ceda greutăţii mai mari şi fugind de ea s-ar îndepărta la infinit.



După cum la întîlnire şi reflexie acele corpuri sînt echipolente, ale căror viteze sînt în raport invers cu forţele inerente: tot astfel în mişcările instrumentelor mecanice acei agenţi sînt echipolenţi şi se susţin reciproc prin presiuni contrarii, ale căror viteze apreciate prin determinarea forţelor, sînt în raport invers cu forţele. Astfel la mişcările braţelor balanţei acele forţe sînt echipolente, care oscilînd balanţa sînt în raport invers cu vitezele lor în sus şi în jos: adică acele greutăţi sînt echipolente, care dacă se urcă şi se coboară pe o dreaptă, sînt în raport invers cu distanţele punctelor de suspensie de la axa balanţei; dacă se urcă sau se coboară oblic pe plane înclinate sau împiedicate de alte obstacole interpuse, acele greutăţi sînt echipolente care sînt în raport invers cu ridicarea sau coborîrea, socotite pe perpendiculară: şi aceasta din cauza determinării gravităţii în jos. În acelaşi fel la scripete sau la muflă acea forţă a mînii care trage funia în mod direct, va susţine greutatea, care se raportă către greutatea ce se ridică fie direct fie oblic ca viteza perpendiculară de urcare către viteza mînei ce trage funia. La orologii şi instrumente asemănătoare, care sînt construite din roţi mici, forţele contrare de înaintare şi de împiedicare a mişcării se vor susţine reciproc dacă sînt în raport invers cu vitezele părţilor roţilor la care sînt aplicate. Forţa şurubului de comprimare a corpului se raportă către forţa mînei care învîrteşte mînerul, după cum viteza circulară a mînerului în partea în care este acţionată de mînă către viteza progresivă a şurubului înspre corpul comprimat. Forţele cu care pana apasă asupra celor două părţi ale lemnului crăpat se raportă către forţa ciocanului asupra penei de crăpat, după cum înaintarea penei în direcţia forţei imprimate asupra ei de ciocan, către viteza cu care părţile lemnului cedează penei după liniile perpendiculare pe feţele penei. La fel se comportă toate maşinile.

Eficacitatea şi întrebuinţarea lor constă numai în aceea, că micşorînd viteza mărim forţa şi invers: aşa că în toate genurile de instrumente proprii se rezolvă problema, să se pună în mişcare o greutate dată cu ajutorul unei forţe date sau să se învingă o rezistenţă dată printr-o forţă dată. Căci dacă maşinile sînt astfel construite, ca vitezele părţii active şi rezistente să fie invers proporţionale cu forţele, partea activă va susţine partea rezistentă: şi cu o mai mare disparitate a vitezelor o va învinge. Desigur dacă disparitatea vitezelor este atît de mare, încît să fie învinsă şi întreaga rezistenţă care de obicei provine atît din frecarea corpurilor vecine şi alunecînd între ele cît şi din coeziunea celor continue şi care urmează să fie separate unul de altul şi din greutăţile ce urmează a fi ridicate; învinsă fiind întreaga rezis-

tenţă excesul de forţă rămas produce o acceleraţie a mişcării proporţională cu ea însăşi, atît în părţile maşinii, cît şi în corpul rezistent. De altfel scopul acestei lucrări nu este de a trata mecanica. Prin acestea am voit să arăt numai, cîtă extensiune are şi cît de sigură este legea III a mişcării. Căci dacă apreciem acţiunea agentului din forţa lui şi viteza luate împreună; şi de asemenea reacţiunea rezistenţei o apreciem din vitezele diverselor sale părţi şi ale forţelor de rezistenţă provenite din frecare, coeziune, greutate şi acceleraţie luate împreună; acţiunea şi reacţiunea vor fi egale între ele la întrebuinţarea tuturor instrumentelor. Şi întrucît acţiunea se propagă prin instrument şi în sfîrşit se imprimă asupra oricărui corp rezistent, ultima ei determinare va fi totdeauna contrară determinării reacţiunii.

CARTEA I

DESPRE MIŞCAREA CORPURILOR

SECŢIUNEA I

Despre metoda primelor şi ultimelor rapoarte, cu ajutorul căreia se demonstrează cele ce urmează

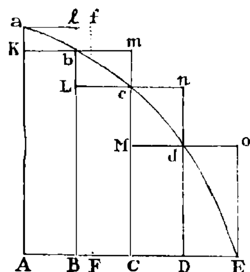
LEMA I

Cantităţile ca şi rapoartele cantităţilor care într-un timp finit oarecare tind în mod constant spre egalitate, şi înaintea sfîrşitului acelui timp tind mai aproape unul spre altul decît orice diferenţă dată, vor fi la urmă egale.

Dacă negi aceasta; fie în sfîrşit neegale şi fie ultima lor diferenţă *D*. Prin urmare nu pot să se apropie mai mult de egalitate decît diferenţa *D*: contra ipotezei.

LEMA II

Dacă într-o figură oarecare AacE, cuprinsă de dreptele Aa, AE şi curba acE se înscriu oricîte paralelograme Ab, Bc, Cd etc. cuprinse între bazele egale AB, BC, CD etc. şi laturile Bb, Cc, Dd etc. paralele cu latura Aa din figură; şi dacă se completează paralelogramele aKbl, bLcm, cMdn etc. Apoi dacă lăţimea acestor paralelograme se micşorează şi numărul lor creşte la infinit: zic că ultimele raporturi pe care le au între ele figura înscrisă AKbLcMdD, cea circumscrisă AalbmcndoE şi cea curbilinie AabcdE sînt raporturi de egalitate.



Căci diferenţa dintre figura înscrisă şi cea circumscrisă este suma paralelogramelor *Kl*, *Lm*, *Mn*,

Do, adică (din cauză că bazele tuturora sînt egale) dreptunghiul avînd baza unică *Kb* și suma înălțimilor *Aa*, adică dreptunghiul *ABla*. Dar acest dreptunghi, deoarece lățimea lui *AB* se micșorează la infinit devine mai mic de cît ori care dreptunghi dat. Așadar (din cauza lemei I) figura înscrisă și cea circumscrisă și cu atît mai mult figura curbilinie intermediară devin la urmă egale. Q.E.D.

LEMA III

Aceleași raporturi ultime sînt și raporturi de egalitate, cînd lățimile AB, BC, CD etc. ale paralelogramelor sînt neegale și toate se micșorează la infinit.

Căci fie *AF* egală cu lățimea maximă, și să completăm paralelogramul *FAaf*. Acesta va fi mai mare ca diferența dintre figura înscrisă și figura circumscrisă: dar lățimea sa *AF* scăzînd la infinit, el va fi mai mic decît orice dreptunghiu dat. *Q. E. D.*

COROLARUL 1. De aceea suma ultimă a paralelogramelor disparente coincide din toate părțile cu figura curbilinie.

COROLARUL 2. Și cu atît mai mult figura rectilinie, care este cuprinsă de coardele arcelor disparente *ab*, *bc*, *cd* etc. coincide la urmă cu figura curbilinie.

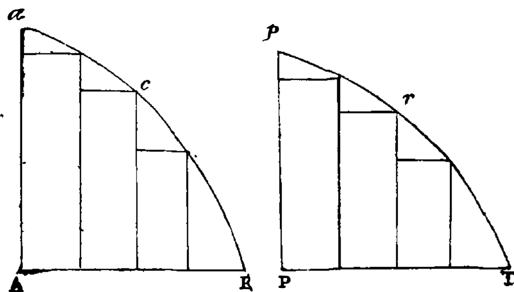
COROLARUL 3. De asemenea și figura rectilinie circumscrisă care este cuprinsă de tangentele acelorași arce.

COROLARUL 4. Și prin urmare aceste figuri din urmă (referindu-ne la perimetrele *acE*) nu sînt rectilinii, ci limitele curbilinii ale celor rectilinii.

LEMA IV

Dacă în două figuri AacE, PprT, se înscriu (ca mai sus) două serii de paralelograme, și fie același numărul ambelor, și dacă lățimile descresc la infinit, raporturile ultime ale paralelogramelor dintr-o figură către paralelogramele din cealaltă, ale fiecăruia către fiecare respectiv, sînt aceleași: zic că cele două figuri AacE, PprT sînt între ele tot în acel raport.

Căci după cum sînt paralelogramele fiecare către fiecare, tot așa compunînd este suma tuturora către suma tuturora, și astfel figura către figură; fiind fără îndoială (din cauza lemei III) figura anterioară către suma anterioară și figura posterioară către suma posterioară în raport de egalitate. Q. E. D.



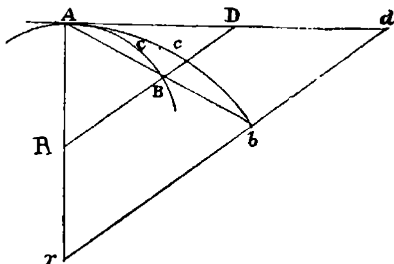
COROLAR. De aici dacă două cantități de orice fel se împart în același număr oarecare de părți; și acele părți cînd numărul lor crește și mărimea lor se micșorează la infinit, păstrează reciproc același raport, cea dintîi către cea dintîi, a doua către cea de-a doua și celelalte în ordinea lor, către celelalte: toate la un loc vor fi reciproc tot în acel raport dat. Căci dacă în figurile acestei leme paralelogramele se iau între ele în raportul părților, sumele părților vor fi totdeauna ca sumele paralelogramelor; și de aceea, cînd numărul părților și al paralelogramelor crește și mărimea lor descrește la infinit, cantitățile vor fi între ele în ultimul raport al paralelogramului către paralelogram, adică (prin ipoteză) în ultimul raport al părții către parte.

LEMA V

Toate laturile figurilor asemenea care se corespund între ele, atît curbilinii cît și rectilinii, sînt proporționale, și ariile sînt proporționale cu pătratele laturilor.

LEMA VI

Dacă un arc oarecare ACB de poziție dată este subîntins de coarda AB, și într-un punct oarecare A, în mijlocul curburii continue este atins de dreapta AD prelungită în ambele sensuri, apoi punctele A, B se apropie unul de altul și coincid; zic că unghiul BAD, cuprins între coardă și tangentă, descrește la infinit și în sfîrșit dispare.

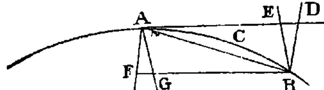


Căci dacă acel unghi nu dispare, arcul *ACB* va cuprinde împreună cu tangenta *AD* un unghi rectiliniu egal, și de aceea curbura în punctul *A* nu va fi continuă, ceea ce este contrar ipotezei.

LEMA VII

În aceleași condiții: zic, că ultimul raport reciproc al arcului, coardei și tangentei este un raport de egalitate.

Căci în timp ce punctul *B* se apropie de punctul *A*, să ne închipuim totdeauna *AB* și *AD* prelungite pînă la punctele îndepărtate *b* și *d*, și să ducem *bd* paralelă cu secanta *BD*. Și fie arcul *Acb* totdeauna asemenea cu arcul *ACB*. Și cînd punctele *A*, *B* coincid, unghiul *dAb*, din cauza lemei de mai sus, dispare; astfel că dreptele totdeauna finite *Ab*, *Ad* și arcul intermediar *Acb* coincid, și de aceea vor fi egale. De unde și dreptele *AB*, *AD* totdeauna proporționale cu acestea și arcul intermediar *ACB* dispar și vor avea în cele din urmă raportul egalității. Q. E. D.



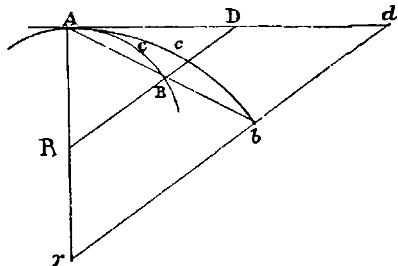
COROLARUL 1. De aceea, dacă prin *B* se duce *BF* paralelă cu tangenta, tăind întotdeauna în *F* o dreaptă oarecare *AF* ce trece prin *A*, această dreaptă *BF* va avea în cele din urmă către arcul disparent *ACB* raportul de egalitate, deoarece completînd paralelogramul *AFBD* ea are față de *AD* totdeauna raportul de egalitate.

COROLARUL 2. Și dacă prin *B* și *A* se duc mai multe drepte *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, care taie tangenta *AD* și paralela *BF* la ea; raportul ultim al tuturor absciselor *AD*, *AE*, *BF*, *BG* și al coardei și al arcului *AB* unul către altul va fi un raport de egalitate.

COROLARUL 3. Și de aceea toate aceste linii, în orice demonstrație asupra ultimelor rapoarte, pot fi folosite una în locul alteia.

LEMA VIII

Dacă dreptele date AR, BR formează cu arcul ACB, cu coarda AB și cu tangenta AD trei triunghiuri RAB, RACB, RAD, apoi punctele A, B se apropie unul de altul: zic că ultima formă a triunghiurilor disparente este o formă de asemănare, iar ultimul raport, un raport de egalitate.



Căci în timp ce punctul *B* se apropie de *A*, să ne închipuim totdeauna că *AB*, *AD*, *AR* se prelungesc pînă la punctele îndepărtate *b*, *d* și *r* și că se duce *r b d* paralelă cu însăși *RD*, și fie arcul *Acb* totdeauna asemenea cu arcul *ACB*. Și suprapunînd punctele *A*, *B* unghiul *bAd* dispare, și de aceea cele trei triunghiuri totdeauna finite *rAb*, *rAcb*, *rAd* coincid, și din această cauză sînt asemenea și egale. De unde și *RAB*, *RACB*, *RAD* totdeauna asemenea și proporționale cu acestea vor deveni în cele din urmă asemenea și egale între ele. Q. E. D.

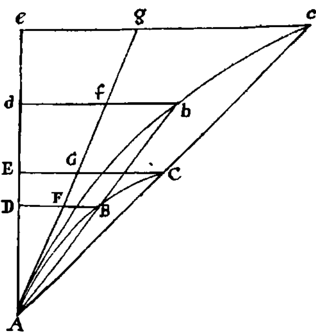
COROLAR. Și de aici acele triunghiuri în orice demonstrație asupra ultimelor rapoarte pot fi folosite unul în locul altuia.

LEMA IX

Dacă dreapta AE și curba ABC de poziție dată se taie reciproc sub unghiul dat A, și la acea dreaptă sub un alt unghiu dat se aplică pe rînd BD, CE întîlnind curba în B, C apoi punctele B, C se apropie simultan de punctul A: zic că ariile triunghiurilor ABD, ACE vor fi la urmă unul către altul precum pătratele laturilor.

Căci în timp ce punctele *B*, *C* se apropie de punctul *A*, să ne închipuim totdeauna pe *AD* prelungită pînă la punctele îndepărtate *d* și *e*, astfel ca *Ad*, *Ae* să fie proporționale cu *AD*, *AE*, și să ducem ordonatele *db*, *ec*

paralele cu ordonatele DB, EC care se întîlnesc cu AB, AC prelungite în b şi c. Să ne închipuim trasată atît curba Abc asemenea cu ABC, cît şi dreapta Ag, care atinge amîndouă curbele în A şi taie pe rînd dreptele aplicate DB, EC, db, ec, în F, G, f, g. Atunci păstrînd lungimea Ae să suprapunem punctele B, C cu punctul A; şi unghiul cAg dispărînd să coincidă ariile curbilinii Abd, Ace cu cele rectilinii Afd, Age, şi prin urmare (din cauza lemei V) vor fi precum pătratele laturilor Ad, Ae. Dar cu aceste arii sînt totdeauna proporţionale ariile ABD, ACE, şi cu aceste laturi laturile AD, AE. Aşadar şi ariile ABD, ACE sînt în sfîrşit ca pătratele laturilor AD, AE. Q. E. D.



LEMA X

Spaţiile pe care le descrie un corp sub acţiunea unei forţe oarecare finite, fie că acea forţă este determinată şi neschimbătoare, fie că ea creşte incontinuu sau scade incontinuu, sînt la începutul mişcării ca pătratele timpurilor.

Să reprezentăm timpurile prin liniile AD, AE şi vitezele produse prin ordonatele DB, EC; şi spaţiile descrise cu aceste viteze vor fi ca ariile ABD, ACE descrise de aceste ordonate, adică, la începutul mişcării (din cauza lemei IX) ca pătratele timpurilor AD, AE. Q. E. D.

COROLARUL 1. Şi de aici se deduce uşor că devierile corpurilor descriind părţi asemenea, ale figurilor asemenea în timpuri proporţionale, devieri produse de oarecare forţe egale aplicate în mod analog asupra corpurilor şi măsurate prin distanţele corpurilor la acele locuri ale figurilor asemenea la care corpurile ar ajunge în aceleaşi timpuri proporţionale fără aceste forţe, sînt aproximativ ca pătratele timpurilor în care se nasc.

COROLARUL 2. Devierile însă care se produc de forţe proporţionale aplicate în mod analog părţilor asemenea ale figurilor asemenea, sînt precum forţele şi pătratele timpurilor luate împreună.

COROLARUL 3. Acelaşi lucru trebuie să se înţeleagă despre spaţii oarecare pe care le descriu corpurile sub acţiunile diverselor forţe. Acestea sînt la începutul mişcării, ca forţele şi pătratele timpurilor luate împreună.

COROLARUL 4. Şi de aceea forţele, la începutul mişcării, sînt direct proporţionale cu spaţiile descrise şi invers proporţionale cu pătratele timpurilor.

COROLARUL 5. Şi pătratele timpurilor sînt direct proporţionale cu spaţiile descrise şi invers proporţionale cu forţele.

SCOLIE

Dacă se compară între ele cantităţi nedeterminate de diverse feluri şi una oarecare dintre ele se zice că se raportă direct sau invers către alta oarecare; aceasta înseamnă că cea dintîi creşte sau descreşte în acelaşi raport

cu cea din urmă, sau cu inversa ei. Și dacă una oarecare dintre ele se zice că se raportă direct sau invers către alte două sau mai multe: aceasta înseamnă că cea dintîi crește sau descrește într-un raport ce se compune din rapoartele în care celelalte sau inversele celorlalte cresc sau descresc. Astfel dacă A se zice că se raportă direct către B și direct către C și invers către D: aceasta înseamnă că A crește sau descrește în același raport ca $B \times C \times \frac{1}{D}$, adică, A și $\frac{BC}{D}$ sînt între ele într-un raport dat.

LEMA XI

Dreapta subîntinsă disparentă a unghiului de contact în toate curbele care au o curbură finită în punctul de contact, este la urmă ca pătratul dreptei subîntinse arcului vecin.

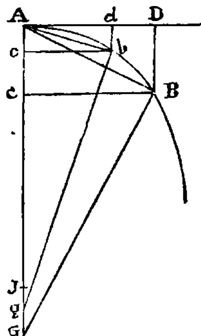
CAZUL 1. Fie AB acel arc, AD tangenta lui, BD dreapta subîntinsă unghiului de contact perpendiculară pe tangentă, AB dreapta subîntinsă arcului. La această dreaptă subîntinsă AB și la tangenta AD să ducem perpendicularele AG, BG concurente în G; apoi să apropiem punctele D, B, G de punctele d, b, g, și fie J ultima intersecție a liniilor BG, AG cînd punctele D, B ajung în A. Este evident că distanța GJ poate fi mai mică decît orice distanță dată. Dar (prin natura cercurilor care trec prin punctele ABG, Abg) $\overline{AB}^2$ este egală cu $AG \times BD$ și $\overline{Ab}^2$ egal la $Ag \times bd$; și de aceea raportul $\overline{AB}^2$ către $\overline{Ab}^2$ se compune din rapoartele AG către Ag și BD către bd. Dar fiind că GJ poate deveni mai mic decît o lungime oarecare dată, se poate întîmpla ca raportul lui AG către Ag să difere de raportul de egalitate cu mai puțin decît cu orice diferență dată, și astfel că raportul lui $\overline{AB}^2$ către $\overline{Ab}^2$ diferă de raportul lui BD către bd cu mai puțin decît o diferență oarecare dată. Prin urmare, din cauza lemei I raportul ultim al lui $\overline{AB}^2$ către $\overline{Ab}^2$ este același cu raportul ultim al lui BD către bd. Q. E. D.

CAZUL 2. Să înclinăm pe BD față de AD după un unghi oarecare dat, și raportul ultim al lui BD către bd va fi totdeauna același ca și mai înainte, și de aceea același și raportul ultim $\overline{AB}^2$ către $\overline{Ab}^2$. Q. E. D.

CAZUL 3. Și chiar dacă unghiul D n-ar fi dat, ci dreapta DB converge către un punct dat sau este determinată de vreo altă condiție; totuși unghiurile D, d fiind determinate de o lege comună tind totdeauna spre egalitate și se apropie unul de celălalt mai mult decît cu o diferență oarecare dată, și de aceea la urmă vor fi egale, din cauza lemei I, și prin urmare liniile BD, bd sînt în același raport între ele ca mai sus. Q. E. D.

COROLARUL 1. De unde, fiindcă tangentele AD, Ad, arcele AB, Ab și sinusurile lor BC, bc sînt la urmă egale cu coardele AB, Ab; pătratele lor de asemenea vor fi la urmă ca dreptele subîntinse BD, bd.

COROLARUL 2. Pătratele lor sînt, de asemenea la urmă ca săgeţile arcelor, care bisectează coardele şi converg spre un punct dat. Căci săgeţile sînt ca dreptele subîntinse *BD*, *bd*.



COROLARUL 3. Şi de aceea săgeata este ca pătratul timpului în care corpul descrie arcul cu o viteză dată.

COROLARUL 4. Triunghiurile rectilinii *ADB*, *Adb* sînt la urmă ca şi cuburile laturilor *AD*, *Ad* şi ca puterile $\frac{3}{2}$ ale laturilor *DB*, *db;* astfel că ele sînt în raportul compus al laturilor *AD* şi *DB*, *Ad* şi *db*. În acest fel şi triunghiurile *ABC*, *Abc* sînt la urmă ca şi cuburile laturilor *BC*, *bc*.

COROLARUL 5. Şi fiindcă *DB*, *db* sînt la urmă paralele şi ca patratele lungimilor *AD*, *Ad:* ultimele arii curbilinii *ADB*, *Adb* vor fi (prin natura parabolei) două treimi ale triunghiurilor rectilinii *ADB*, *Adb*; şi segmentele *AB*, *Ab* a treia parte a aceloraşi triunghiuri. Şi de aici aceste arii şi aceste segmente vor fi ca şi cuburile atît ale tangentelor *AD*, *Ad*, cît şi ale coardelor şi arcelor *AB*, *Ab*.

SCOLIE

De altfel în toate acestea presupunem că unghiul de contact nu este nici infinit mai mare decît unghiurile de contact, pe care le formează cercurile cu tangentele lor, nici infinit mai mic decît acestea; adică curbura în punctul *A* nu este nici infinit de mică nici infinit de mare, şi intervalul *AJ* este de mărime finită. Căci se poate lua *DB* ca AD^3: în care caz prin punctul *A* nu se poate duce nici un cerc între tangenta *AD* şi curba *AB* şi de aceea unghiul de contact va fi infinit mai mic decît cele circulare. Şi printr-un raţionament analog dacă *DB* este succesiv ca AD^4, AD^5, AD^6, AD^7 etc. vom avea o serie de unghiuri de contact continuînd la infinit, dintre care fiecare este infinit mai mic decît cel precedent. Şi dacă *DB* este succesiv ca AD^2, $AD^{3/2}$, $AD^{4/3}$, $AD^{5/4}$, $AD^{6/5}$, $AD^{7/6}$ etc. vom avea o altă serie infinită de unghiuri de contact, dintre care cel dintîi este de acelaşi gen cu cele circulare, al doilea infinit mai mare, şi fiecare din următoarele infinit mai mare ca cel dinaintea lui. Dar şi între două oarecare din aceste unghiuri se poate interpola o serie de unghiuri intermediare mergînd la infinit de ambele părţi dintre care fiecare următor va fi infinit mai mare sau mai mic decît cel dinaintea lui. De exemplu dacă între termenii AD^2 şi AD^3 se interpolează seria $AD^{13/6}$, $AD^{11/5}$, $AD^{9/4}$, $AD^{7/3}$, $AD^{5/2}$, $AD^{8/3}$, $AD^{11/4}$, $AD^{14/5}$, $AD^{17/6}$ etc. Şi iarăşi între două unghiuri oarecare ale acestei serii se poate interpola o nouă serie de unghiuri intermediare diferind unul de altul prin intervale infinite. Căci natura nu cunoaşte limită.

Cele ce s-au demonstrat despre liniile curbe şi despre suprafeţele cuprinse de ele, se aplică uşor la suprafeţele curbe şi la conţinuturile solidelor. Am pus înainte aceste leme ca să evit plictiseala de a trebui să deduc demonstraţii lungi prin reducerea la absurd, după obiceiul vechilor geometri. Căci demonstraţiile devin mai scurte prin metoda indivizibilelor. Dar fiindcă ipoteza indivizibilelor este mai dură şi de aceea metoda se consideră mai

puţin geometrică; am preferat să reduc demonstraţiile celor ce urmează la ultimele sume şi rapoarte ale cantităţilor disparente, şi la primele ale celor nascînde adică la limitele sumelor şi rapoartelor; şi de aceea am pus înainte cît de scurt posibil demonstraţiile acelor limite. Căci cu ajutorul lor se obţine acelaşi rezultat ca şi prin metoda indivizibilelor; şi de principiile demonstrate ne vom folosi mai sigur. De aceea dacă în cele următoare voi considera cantităţile ca formate din particule, sau dacă voi folosi liniuţe curbe în loc de drepte; nu voi înţelege că este vorba de indivizibile ci de divizibile disparente, nu de sume şi rapoarte de părţi determinate, ci întotdeauna de limite de sume şi rapoarte, şi voi referi totdeauna forţa acestor demonstraţii la metoda lemelor precedente.

Se poate obiecta că nu există o ultimă proporţie a cantităţilor disparente; fiindcă aceasta, înainte ca ele să dispară, nu este ultima, iar cînd au dispărut ea este nulă. Dar în mod analog se poate demonstra că nu există viteză ultimă a unui corp ce ajunge la un loc dat, unde se termină mişcarea: căci aceasta înainte ca corpul să ajungă în acel loc nu este cea din urmă, iar cînd ajunge ea este nulă. Dar răspunsul este uşor. Prin viteza ultimă am înţeles pe aceea cu care se mişcă corpul, şi nu înainte de a atinge locul ultim şi încetează mişcarea, nici după aceea, ci atunci cînd îl atinge; adică acea viteză însăşi cu care corpul ajunge la locul din urmă şi cu care mişcarea încetează. Şi la fel prin ultimul raport al cantităţilor disparente trebuie să înţelegem raportul cantităţilor nu înainte de a dispare, nu după aceea, ci pe acela cu care ele dispar. Tot aşa şi primul raport al celor nascînde este raportul cu care se nasc. Şi suma cea dintîi şi cea din urmă este aceea prin care ele încep şi încetează să existe (sau să crească sau să descrească). Există o limită pe care viteza la sfîrşitul mişcării o poate atinge, dar nu o poate depăşi. Aceasta este viteza ultimă. Şi la fel este raportul limitei tuturor cantităţilor şi proporţiilor celor ce încep şi încetează. Şi fiindcă această limită este sigură şi definită, problema de a o determina este strict geometrică. În adevăr tot ceea ce este geometric se poate folosi cu tot dreptul, în alte probleme geometrice care trebuie determinate şi demonstrate.

Se mai poate afirma de asemenea că dacă se dau ultimele rapoarte ale cantităţilor disparente, vor fi date şi ultimele mărimi: şi astfel orice cantitate va consta din indivizibile, contrar celor demonstrate de Euclid asupra incomensurabilelor în Cartea a X-a a Elementelor. Dar această obiecţie se întemeiază pe o ipoteză falsă. Ultimele rapoarte cu care dispar cantităţile, nu sînt de fapt rapoarte ale ultimelor cantităţi, ci limite de care se apropie incontinuu rapoartele cantităţilor ce descresc fără limită; şi de care se pot apropia mai mult decît cu orice diferenţă dată, dar niciodată nu le pot depăşi şi nici atinge înainte ca acele cantităţi să fi descrescut la infinit. Lucrul se înţelege mai clar în cazul celor infinit de mari. Dacă două cantităţi a căror diferenţă este dată, cresc la infinit, va fi dat ultimul raport al acestora, fără îndoială un raport de egalitate, totuşi nu vor fi date cantităţile ultime sau maxime al căror raport este acesta. Aşadar dacă voind în cele ce urmează, să exprim mai uşor lucrurile voi vorbi despre cantităţi foarte mici sau disparente, sau ultime; nu trebuie să înţelegi cantităţi de mărime determinată, ci să te gîndeşti totdeauna că ele trebuie să descrească fără limită.

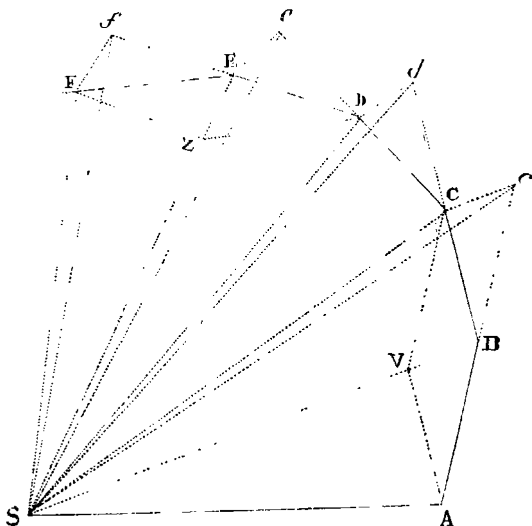
SECŢIUNEA II

Despre determinarea forţelor centripete

PROPOZIŢIA I. TEOREMA I

Ariile pe care le descriu corpurile în rotaţie cu ajutorul razelor duse la centrul imobil al forţelor, se menţin în plane imobile şi sînt proporţionale cu timpurile.

Să împărţim timpul în părţi egale, şi în prima parte a timpului corpul prin forţa inerţiei să descrie dreapta *AB*. În a doua parte a timpului, dacă nu l-ar împiedica nimic, ar continua în linie dreaptă pînă la *c* (conform legii I) descriind linia *Bc* egală cu însuşi *AB*; astfel că cu ajutorul razelor *AS*, *BS*, *cS* duse la centru, se vor descrie ariile egale *ASB*, *BSc*. Dar cînd corpul ajunge în *B*, să presupunem că forţa centripetă acţionează printr-un impuls unic dar mare, şi face ca corpul să se abată de la dreapta *BC* şi să continue de-a lungul dreptei *BC*. Să ducem *cC* paralelă cu *BS*, întîlnind pe *BC* în *C*; şi la sfîrşitul celei de-a doua părţi a timpului, corpul (din cauza corolarului I al legilor) se va afla în *C*, în acelaşi plan cu triunghiul *ASB*. Să ducem *SC*; atunci triunghiul *SBC*, din cauza paralelelor *SB*, *Cc*, va fi egal cu triunghiul *SBc* şi de aceea şi cu triunghiul *SAB*. La fel dacă forţa centripetă în mod succesiv acţionează în *C*, *D*, *E* etc., făcînd ca corpul în diverse intervale de timp să descrie diversele drepte *CD*, *DE*, *EF* etc. toate acestea se vor afla în acelaşi plan; şi triunghiul *SCD* va fi egal cu triunghiul *SBC*, iar *SDE* cu însuşi *SCD*, şi *SEF* cu *SDE*. Aşadar în timpuri egale se descriu arii egale într-un plan fix: şi prin compunere sumele oarecare ale ariilor *SADS*, *SAFS* sînt între ele ca timpurile în care sînt descrise. Să presupunem acum că numărul triunghiurilor creşte şi lăţimea lor descreşte la infinit; şi ultimul lor perimetru *ADF* (din cauza corolarului 4 al lemei III) va fi o linie curbă: şi de aceea forţa centripetă, cu care corpul este într-una abătut de la tangenta acestei curbe, lucrează incontinuu; şi ariile oarecare descrise *SADS*, *SAFS* totdeauna proporţionale cu timpurile descrierii, vor fi în acest caz proporţionale cu acele timpuri. Q. E. D.



COROLARUL 1. Viteza corpului atras spre un centru imobil este în spaţiile lipsite de rezistenţă invers proporţională cu perpendiculara dusă din acel centru la tangenta rectilinie a orbitei. Căci viteza în acele locuri *A*, *B*, *C*, *D*, *E* este proporţională cu bazele triunghiurilor egale *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* şi aceste baze sînt invers proporţionale cu perpendicularele duse pe ele.

COROLARUL 2. Dacă coardele *AB*, *BC* a două arce descrise succesiv de acelaşi corp în timpuri egale în spaţii lipsite de rezistenţă se întregesc în paralelogramul *ABCV*, şi diagonala acestuia *BV*, se prelungeşte în ambele părţi în poziţia pe care o are la urmă cînd acele arce descresc la infinit; ea va trece prin centrul forţelor.

COROLARUL 3. Dacă coardele *AB*, *BC* şi *DE*, *EF* ale arcelor descrise în timpuri egale în spaţii lipsite de rezistenţă se întregesc în paralelogramele *ABCV*, *DEFZ*; forţele în *B* şi *E* sînt între ele în ultimul raport al diagonalelor, *BV*, *EZ*, cînd aceste arce descresc la infinit. Căci mişcările *BC* şi *EF* ale corpului se compun (din cauza corolarului I al legilor) din mişcările *Bc*, *BV* şi *Ef*, *EZ:* dar *BV* şi *EZ* egale cu însăşi *Cc* şi *Ff*, în demonstraţia acestei propoziţii erau născute de impulsurile forţei centripete în *B* şi *E*, astfel că sînt proporţionale cu aceste impulsuri.

COROLARUL 4. Forţele cu care corpuri oarecare în spaţii lipsite de rezistenţă sînt abătute de la mişcările rectilinii şi antrenate pe orbite curbe se rapoartă între ele ca acele săgeţi ale arcelor descrise în timpuri egale care converg spre centrul forţelor, şi bisectează coardele cînd acele arce descresc la infinit. Căci aceste săgeţi sînt jumătăţile diagonalelor menţionate în corolarul 3.

COROLARUL 5. Şi de aceea forţele sînt în acelaşi raport către forţa gravităţii precum aceste săgeţi către săgeţile perpendiculare pe orizontul arcelor parabolice, pe care le descriu proiectilele în acelaşi timp.

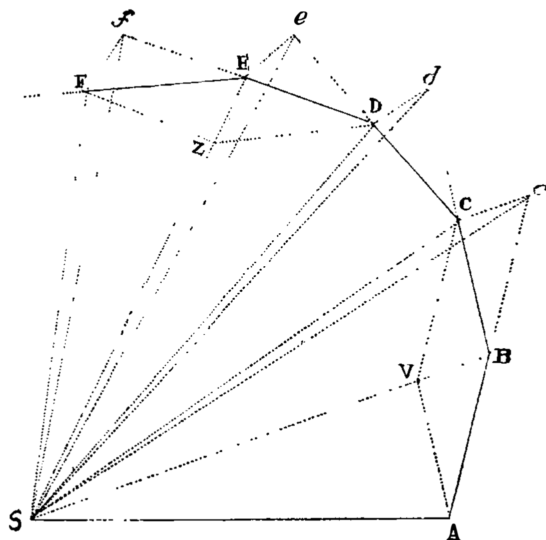
COROLARUL 6. Aceleaşi rezultate se obţin prin corolarul V al legilor cînd planele în care se mişcă corpurile împreună cu centrele forţelor care sînt situate în ele nu rămîn în repaus, ci se mişcă uniform şi rectiliniu.

PROPOZIŢIA II. TEOREMA II

Orice corp, ce se mişcă pe o linie curbă oarecare descrisă într-un plan, şi raza dusă la un punct fie imobil, fie înaintînd cu o mişcare rectilinie uniformă descrie în jurul acelui punct arii proporţionale cu timpurile, este acţionat de o forţă centripetă îndreptată spre acel punct.

CAZUL 1. Căci orice corp ce, se mişcă pe o linie curbă, este abătut de la cursul rectiliniu de o forţă oarecare ce acţionează asupra lui (conform legii I). Şi forţa aceea, prin care corpul este abătut de la drumul rectiliniu şi este silit să descrie triunghiuri cît mai mici *SAB*, *SBC*, *SCD* etc., egale în jurul punctului imobil *S*, în timpuri egale, acţionează în locul *B* după o linie paralelă cu *cC* (conform propoziţiei XI din Cartea I a Elementelor şi legii II) adică, după linia *BS*; şi în locul *C* după linia paralelă cu *dD*, adică după linia *SC* etc. Prin urmare acţionează totdeauna după linii îndreptate spre acel punct imobil *S*. Q.E.D.

CAZUL 2. Şi potrivit corolarului V al legilor rezultă că este indiferent fie că suprafaţa în care corpul descrie figura curbilinie este în repaus, fie că ea se mişcă împreună cu corpul, cu figura descrisă şi cu punctul său *S* cu o mişcare rectilinie uniformă.



COROLARUL 1. În spaţiile sau mediile lipsite de rezistenţă dacă ariile nu sînt proporţionale cu timpurile, forţele nu sînt îndreptate spre punctul de întîlnire al razelor; ci sînt abătute în partea următoare, adică spre regiunea în care are loc mişcarea, dacă descrierea ariilor este accelerată: iar dacă este întîrziată, sînt abătute în partea antecedentă.

COROLARUL 2. În medii rezistente de asemenea, dacă descrierea ariilor este accelerată, direcţiile forţelor deviază de la punctul de întîlnire al razelor spre regiunea în care are loc mişcarea.

SCOLIE

Un corp poate fi acţionat de o forţă centripetă compusă din mai multe forţe. În acest caz sensul propoziţiei este, că forţa care se compune din toate este îndreptată spre punctul *S*. Apoi, dacă o forţă oarecare acţionează incontinuu după o linie perpendiculară pe suprafaţa descrisă, aceasta face ca corpul să fie abătut de la planul mişcării sale: dar cantitatea suprafeţei descrise nici nu va creşte nici nu va descreşte, şi de aceea trebuie neglijată în compunerea forţelor.

PROPOZIŢIA III. TEOREMA III

Orice corp care cu raza dusă la centrul altui corp avînd o mişcare oarecare descrie în jurul acelui centru arii proporţionale cu timpurile, este acţionat de o forţă compusă din forţa centripetă îndreptată spre celălalt corp şi din toată forţa acceleratoare cu care celălalt corp este acţionat.

Fie *L* primul corp şi *T* celălalt corp: şi (potrivit corolarului VI al legilor) dacă ambele corpuri sînt acţionate în direcţia liniilor paralele printr-o forţă nouă, care este egală şi contrară aceleia cu care este acţionat celălalt

corp *T*; primul corp *L* continuă a descrie în jurul celuilalt corp *T* aceleași arii ca mai înainte: iar forța cu care era acționat celălalt corp *T*, este nimicită acum prin forța egală și de sens contrar cu ea; și de aceea (potrivit legii I) celălalt corp *T* lăsat de sine sau va rămînea nemișcat sau se va mișca cu o mișcare rectilinie uniformă: și primul corp *L* acționat de diferența forțelor, adică de forța ce rămîne continuă să descrie în jurul celuilalt corp *T* arii proporționale cu timpurile. Prin urmare (potrivit teoremei II) diferența forțelor este îndreptată spre celălalt corp *T* ca spre un centru. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă un corp *L* cu raza dusă la un alt corp *T* descrie arii proporționale cu timpurile; și din forța întreagă (fie simplă, fie compusă din mai multe forțe după corolarul II al legilor) cu care este acționat corpul cel dintîi *L* se scade (potrivit aceluiași corolar al legilor), întreaga forță acceleratoare cu care este acționat celălalt corp: întreaga forță rămasă cu care este acționat corpul cel dintîi este îndreptată spre corpul celălalt *T* ca spre un centru.

COROLARUL 2. Și dacă ariile sînt aproximativ proporționale cu timpurile forța ce rămîne este îndreptată aproximativ spre celălalt corp *T*.

COROLARUL 3. Și viceversa, dacă forța ce rămîne este îndreptată aproximativ spre celălalt corp *T*, ariile vor fi aproximativ proporționale cu timpurile.

COROLARUL 4. Dacă corpul *L* cu raza dusă la celălalt corp *T* descrie arii, care comparate cu timpurile sînt foarte neegale; și celălalt corp *T* sau este în repaus sau se mișcă uniform în linie dreaptă; acțiunea forței centripete îndreptate spre celălalt corp *T* este sau nulă, sau se amestecă și se compune cu acțiunile foarte puternice ale altor forțe: și întreaga forță compusă din toate dacă sînt mai multe forțe se îndreaptă spre un alt centru (fie imobil, fie mobil). Același lucru se obține cînd celălalt corp se mișcă cu o mișcare oarecare; dacă se adună forța centripetă ce rămîne după scăderea forței totale ce acționează asupra celuilalt corp *T*.

SCOLIE

Deoarece descrierea uniformă a ariilor este indicația centrului, spre care tinde acea forță, prin care corpul este acționat mai tare și prin care este abătut de la mișcarea rectilinie, și este reținut în orbita sa; pentru ce nu am folosi în cele următoare descrierea uniformă a ariilor ca un indiciu al centrului în jurul căruia are loc orice mișcare circulară în spațiile libere?

PROPOZIȚIA IV. TEOREMA IV

Forțele centripete ale corpurilor care descriu diverse cercuri cu mișcare uniformă sînt îndreptate spre centrele acelor cercuri; și sînt între ele precum pătratele arcelor descrise în același timp, divizate prin razele cercurilor.

Aceste forțe sînt îndreptate spre centrele cercurilor potrivit propoziției II și corolarului 2 al propoziției I și sînt între ele potrivit corolarului 4, propoziția I, precum sinus versus-urile arcelor descrise în timpuri egale cît se poate de mici, adică precum pătratele acelorași arce divizate prin diametrele cercurilor potrivit lemei VII și de aceea, fiindcă aceste arce sînt ca arcele descrise în timpuri egale, și diametrele sînt ca razele lor; forțele vor

fi precum pătratele arcelor oarecare descrise în același timp divizate prin razele cercurilor. Q.E.D.

COROLARUL 1. Deoarece arcele sînt ca vitezele corpurilor, forțele centripete vor fi precum pătratele vitezelor divizate cu razele.

COROLARUL 2. Și fiindcă timpurile periodice sînt direct proporționale cu razele și invers proporționale cu vitezele; forțele centripete sînt precum razele divizate prin timpurile periodice.

COROLARUL 3. De unde, dacă timpurile periodice sînt egale, și de aceea vitezele sînt ca razele, forțele centripete de asemenea sînt ca razele: și invers.

COROLARUL 4. Dacă și timpurile periodice și vitezele sînt ca rădăcinile pătrate ale razelor; forțele centripete vor fi egale între ele: și invers.

COROLARUL 5. Dacă timpurile periodice sînt ca razele și de aceea vitezele egale; forțele centripete vor fi inverse razelor: și invers.

COROLARUL 6. Dacă timpurile periodice sînt ca puterea $\frac{3}{2}$ a razelor și de aceea vitezele în raport invers cu rădăcinile patrate ale razelor; forțele centripete vor fi inverse cu pătratele rezelor: și invers.

COROLARUL 7. Și în general, dacă timpul periodic este ca puterea R^n a razei R, și de aceea viteza este inversă cu puterea R^{n-1} a razei; forța centripetă va fi inversă cu puterea R^{2n-1} a razei; și invers.

COROLARUL 8. Toate acestea spuse despre timpurile, vitezele și forțele cu care corpurile descriu părți asemenea ale unor figuri oarecare asemenea și avînd centrele situate în poziții similare în acele figuri, rezultă din demonstrația celor precedente aplicate la aceste cazuri. Se aplică însă substituind descrierea uniformă a ariilor în locul mișcării uniforme și folosind distanțele corpurilor de la centre ca raze.

COROLARUL 9. Din aceeași demonstrație rezultă de asemenea că arcul pe care-l descrie un corp ce se mișcă uniform pe un cerc dat cu o forță centripetă într-un timp oarecare este media proporțională între diametrul cercului și căderea corpului produsă de aceeași forță dată și efectuată în același timp.

SCOLIE

Cazul corolarului 6 se aplică la corpurile cerești, (după cum au arătat compatrioții noștri W r e n, H o o k e și H a l l e y independent unul de altul) și de aceea m-am hotărît să expun mai pe larg în cele ce urmează cele ce privesc forța centripetă descrescătoare în raport cu pătratele distanțelor de la centre.

Apoi cu ajutorul propoziției precedente și a corolarelor aceleia se studiază și raportul forței centripete către o forță oarecare cunoscută, cum este aceea a gravității. Căci dacă un corp datorită forței gravității sale se rotește pe un cerc concentric cu Pămîntul, această gravitate este forța lui centripetă. Dar din căderea corpurilor grele se determină și timpul unei revoluții și arcul descris întrun timp oarecare dat, potrivit corolarului 9 al acesteia, și prin astfel de propoziții H u y g e n s în excelentul său tratat *De Horologio oscillatorio* a comparat forța gravității cu forțele centrifuge ale celor ce se rotesc.

Cele precedente se mai pot demonstra și astfel. Într-un cerc oarecare să ne închipuim descris un poligon cu oricîte laturi. Și dacă corpul mișcîndu-se pe laturile poligonului cu o viteză dată este reflectat la diversele

lui unghiuri de către cerc; forța cu care el apasă cercul prin diversele reflexii, va fi ca viteza lui: astfel că suma forțelor într-un timp dat va fi precum viteza, și numărul reflexiilor luate împreună: adică (dacă specia poligonului ne este dată) ca lungimea descrisă în acel timp dat, și mărită sau micșorată în raportul lungimii lui către raza cercului menționat; adică precum pătratul lungimii lui divizat prin rază: și de aceea dacă poligonul cu laturile micșorate la infinit coincide cu cercul, precum pătratul arcului descris într-un timp dat divizat prin rază. Aceasta este forța centrifugă, cu care corpul acționează asupra cercului; și cu aceasta este egală forța contrară cu care cercul respinge necontenit corpul spre centru.

PROPOZIȚIA V. PROBLEMA I

Fiind dată în locuri oarecare viteza cu care un corp descrie o figură dată prin mijlocirea forțelor îndreptate spre un centru oarecare comun, să se afle acel centru.

Să presupunem că figura descrisă este atinsă în punctele P, Q, R, de trei drepte PT, TQV, VR, concurente în T și V. Să ridicăm pe tangente perpendiculare PA, QB, RC invers proporționale cu vitezele corpului în acele puncte P, Q, R în care sînt ridicate; adică în așa fel ca PA să fie către QB după cum viteza din Q către viteza din P, și QB către RC după cum viteza din R către viteza din Q. Prin capetele A, B, C ale perpendicularelor să ducem sub unghiuri drepte AD, DBE, EC concurente în D și E; și ducînd TD, VE ele vor concura în centrul căutat S.

Căci perpendicularele duse din centrul S pe tangentele PT, QT (potrivit corolarului 1, propoziția I) sînt inverse vitezelor corpului în punctele P și Q; și de aceea prin construcție sînt ca perpendicularele AP, BQ, adică precum perpendicularele duse din punctul D la tangente. De unde se deduce ușor că punctele S, D, T se află pe o dreaptă, și în mod analog și punctele S, E, V sînt pe o dreaptă; și de aceea centrul S se află la intersecția dreptelor TD, VE. Q.E.D.

PROPOZIȚIA VI. TEOREMA V

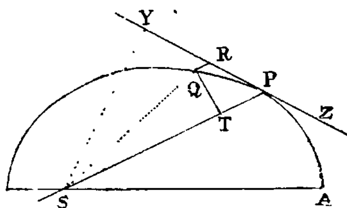
Dacă un corp se mișcă într-un spațiu lipsit de rezistență în jurul unui centru imobil pe o orbită oarecare, și descrie un arc oarecare abia născînd într-un timp cît se poate de mic, și ne închipuim dusă săgeata arcului care bisectează coarda și prelungită trece prin centrul forțelor: forța centripetă va fi în mijlocul arcului, direct proporțională cu săgeata și invers proporțională cu pătratul timpului.

Căci săgeata într-un timp dat este ca forța (potrivit corolarului 4, propoziția I) și timpul crescînd într-un raport oarecare, din cauza creșterii

arcului în acelaşi raport săgeata va creşte cu pătratul raportului (potrivit corolarului 2 şi 3, lema XI) şi de aceea este precum forţa şi pătratul timpului. Împărţim de ambele părţi prin pătratul timpului şi forţa va fi direct proporţională cu săgeata şi invers cu pătratul timpului. Q.E.D.

Acelaşi lucru se demonstrează uşor şi prin corolarul 4, lema X.

COROLARUL 1. Dacă corpul P învîrtindu-se în jurul centrului S descrie linia curbă APQ, iar dreapta ZPR atinge acea curbă într-un punct oarecare P; şi se duce la tangentă dintr-un alt punct oarecare Q al curbei QR paralelă cu distanţa SP; şi se coboară QT perpendiculară la distanţa SP: forţa centripetă va fi inversă solidului $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$; dacă se ia totdeauna acea mărime a solidului care să fie cea din urmă cînd coincid punctele P şi Q. Căci QR este egal cu săgeata dublului arcului QP, în mijlocul căruia este P, şi dublul triunghiului SQP sau $SP \times QT$ este proporţional cu timpul în care se descrie acest arc dublu: şi de aceea poate fi privit ca reprezentînd timpul.



COROLARUL 2. Din aceeaşi cauză forţa centripetă este invers proporţională cu solidul $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$, dacă numai SY este perpendiculara dusă din centrul forţelor la tangenta PR a orbitei. Căci dreptunghiurile $SY \times QP$ şi $SP \times QT$ sînt egale.

COROLARUL 3. Dacă orbita este sau un cerc, sau atinge cercul în mod concentric, sau îl taie concentric, adică face un unghi de contact cît se poate de mic cu cercul, avînd aceeaşi curbă şi aceeaşi rază de curbură în punctul de contact P; şi dacă PV este coarda acestui cerc dusă de la corp prin centrul forţelor: forţa centripetă va fi inversă solidului $SY^2 \times PV$. Căci PV este $\frac{QP^2}{QR}$.

COROLARUL 4. Acestea fiind date, forţa centripetă este proporţională cu pătratul vitezei şi invers proporţională cu coarda. Căci potrivit corolarului 1, propoziţia I viteza este invers proporţională cu perpendiculara SY.

COROLARUL 5. De aici dacă se dă o figură curbilinie oarecare APQ şi în ea se dă şi punctul S spre care se îndreaptă necontenit forţa centripetă, se poate afla legea forţei centripete cu care un corp oarecare P incontinuu retras de la drumul rectiliniu va fi reţinut pe perimetrul acelei figuri şi o descrie rotindu-se. Fără îndoială trebuie să se calculeze fie solidul $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ fie solidul $SY^2 \times PV$ invers proporţional cu această forţă. În problemele ce urmează vom da exemple despre acest lucru.

PROPOZIŢIA VII. PROBLEMA II

Presupunînd că un corp se mişcă pe circumferinţa unui cerc, se caută legea forţei centripete ce tinde spre un punct oarecare dat

Fie $VQPA$ circumferinţa cercului; S punctul dat spre care tinde forţa ca spre centrul său, P corpul ce se mişcă pe circumferinţă, Q locul cel mai

apropiat în care se va mişca, şi PRZ tangenta cercului la locul precedent. Prin punctul S să ducem coarda PV; şi după aceasta să ducem diametrul VA al cercului, să unim AP; şi să coborîm pe SP perpendiculara QT care prelungită să întîlnească tangenta PR în Z; şi în sfîrşit prin punctul Q să ducem LR paralel cu SP şi întîlnind atît cercul în L cît şi tangenta PZ în R. Şi din cauza triunghiurilor asemenea ZQR, ZTP, VPA, vom avea RP^2 adică QRL către QT^2 după cum AV^2 către PV^2. Astfel că $\frac{QRL \times PV^2}{AV^2}$ este egal cu QT^2. Acestea egale să le înmulţim cu $\frac{SP^2}{QR}$ şi punctele P şi Q coincizînd să scriem PV în loc de RL. Astfel va fi $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ egal cu $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Prin urmare (potrivit corolarului 1 şi 5 propoziţia VI) forţa centripetă este invers proporţională cu $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ adică (AV^2 fiind dat) invers proporţională cu pătratul distanţei sau înălţimii SP şi cubul coardei PV luate împreună. Q. E. I.

Aceeaşi altfel

Pe tangenta PR prelungită să coborîm perpendiculara SY: şi din cauza triunghiurilor asemenea SYP, VPA; vom avea AV către PV după cum SP către SY: şi de aceea $\frac{SP \times PV}{AV}$ este egal cu SY, iar $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ este egal cu $SY^2 \times PV$. Şi de aceea (potrivit corolarului 3 şi 5, propoziţia VI) forţa centripetă este invers proporţională cu $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ adică AV fiind dat invers proporţională cu $SP^2 \times PV^3$. Q.E.I.

COROLARUL 1. De aici dacă punctul dat S spre care tinde totdeauna forţa centripetă se află pe circumferinţa acestui cerc, gîndeşte-te la V, forţa centripetă va fi invers proporţională cu puterea a cincea a înălţimii SP.

COROLARUL 2. Forţa cu care corpul P se învîrteşte în cercul $APTV$ în jurul centrului S al forţelor este către forţa cu care acelaşi corp P se poate învîrti în acelaşi cerc şi în acelaşi timp periodic în jurul altui centru oarecare R al forţelor, după cum $RP^2 \times SP$ către cubul dreptei SG, dusă de la primul centru S al forţelor la tangenta PG a orbitei, paralel cu distanţa corpului de la al doilea centru al forţelor.

Căci prin construcţia acestei propoziţii forţa dintîi se raportă către forţa din urmă după cum $RP^2 \times PT^3$ către $SP^3 \times PV^3$, adică după cum $SP \times RP^2$ către $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$, adică (din cauza triunghiurilor asemenea PSG, TPV) către SG^3.

COROLARUL 3. Forţa cu care corpul P se învîrteşte într-o orbită oarecare în jurul centrului S al forţelor, este către forţa cu care acelaşi corp P se poate învîrti în aceeaşi orbită şi în acelaşi timp periodic în jurul altui centru oarecare R al forţelor, după cum solidul $SP \times RP^2$ conţinut între distanţa corpului de la primul centru S al forţelor şi pătratul distanţei lui de la al doilea centru R al forţelor, către cubul dreptei SG, dusă de la primul centru S al forţelor la tangenta PG a orbitei, paralel cu distanţa RP a corpului de la al doilea centru al forţelor. Căci forţele în această orbită la un punct oarecare P al ei sînt aceleaşi ca în cercul de aceeaşi curbură.

PROPOZIŢIA VIII. PROBLEMA III

Presupunînd că un corp se mişcă pe semicercul PQA: să se afle legea forţei centripete îndreptată spre un punct S atît de îndepărtat încît toate liniile PS, RS duse la el să poată fi considerate ca paralele.

De la centrul C al semicercului să ducem semidiametrul CA tăind perpendicular aceste paralele în M şi N, şi să unim CP. Din cauza triunghiurilor asemenea CPM, PZT şi RZQ avem CP^2 către PM^2 după cum PR^2 către QT^2, şi din natura cercului PR^2 este egal cu dreptunghiul $QR \times (RN + QN)$, sau coincizînd punctele P şi Q cu dreptunghiul $QR \times 2PM$. Prin urmare CP^2 este către PM^2 după cum $QR \times 2PM$ către QT^2, astfel că $\frac{QT^2}{QR}$ este egal cu $\frac{2PM^3}{CP^2}$ şi $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ este egal cu $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$. Aşadar (potrivit corolarului 1 şi 5, propoziţia VI), forţa centripetă este invers proporţională cu $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, adică (neglijînd raportul determinat $2\frac{SP^2}{CP^2}$) invers proporţională cu PM^3. Q. E. I.

Acelaşi lucru se deduce uşor şi din propoziţia precedentă.

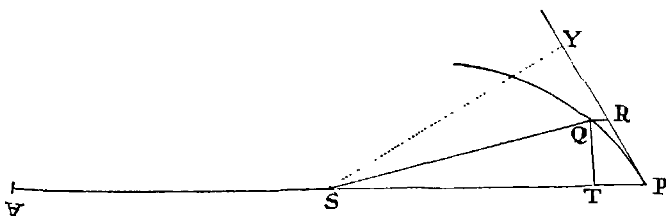
SCOLIE

Şi printr-un raţionament asemănător se află că un corp se mişcă pe o elipsă, sau şi pe o hiperbolă sau parabolă, sub acţiunea unei forţe centripete care este invers proporţională cu cubul ordonatei dirijate spre centrul foarte îndepărtat al forţelor.

PROPOZIŢIA X. PROBLEMA IV

Presupunînd că un corp se mişcă pe spirala PQS care taie toate razele SP, SQ etc. după un unghiu dat: se cere legea forţei centripete îndreptate spre centrul spiralei.

Fie dat unghiul infinit de mic PSQ, şi din cauză că toate unghiurile sînt date, va fi dată figura $SPRQT$ prin gen. Aşadar se dă raportul $\frac{QT}{QR}$



şi avem $\frac{QT^2}{QR}$ precum QT adică (fiind dată aceea figură prin gen) precum SP. Dacă se schimbă oarecum unghiul PSQ se va schimba şi dreapta QR subîntinsă unghiului de contact QPR (potrivit lemei XI) proporţional cu pătratul lui PR sau QT. Deci raportul $\frac{QT^2}{QR}$ va rămîne acelaşi ca mai înainte, adică precum SP. De aceea $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ este proporţional cu SP^3, astfel că (potrivit corolarului 1 şi 5, propoziţia VI), forţa centripetă este invers proporţională cu cubul distanţei SP. Q. E. I.

Aceeaşi altfel

Perpendiculara SY dusă pe tangentă, şi coarda PV ce taie în mod concentric spirala cercului sînt în raporturi date către înălţimea SP; şi de aceea SP^3 este ca $SY^2 \times PV$, adică (potrivit corolarului 3 şi 5, propoziţia VI) invers cu forţa centripetă.

LEMA XII

Toate paralelogramele descrise în jurul unor diametri conjugaţi oarecare ai unei elipse sau hiperbole date sînt egale între ele.

Rezultă din proprietăţile conicelor.

PROPOZIŢIA X. PROBLEMA V

Presupunînd că un corp se mişcă pe o elipsă: se caută legea forţei centripete ce tinde spre centrul elipsei.

Fie CA, CB semiaxele elipselor; GP, DK alţi doi diametri conjugaţi; PF, QT perpendiculare pe diametri, Qv ordonata la diametrul GP; şi dacă

se întregeşte paralelogramul $QvPR$ vom avea (din proprietăţile conicelor) dreptunghiul PvG către Qv^2 după cum PC^2 către CD^2 şi (din cauza triunghiurilor asemenea QvT, PCF) Qv^2 este către QT^2 după cum PC^2 către PF^2 şi compunînd rapoartele, dreptunghiul PvG către QT^2 după cum PC^2 către CD^2 şi PC^2 către PF^2 adică, vG către $\frac{QT^2}{Pv}$ după cum PC^2 către $\frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Să scriem QR în loc de Pv şi (potrivit lemei XII) $BC \times CA$ în loc de $CD \times PF$, precum şi (coincizînd punctele P şi Q) $2PC$ în loc de vG, şi schimbînd între ele extremele şi mezii va fi $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR}$ egal cu $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Aşadar (potrivit corolarului 5, propoziţia VI) forţa centripetă este invers proporţională cu $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$; adică (fiind dat $2BC^2 \times CA^2$) invers proporţională cu $\frac{1}{CP}$; adică proporţională cu distanţa PC. Q. E. I.

Aceeaşi altfel

Pe dreapta PG de cealaltă parte a punctului T să luăm punctul u astfel ca Tu să fie egal cu Tv; apoi să luăm uV care să fie către vG după cum DC^2 către PC^2. Şi fiindcă din proprietăţile conicelor rezultă că Qv^2 se raportă către PvG după cum DC^2 către PC^2, vom avea Qv^2 egal cu $Pv \times uV$. Să adunăm de ambele părţi dreptunghiul uPv şi vom obţine pătratul coardei arcului PQ egal cu dreptunghiul VPv; şi de aceea cercul care atinge secţiunea conică în P şi trece prin punctul Q, va trece şi prin punctul V. Să facem să coincidă punctele P şi Q, şi raportul uV către vG, care este acelaşi cu raportul lui DC^2 către PC^2, va fi ca raportul lui PV către PG, sau PV către $2PC$; şi de aceea PV va fi egal cu $2\frac{DC^2}{PC}$. Deci forţa cu care corpul P se roteşte pe elipsă, va fi invers proporţională cu $2\frac{DC^2}{PC} \cdot PF^2$ (potrivit corolarului 3, propoziţia VI), adică (fiind dat $2DC^2 \cdot PF^2$) direct proporţional cu PC. Q.E.I.

COROLARUL 1. Aşadar forţa este ca distanţa corpului de la centrul elipsei: şi invers dacă forţa este ca distanţa, corpul se va mişca pe o elipsă avînd centrul în centrul forţelor, sau poate pe un cerc în care poate degenera elipsa.

COROLARUL 2. Şi timpurile periodice de revoluţie făcute pe toate elipsele în jurul aceluiaşi centru vor fi egale. Căci acele timpuri pentru elipse asemenea sînt egale (potrivit corolarului 3 şi 8, propoziţia IV), iar pentru

elipsele avînd axa mare comună sînt între ele direct proporţionale cu ariile totale ale elipselor, şi invers proporţionale cu părţile ariilor descrise în acelaşi timp; adică proporţionale cu axele mici şi invers proporţionale cu vitezele corpurilor în vîrfurile principale; adică direct proporţionale cu axele mici, şi invers proporţionale cu ordonatele axei comune; şi de aceea (din cauza egalităţii rapoartelor directe şi inverse) în raport de egalitate.

SCOLIE

Dacă elipsa al cărei centru se îndepărtează la infinit se transformă în parabolă, corpul se va mişca pe această parabolă; şi forţa îndreptată spre centrul ce se află la o distanţă infinită va deveni constantă. Aceasta este teorema lui Galileu. Şi dacă secţiunea parabolică a conului (schimbînd inclinaţia planului faţă de conul secţionat) se transformă în hiperbolă, corpul se va mişca pe perimetrul acesteia cu o forţă centripetă schimbată în centrifugă. Şi după cum într-un cerc sau elipsă dacă forţele sînt îndreptate spre centrul figurii situat pe abscisă, aceste forţe cînd ordonatele cresc sau descresc într-un raport oarecare dat, sau şi cînd se schimbă unghiul de înclinaţie al ordonatelor faţă de abscisă, totdeauna cresc sau descresc în raportul distanţelor de la centru, dacă timpurile periodice rămîn egale; la fel şi în toate figurile cînd ordonatele cresc sau descresc într-un raport oarecare dat, sau unghiul ordonatei variază într-un mod oarecare, menţinîndu-se timpul periodic; forţele ce tind spre un centru oarecare situat pe abscisă în diversele ordonate cresc sau descresc în raportul distanţelor de la centru.

SECŢIUNEA III

Despre mişcarea corpurilor în secţiuni conice excentrice

PROPOZIŢIA XI. PROBLEMA VI

Un corp se roteşte în elipsă: se caută legea forţei centripete îndreptată spre focarul elipsei.

Fie S focarul elipsei. Să se ducă SP tăind atît diametrul DK al elipsei în E, cît şi ordonata Qv în x şi să se întregească paralelogramul $QxPR$. Este evident că EP este egal cu semiaxa mare AC, deoarece ducînd din celălalt focar H al elipsei linia HI paralelă cu EC, din cauză că CS, CH sînt egale, ES, EI de asemenea vor fi egale, astfel că EP este semisuma lui PS, PI adică (HI, PR fiind paralele şi unghiurile IPR, HPZ egale) a lui PS, PH, care împreună sînt egale cu întreaga axă $2AC$. Pe SP să coborîm perpendiculara QT, şi numind L parametrul principal al elipsei (sau $\frac{2BC^2}{AC}$), vom avea $L \times QR$ către $L \times Pv$ după cum QR către Pv, adică după cum PE sau AC către PC; şi $L \times Pv$ către GvP după cum L către Gv; şi GvP către Qv^2 după cum PC^2 către CD^2 şi (potrivit corolarului 2, lema VII) Qv^2 către Qx^2 cînd punctele Q şi P coincid, este un raport de egalitate; şi Qx^2 sau Qv^2 se raportă către QT^2 precum EP^2 către PF^2, adică după cum CA^2 către PF^2 sau (potrivit lemei XII) precum CD^2 către CB^2. Şi înmulţind toate aceste rapoarte $L \times QR$ se raportă către QT^2 precum $AC \times L \times PC^2 \times CD^2$, sau $2CB^2 \times PC^2 \times CD^2$ către $PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, sau după cum $2PC$ către Gv. Dar punctele Q şi P coincizînd $2PC$ şi Gv sînt egale. Deci şi $L \times QR$ şi QT^2 proporţionale cu ele sînt de asemenea egale. Să înmulţim aceste mărimi egale cu $\frac{SP^2}{QR}$ şi va fi $M \times SP^2$ egal cu $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Prin urmare (potrivit corolarului 1 şi 5, propoziţia VI) forţa centripetă este invers proporţională cu $L \times SP^2$, adică invers proporţională cu patratul distanţei SP. Q.E.I.

Aceeaşi altfel

Deoarece forţa îndreptată spre centrul elipsei, cu care corpul P se poate roti în elipsă este (potrivit corolarului 1, propoziţia X) precum distanţa CP

a corpului de la centrul C al elipsei; să ducem CE paralel la tangenta PR a elipsei; și forța cu care același corp P se poate roti în jurul unui alt punct oarecare S al elipsei, dacă CE și PS se întîlnesc în E, va fi ca $\frac{PE^3}{SP^2}$ (potrivit corolarului 3, propoziția VII), adică dacă punctul S este focarul elipsei, și astfel PE este dat, invers proporțional cu SP^2. Q.E.I.

Tot așa de succint cum am tratat problema V referitoare la parabolă și hiperbolă am putea face aici același lucru: în adevăr din cauza importanței problemei și a folosirii în cele ce urmează, nu voi ezita să confirm celelalte cazuri prin demonstrație.

PROPOZIȚIA XII. PROBLEMA VII

Un corp se mișcă pe o iperbolă: se caută legea forței centripete îndreptată spre focarul figurii.

Fie CA, CB semiaxele hiperbolei; PG, KD alți diametri conjugați; PF perpendiculara pe diametrul KD; și Qv ordonata la diametrul GP. Să ducem SP tăind atît diametrul DK în E cît și ordonata Qv în x, și să se întregească paralelogramul $QRPx$. Este evident că EP este egal cu semiaxa transversă AC deoarece, ducînd din celălalt focar H al hiperbolei linia HI paralelă cu EC, fiind CS, CH egale, ES, EI vor fi egale; astfel că EP este semidiferența lui PS, PI, adică (din cauză că IH, PR sînt paralele și unghiurile IPR, HPZ sînt egale) a lui PS, PH, a căror diferență este egală cu axa întreagă $2AC$. Pe SP să coborîm perpendiculara QT. Și numind L parametrul principal al hiperbolei (sau $2\frac{BC^2}{AC}$) va fi $L \times QR$ către $L \times Pv$ după cum QR către Pv, sau Px către Pv, adică (triunghiurile Pxv, PEC fiind asemenea) după cum PE către PC, sau AC către PC. De asemenea va fi $L \times Pv$ către $Gv \times Pv$ după cum L către Gv; și (din proprietățile conicelor) dreptunghiul GvP către

Qv^2 după cum PC^2 către CD^2; şi (potrivit corolarului 2, lema VII) Qv^2 către Qx^2 cînd punctele Q şi P coincid este un raport de egalitate; şi Qx^2 sau Qv^2 este către QT^2 după cum EP^2 către PF^2, adică după cum CA^2 către PF^2, sau (potrivit lemei XII) după cum CD^2 către CB^2: şi înmulţind toate aceste rapoarte $L \times QR$ este către QT^2 după cum $AC \times L \times PC^2 \times CD^2$ sau $2CB^2 \times PC^2 \times CD^2$ către $PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, sau precum $2PC$ către Gv. Dar dacă punctele P şi Q coincid, $2PC$ şi Gv sînt egale. Prin urmare $L \times QR$ şi QT^2 proporţionale cu ele sînt egale. Să înmulţim aceste mărimi egale cu $\frac{SP^2}{QR}$ şi va fi $L \times SP^2$ egal cu $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Prin urmare (potrivit corolarului 1 şi 5, propoziţia VI) forţa centripetă este invers proporţională cu $L \times SP^2$, adică invers proporţională cu pătratul distanţei SP. Q.E.I.

Aceeaşi altfel

Să se afle forţa îndreptată de la centrul C al hiperbolei. Aceasta se va afla proporţional cu distanţa CP. De aici în adevăr (potrivit corolarului 3, propoziţia VII) forţa îndreptată spre focarul S va fi ca $\frac{PE^3}{SP^2}$, adică PE fiind dată, invers proporţională cu SP^2. Q.E.I.

În mod analog se demonstrează, că schimbînd această forţă centripetă în centrifugă corpul se va mişca pe hiperbola opusă.

LEMA XIII

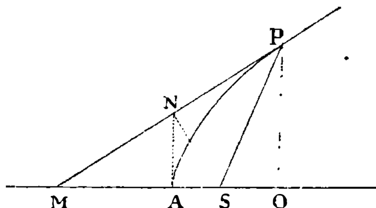
Parametrul parabolei aparţinînd unuia din vîrfuri este cvadruplul distanţei acelui vîrf de la focarul figurii.

Este evident din proprietăţile conicelor.

LEMA XIV

Perpendiculara dusă de la focarul parabolei la tangenta ei este media proporţională între distanţele focarului de la punctul de contact şi de la vîrful principal al figurii.

Căci fie AP parabola, S focarul ei, A vîrful principal, P punctul de contact, PO ordonata la diametrul principal, PM tangenta ce întîlneşte diametrul principal în M, şi SN linia perpendiculară dusă din focar pe tangentă. Să unim AN şi fiindcă MS şi SP, MN şi NP, MA şi AO sînt egale, dreptele AN şi OP vor fi paralele; şi de aceea triunghiul SAN va fi dreptunghic în A, şi asemenea triunghiurilor egale SNM, SNP: deci PS este către SN precum SN către SA. Q.E.D.



COROLARUL 1. PS^2 este către SN^2 precum PS către SA.

COROLARUL 2. Şi fiindcă SA este dat, SN^2 este ca PS.

COROLARUL 3. Şi intersecţia unei tangente oarecare PM cu dreapta SN, dusă perpendicular din focar pe ea, se află pe dreapta AN, care atinge parabola în vîrful principal.

PROPOZIŢIA XIII. PROBLEMA VIII

Un corp se mişcă pe perimetrul parabolei: se caută legea forţei centripete îndreptate spre focarul acestei figuri.

Să rămînem la construcţia lemei şi fie corpul P pe perimetrul parabolei, şi din locul Q, în care corpul urmează să ajungă în momentul imediat următor, să ducem la SP paralela QR şi perpendiculara QT, precum şi Qv paralelă la tangentă, şi întîlnind atît diametrul PG în v cît şi distanţa SP în x. Atunci deoarece triunghiurile Pxv, SPM sînt asemenea şi laturile unuia SM, SP sînt egale, laturile celuilalt Px sau QR şi Pv de asemenea sînt egale. Dar din proprietăţile conicelor ştim că pătratul ordonatei Qv este egal cu dreptunghiul format de parametrul şi segmentul diametrului Pv, adică (potrivit lemei XIII) cu dreptunghiul $4PS \times Pv$ sau $4PS \times QR$; şi punctele P şi Q coincizînd, raportul Qv către Qx (potrivit corolarului 2 lema VII) devine un raport de egalitate. Deci în acel caz Qx^2 este egal cu dreptunghiul $4PS \times QR$. Dar (din cauza asemănării triunghiurilor $Q \times T$, SPN) Qx^2 către QT^2 precum PS^2 către SN^2, adică (potrivit corolarului 1, lema XIV) după cum PS către SA, adică după cum $4PS \times QR$ către $4SA \times QR$, şi de aici (potrivit propoziţiei IX, Cartea a V-a a Elementelor) QT^2 şi $4SA \times QR$ sînt egale. Să se înmulţească aceste mărimi egale cu $\frac{SP^2}{QR}$, şi fie $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ egal cu $SP^2 \times 4SA$: şi de aceea (potrivit corolarului 1 şi 5, propoziţia VI) forţa centripetă este invers proporţională cu $SP^2 \times 4SA$, adică deoarece $4SA$ este dat, invers proporţională cu pătratul distanţei SP. Q.E.I.

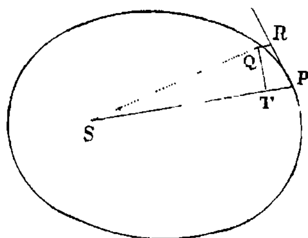
COROLARUL 1. Din ultimele trei propoziţii urmează că dacă un corp oarecare P pleacă din locul P după o dreaptă oarecare PR cu o viteză oarecare, şi în acelaşi timp este acţionată de o forţă centripetă invers proporţională cu pătratul distanţei locurilor de la centru; acest corp se va mişca pe o secţiune conică oarecare avînd focarul în centrul forţelor; şi invers. Căci fiind date focarul şi punctul de contact şi poziţia tangentei, se poate descrie secţiunea conică avînd în acel punct o curbură dată. Dar curbura este dată fiind date forţa centripetă şi viteza corpului: şi două orbite care se ating reciproc nu pot fi descrise cu aceeaşi forţă centripetă şi aceeaşi viteză.

COROLARUL 2. Dacă viteza cu care corpul pleacă din locul său P este aceea cu care se poate descrie linioara PR într-o fracţie oarecare minimă de timp; şi forţa centripetă astfel ca să poată mişca acelaşi corp în acelaşi timp prin spaţiul QR: acest corp se va mişca pe o secţiune conică oarecare, a cărui parametru principal este cantitatea $\frac{QT^2}{QR}$ care este ultima sa stare cînd linioarele PR, QR descresc la infinit. În aceste corolare consider cercul ca o elipsă, şi exceptez cazul cînd corpul cade spre centru pe o dreaptă.

PROPOZIŢIA XIV. TEOREMA VI

Dacă mai multe corpuri se rotesc în jurul unui centru comun, şi forţa centripetă este invers proporţională cu pătratul distanţei locurilor de la centru: zic că parametrii principali ai orbitelor sînt proporţionali cu pătratele ariilor, pe care le descriu corpurile cu razele duse la centru în acelaşi timp.

Căci (potrivit corolarului 2, propoziţia XIII) parametrul L este egal cu cantitatea $\frac{QT^2}{QR}$ care este cea din urmă cînd se confundă punctele P şi Q. Dar linia minimă QR într-un timp dat este proporţională cu forţa centripetă generatoare, adică (prin ipoteză) invers proporţională cu SP^2. Prin urmare $\frac{QT^2}{QR}$ este ca $QT^2 \times SP^2$, adică parametrul L este proporţional cu pătratul ariei $QT \times SP$. Q.E.D.



COROLAR. De aici, aria întreagă a elipsei, şi dreptunghiul proporţional cu ea, cuprins de axe, este ca produsul dintre rădăcina pătrată a parametrului şi timpul periodic. Căci întreaga arie este ca aria $QT \times SP$, descrisă într-un timp dat, înmulţită cu timpul periodic.

PROPOZIŢIA XV. TEOREMA VII

În aceleaşi condiţii, zic că timpurile periodice pe elipse sînt ca puterea 3/2 a axelor mari.

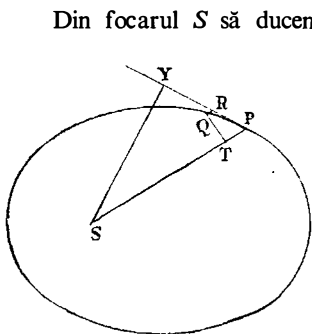
Căci axa mică este media proporţională între axa mare şi latura dreaptă, şi astfel dreptunghiul format de axe este ca produsul rădăcinei pătrate a laturii drepte prin puterea 3/2 a axei mari. Dar acest dreptunghi (potrivit corolarului, propoziţia XIV) este ca produsul rădăcinii pătrate a parametrului cu timpul periodic. Să reducem în ambele părţi raportul rădăcinii pătrate a parametrului şi va rămîne că puterea 3/2 a axei mari este proporţională cu timpul periodic. Q.E.D.

COROLAR. Aşadar timpurile periodice pe elipse sînt aceleaşi şi pe cercurile ai căror diametri sînt egali cu axele mari ale elipselor.

PROPOZIŢIA XVI. TEOREMA VIII

În aceleaşi condiţii şi ducînd la corpuri linii drepte care ating acolo orbitele, şi ducînd de la focarul comun perpendiculare la aceste tangente: zic că vitezele corpurilor sînt ca produsul dintre raportul invers al perpendicularelor şi rădăcina pătrată a parametrilor principali.

Din focarul S să ducem la tangenta PR perpendiculara SY, şi viteza corpului P va fi invers proporţională cu rădăcina pătrată a cantităţii $\frac{SY^2}{L}$. Căci acea viteză este precum arcul cît se poate de mic PQ descris într-o fracţiune dată de timp, adică (potrivit lemei VII) ca tangenta PR, adică deoarece PR este proporţional cu QT şi SP cu SY, ca $\frac{SP \times QT}{SY}$ sau invers proporţională cu SY şi direct proporţională cu $SP \times QT$; şi $SP \times QT$ este ca aria descrisă într-un timp dat, adică (potrivit propoziţiei XIV) ca rădăcina pătrată a parametrului. Q.E.D.



COROLARUL 1. Parametrii principali sînt ca produsul dintre pătratul perpendicularelor şi al vitezelor.

COROLARUL 2. Vitezele corpurilor la distanţele maxime şi minime de la focarul comun sînt invers proporţionale cu distanţele şi direct proporţionale cu rădăcina pătrată a parametrilor principali. Căci acele perpendiculare sînt însăşi distanţele.

COROLARUL 3. Şi de aceea viteza într-o secţiune conică, la distanţa maximă sau minimă de la focar este către viteza pe un cerc la aceeaşi distanţă de la centru ca rădăcina pătrată a parametrului principal către dublul acelei distanţe.

COROLARUL 4. Vitezele corpurilor ce se rotesc pe elipse la distanţe mijlocii de la focarul comun, sînt aceleaşi cu ale corpurilor care se rotesc pe cercuri la aceleaşi distanţe; adică (potrivit corolarului 6, propoziţia IV) invers proporţionale cu rădăcina pătrată a distanţelor. Căci perpendicularele sînt acum semiaxele mici, şi acestea sînt ca medii proporţionale între distanţe şi parametre. Să înmulţim acest raport invers cu rădăcina pătrată a raportului parametrilor şi vom avea rădăcina pătrată a raportului invers al distanţelor.

COROLARUL 5. În aceeaşi figură sau şi în figuri diferite, ai căror parametri principali sînt egali, viteza corpului este invers proporţională cu perpendiculara coborîtă din focar pe tangentă.

COROLARUL 6. Într-o parabolă viteza este invers proporţională cu rădăcina pătrată a distanţei corpului de la focarul figurii; într-o elipsă variază mai mult, într-o hiperbolă mai puţin decît în acest raport. Căci (potrivit corolarului 2, lema XIV) perpendiculara coborîtă din focar pe tangenta parabolei este proporţională cu rădăcina pătrată a distanţei. Într-o hiperbolă, perpendiculara variază mai puţin, într-o elipsă mai mult.

COROLARUL 7. Într-o parabolă viteza corpului la o distanţă oarecare de focar este către viteza corpului ce se roteşte pe un cerc la aceeaşi distanţă

de centru ca rădăcina pătrată din doi către unitate; într-o elipsă este mai mică, într-o iperbolă mai mare decît în acest raport. Căci potrivit corolarului 2 al acestei propoziţii viteza în vîrful parabolei este în acest raport, şi conform corolarului 6 al acesteia şi al propoziţiei IV se păstrează aceeaşi proporţie la toate distanţele. De aici şi pe parabolă viteza este pretutindeni egală cu viteza unui corp ce se roteşte pe un cerc la jumătate distanţă; pe elipsă este mai mică, pe hiperbolă mai mare.

COROLARUL 8. Viteza unui corp ce se roteşte pe o secţiune conică oarecare este către viteza corpului ce se roteşte pe un cerc la distanţa jumătăţii parametrului principal al secţiunii, ca acea distanţă către perpendiculara coborîtă din focar pe tangenta secţiunii. Aceasta este evident din cauza corolarului 5.

COROLARUL 9. De unde fiindcă (potrivit corolarului 6, propoziţia IV) viteza corpului ce se roteşte pe acest cerc, este către viteza corpului ce se roteşte pe un alt cerc oarecare în raport invers cu rădăcina pătrată a distanţelor; în acelaşi fel viteza corpului ce se roteşte pe o secţiune conică va fi către viteza corpului ce se roteşte pe un cerc la aceeaşi distanţă, ca media proporţională între acea distanţă comună şi jumătatea parametrului principal al secţiunii către perpendiculara coborîtă din focarul comun pe tangenta secţiunii.

PROPOZIŢIA XVII. PROBLEMA IX

Presupunînd că forţa centripetă este invers proporţională cu pătratul distanţei locurilor de la centru, şi că valoarea absolută a acelei forţe este cunoscută: se caută linia, pe care o descrie corpul ce porneşte dintr-un loc dat cu o viteză dată după o dreaptă dată.

Forţa centripetă îndreptată spre punctul S, fie aceea cu care corpul p se roteşte pe o orbită oarecare pq dată, şi fie cunoscută viteza acestuia în locul p. Din locul P să pornească după linia PR corpul P cu o viteză dată, şi imediat constrîns de forţa centripetă să devieze de pe ea pe secţiunea conică PQ. Prin urmare dreapta PR o atinge pe aceasta în P. Să presupunem de asemenea că dreapta pr atinge orbita pq în p, şi dacă din S ne închipuim coborîte perpendiculare pe acele tangente, parametrul principal al secţiunii conice va fi (potrivit corolarului 1, propoziţia XVI) către parametrul principal al orbitei ca produsul dintre pătratul raportului perpendicularelor şi pătratul raportului vitezelor, şi de aceea este dat. Fie L parametrul secţiunii conice. Afară de aceea se dă focarul S al aceleiaşi secţiuni conice. Fie unghiul

RPH suplementul unghiului *RPS*; și va fi dată poziția liniei *PH* pe care se află situat celălalt focar *H*. Ducînd pe *PH* perpendicular la *SK*, să ne închipuim dusă semiaxa conjugată *BC*, și va fi $SP^2 - 2KPH + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP+PH}^2 - L \times \overline{SP+PH} = SP^2 + 2\,SPH + PH^2 - L \times \overline{SP+PH}$. Să se adune de ambele părți $2KPH - SP^2 - PH^2 + L \times \overline{SP+PH}$, și va fi $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, sau $SP + PH$ către PH ca $2SP + 2KP$ către L. De unde se scoate *PH* atît ca lungime cît și ca poziție. De aceea dacă viteza corpului în *P* este așa fel ca parametrul *L* să fie mai mic decît $2SP + 2KP$, *PH* va fi de aceeași parte a tangentei *PR* cu linia *PS*; și de aceea figura va fi o elipsă și va fi dată din focarele date *S*, *H* și axa principală $SP + PH$. Dacă viteza corpului este așa de mare, încît parametrul *L* să fie egal cu $2SP + 2KP$, lungimea *PH* va fi infinită; și de aceea figura va fi o parabolă avînd axa *SH* paralelă cu linia *PK*, și de aceea va fi dată. Dar dacă corpul pornește din locul său *P* cu o viteză încă și mai mare lungimea *PH* trebuie luată de cealaltă parte a tangentei; și astfel tangenta trecînd printre focare figura va fi o hiperbolă avînd axa principală egală cu diferența liniilor *SP* și *PH*, și deci va fi dată. Căci dacă corpul în aceste cazuri se rotește pe o secțiune conică astfel aflată, s-a demonstrat în propozițiile XI, XII și XIII că forța centripetă va fi invers proporțională cu pătratul distanței corpului de la centrul *S* al forțelor; și de aceea va fi just determinată linia *PQ* pe care un corp lăsat să plece dintr-un loc dat *P*, cu o viteză dată, în direcția dreptei *PR* de poziție dată o va descrie cu o astfel de forță. Q.E.F.

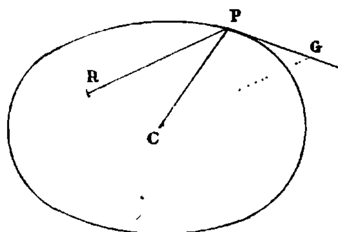
Corolarul 1. De aici în orice secțiune conică dintr-un vîrf principal dat *D*, cu o latură dreaptă *L*, și focarul *S*, se află celălalt focar *H* luînd pe *DH* către *DS* după cum este parametrul către diferența dintre parametru și $4DS$. Căci proporția $SP + PH$ către *PH* precum $2SP + 2KP$ către *L* în cazul acestui corolar, devine $DS + DH$ către *DH* precum $4DS$ către *L* și, separînd, *DS* către *DH* precum $4DS - L$ către *L*.

Corolarul 2. De unde dacă se dă viteza corpului în vîrful principal *D*, se va afla lesne orbita, luînd anume parametrul ei către distanța dublă *DS*, în raportul pătratului vitezei acesteia date către viteza unui corp rotindu-se pe un cerc la distanța *DS* (potrivit corolarului 3, propoziția XVI), apoi *DH* către *DS* precum parametrul către diferența dintre parametru și $4DS$.

Corolarul 3. De aici și dacă corpul se mișcă pe o secțiune conică oarecare, și printr-un impuls oarecare este scos din orbita sa; se poate cunoaște orbita în care după aceea el își continuă cursul. Căci compunînd mișcarea proprie a corpului cu mișcarea pe care ar produce-o impulsul singur, vom avea mișcarea cu care va porni corpul din locul dat al impulsului, după o dreaptă de poziție dată.

Corolarul 4. Și dacă acel corp este perturbat incontinuu de o forță oarecare imprimată din afară, se află repede traiectoria, determinînd schimbările pe care acea forță le imprimă în oarecare puncte, și apreciind din analogia seriei schimbările continue în locurile intermediare.

SCOLIE



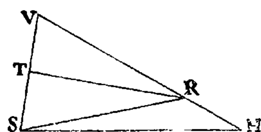
Dacă un corp P sub influenţa unei forţe centripete îndreptată spre un punct oarecare R se mişcă pe perimetrul unei secţiuni conice al cărei centru fie C, şi se caută legea forţei centripete: să ducem CG paralelă cu raza RP şi întîlnind tangenta PG a orbitei în G; şi forţa aceea (potrivit corolarului 1 şi scoliei propoziţiei X, şi corolarului 3, propoziţia VII) va fi ca $\frac{CG^3}{RP^2}$.

SECŢIUNEA IV

Despre aflarea orbitelor eliptice, parabolice şi hiperbolice dintr-un focar dat

LEMA XV

Dacă din cele două focare S, H ale unei elipse sau hiperbole oarecare se duc la un al treilea punct oarecare V, două drepte SV, HV dintre care una HV să fie egală cu axa principală a figurii, adică cu axa pe care se află focarele, iar cealaltă SV să fie înjumătăţită de perpendiculara TR ridicată pe ea în T; perpendiculara TR atinge undeva secţiunea conică: şi viceversa, dacă o atinge, HV va fi egală cu axa principală a figurii.

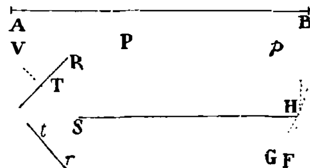


Căci perpendiculara *TR* să taie dreapta *HV* prelungită, dacă ar fi necesar în *R*; şi să unim *SR*. Deoarece *TS*, *TV* sînt egale, vor fi egale şi dreptele *SR*, *VR* şi unghiurile *TRS*, *TRV*. De unde punctul *R* va fi pe secţiunea conică şi perpendiculara *TR* o atinge: şi invers. Q.E.D.

PROPOZIŢIA XVIII. PROBLEMA X

Fiind date focarul şi axele principale să se descrie traiectoriile eliptice şi hiperbolice care vor trece prin punctele date şi ating drepte de poziţie dată.

Fie *S* focarul comun al figurilor; *AB* lungimea axei principale a unei traiectorii oarecare; *P* punctul prin care trebuie să treacă traiectoria; şi *TR* dreapta pe care trebuie să o atingă. În jurul centrului *P* şi cu intervalul *AB—SP*, dacă orbita este elipsă, sau *AB* + *SP*, dacă ea este hiperbolă, ca rază să se descrie cercul *HG*. Pe tangenta *TR* să coborîm perpendiculara *ST*, şi să o prelungim pînă în *V*, astfel ca *TV* să fie egală cu *ST*; şi din centrul *V* şi intervalul *AB* ca rază să descriem cercul *FH*. În această metodă fie că se dau două puncte *P*, *p*, fie două tangente *TR*, *tr*, fie punctul *P* şi tangenta *TR*, trebuie să descriem două cercuri. Fie *H* intersecţia lor comună, şi din focarele *S*, *H*, cu acea axă dată să descriem traiectoria. Zic că s-a făcut. Căci traiectoria descrisă (fiindcă *PH* + *SP* în elipsă, şi *PH—SP* în hiperbolă este egal cu axa) va trece prin punctul *P*, şi (potrivit lemei de mai sus) atinge dreapta *TR*. Şi din acelaşi motiv ea sau va trece prin cele două puncte *P*, *p*, sau atinge cele două drepte *TR*, *tr*. Q.E.F.

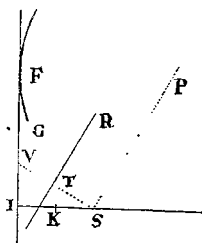


PROPOZIŢIA XIX. PROBLEMA XI

În jurul unui focar dat să se descrie o traiectorie parabolică ce va trece prin puncte date, şi va atinge drepte date prin poziţie.

Fie *S* focarul, *P* punctul şi *TR* tangenta traiectoriei ce trebuie descrisă. Din centrul *P*, cu intervalul *PS* să descriem cercul *FG*. De la focar să ducem

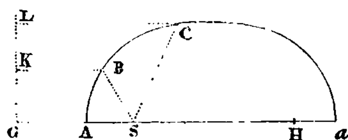
pe tangentă perpendiculara *ST*, și să o prelungim pînă la *V*, așa fel ca *TV* să fie egal cu *ST*. În același fel trebuie să descriem un alt cerc *fg*, dacă se dă un alt punct *p*; sau trebuie să aflăm un alt punct *v*, dacă se dă o altă tangentă *tr*; apoi să ducem dreapta *IF* care să atingă două cercuri *FG*, *fg*, dacă se dau două puncte *P*, *p*, sau să treacă prin două puncte *V*, *v*, dacă se dau două tangente *TR*, *tr*, sau să atingă cercul *FG* și să treacă prin punctul *V*, dacă se dă punctul *P* și tangenta *TR*. Pe *FI* să ducem perpendiculara *SI* și să o înjumătățim în *K*; și cu axa *SK*, și cu vîrful principal *K* să descriem parabola. Zic că s-a făcut. Căci fiind egale *SK* și *IK*, *SP* și *FP*, parabola va trece prin punctul *P*; și (potrivit lemei XIV, corolarul 3) deoarece *ST* și *TV* sînt egale și unghiul *STR* este drept, ea atinge dreapta *TR*. Q.E.F.



PROPOZIȚIA XX. PROBLEMA XII

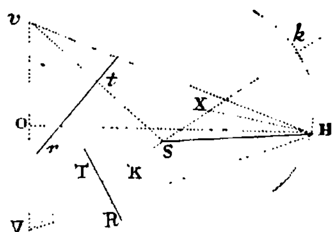
În jurul unui focar dat să se descrie o traiectorie oarecare de un gen dat, care va trece prin puncte date și va atinge drepte de poziție dată.

CAZUL 1. Fiind dat focarul *S*, se cere să descriem traiectoria *ABC* prin două puncte *B*, *C*. Deoarece genul traiectoriei este dat, va fi dat raportul axei principale către distanța focarelor. În acel raport să luăm *KB* către *BS* și *LC* către *CS*. În jurul centrelor *B*, *C*, cu intervalele *BK*, *CL* să descriem două cercuri, și pe dreapta *KL*, care să le atingă în *K* și *L*, să ducem perpendiculara *SG*, și să o tăiem în *A* și *a*, astfel ca să fie *GA* către *AS* și *Ga* către *aS* precum *KB* către *BS*, și cu axa *Aa*, vîrfurile *A*, *a* să descriem traiectoria. Zic că s-a făcut. Căci fie *H* un alt focar al figurii descrise, și fiindcă *GA* este către *AS* precum *Ga* către *aS*, va fi prin separare *Ga*—*GA* sau *Aa* către *aS*—*AS* sau *SH* în același raport, și de aceea în raportul pe care-l are axa principală a figurii ce trebuie descrisă către distanța dintre focarele ei; și de aceea figura descrisă este de același gen cu cea cerută a fi descrisă. Și fiindcă *KB* către *BS* și *LC* către *CS* sînt în același raport, această figură va trece prin punctele *B*, *C*, după cum este evident din proprietățile conicelor.

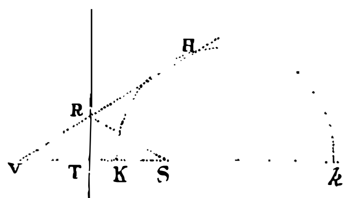


CAZUL 2. Fiind dat focarul *S*, se cere să descriem traiectoria care atinge undeva două drepte *TR*, *tr*. Să ducem din focar pe tangente perpendicularele *ST*, *St*, și să le prelungim pînă la *V*, *v* astfel ca *TV*, *tv* să fie egale cu *TS*, *ts*. Să bisectăm *Vv* în *O*, și să ducem perpendiculara *OH*, și să tăiem dreapta *VS* prelungită la infinit în *K* și *k*, astfel ca să fie *VK* către *KS* și *Vk* către *kS* precum axa principală a traiectoriei ce trebuie descrisă către distanța focarelor. Pe diametrul *Kk* să se descrie cercul tăind pe *OH* în *H*; și cu focarele *S*, *H*, și axa principală egală cu *VH* să descriem traiectoria. Zic că s-a făcut. Căci să bisectăm *Kk* în *X* și să unim *HX*, *HS*, *HV*, *Hv*. Deoarece *VK* este către *KS* precum *Vk* către *kS*; și prin compunere

precum $VK+Vk$ către $KS+kS$; și prin separare precum $Vk-VK$ către $kS-KS$ adică precum $2VX$ către $2KX$ și $2KX$ către $2SX$, și de aceea precum VX către HX și HX către SX, triunghiurile VXH, HXS, vor fi asemenea, și de aceea VH va fi către SH ca VX către HX, și de aceea precum VK către KS. Așadar axa principală VH a traiectoriei descrise are același raport către distanța SH a focarelor, pe care-l are axa principală a traiectoriei ce trebuie descrisă către distanța focarelor și de aceea este de același gen. Mai mult, fiindcă VH, vH sînt egale cu axa principală, și VS, vS sînt bisectate perpendicular de dreptele TR, tr, este clar (potrivit lemei XV) că acele drepte ating traiectoria descrisă. Q.E.F.

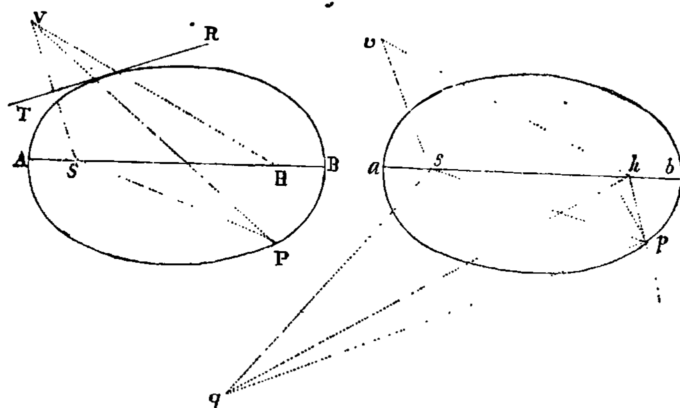


CAZUL 3. Fiind dat focarul S, se cere să descriem traiectoria care atinge drepta TR în punctul dat R. Pe dreapta TR să ducem perpendiculara ST, și să o prelungim pînă în V, astfel ca TV să fie egal cu ST. Să unim VR și să tăiem dreapta VS prelungită la infinit în K și k, astfel ca să fie VK către SK și Vk către Sk precum axa principală a elipsei ce trebuie descrisă către distanța focarelor; și cu cercul descris pe diametrul Kk să tăiem dreapta VR prelungită pînă în H și cu focarele S, H, axa principală egală cu dreapta VH, să se descrie traiectoria. Zic, că s-a făcut. Căci din cele demonstrate în cazul al doilea este clar că VH este către SH precum VK către SK, și de aceea precum axa principală a traiectoriei ce trebuie descrisă către distanța focarelor ei, și de aceea traiectoria descrisă este de același gen cu aceea ce trebuie descrisă, iar din proprietățile conicelor este evident că dreapta TR care bisectează unghiul VRS atinge traiectoria în punctul R. Q.E.F.



CAZUL 4. În jurul focarului S se cere să descriem traiectoria APB, care să atingă dreapta TR și să treacă printr-un punct oarecare P dat în afara tangentei, și care să fie asemenea figurii apb, descrisă cu axa principală ab și focarele s, h. Să ducem pe tangenta TR perpendiculara ST, și să o prelungim pînă în V, așa fel ca TV să fie egal cu ST. Să luăm unghiurile hsq, shq egale cu VSP, SVP; și cu centrul q și intervalul care este către ab precum SP către VS să descriem cercul ce taie figura apb în p. Să unim sp și să ducem SH care să fie către sh precum SP către sp, și care formează unghiul PSH egal cu psh și unghiul VSH egal cu psq. În urmă cu focarele S, H, și axa principală AB egală cu distanța VH, să descriem secțiunea conică. Zic că s-a făcut. Căci, dacă se duce sv care să fie către sp precum este sh către sq, și care să formeze unghiul vsp egal cu unghiul hsq și unghiul vsh egal cu unghiul psq, triunghiurile svh, spq vor fi asemenea, și de aceea vh va fi către pq precum sh către sq adică (din cauza asemănării triunghiurilor VSP, hsq) după cum este VS către SP sau ab către pq. Prin urmare vh și ab sînt egale. Apoi fiindcă triunghiurile VSH, vsh sînt asemenea

VH este către *SH* precum *vh* către *sh*, adică axa secţiunii conice deja descrise către distanţa focarelor ei, precum axa *ab* către distanţa *sh* a focarelor; şi de aceea figura deja descrisă este asemenea figurii *apb*. Dar această

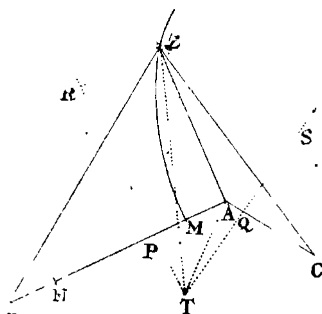


figură trece prin punctul *P*, deoarece triunghiul *PSH* este asemenea cu triunghiul *psh*; şi fiindcă *VH* este egală cu axa, şi *VS* este bisectată perpendicular de dreapta *TR*, ea atinge dreapta *TR*. Q.E.F.

LEMA XVI

Din trei puncte date să se ducă la al patrulea care nu este dat trei drepte ale căror diferenţe sînt sau date sau nule.

CAZUL 1. Fie *A*, *B*, *C*, punctele date şi *Z* punctul al patrulea care trebuie aflat; fiind dată diferenţa liniilor *AZ*, *BZ*, punctul *Z* se va afla pe hiperbola ale cărei focare sînt *A* şi *B*, şi axa principală diferenţa dată. Fie acea axă *MN*. Să luăm *PM* către *MA* precum *MN* către *AB*, şi ducînd *PR* perpendiculară la *AB*, şi coborînd *ZR* perpendiculară la *PR*; din natura acestei hiperbole va fi *ZR* către *AZ* precum *MN* către *AB*. Printr-un raţionament analog punctul *Z* se va afla pe o altă hiperbolă, ale cărei focare sînt *A*, *C* şi axa principală diferenţa dintre *AZ* şi *CZ*, şi se poate duce *QS* perpendiculară pe *AC*, la care dacă dintr-un punct oarecare *Z* al acestei hiperbole se duce normala *ZS*, aceasta va fi către *AZ* precum diferenţa dintre *AZ* şi *CZ* către *AC*. Prin urmare sînt date rapoartele lui *ZR* şi *ZS* către *AZ*, şi de aceea se dă raportul între *ZR* şi *ZS* unul faţă de altul; astfel că dacă dreptele *RP*, *SQ* se întîlnesc în *T*, şi se duc *TZ* şi *TA*, figura *TRZS* va fi dată după genul ei, şi dreapta *TZ* pe care se află undeva punctul *Z*, va fi



dată după poziţie. Va fi dată şi dreapta *TA*, ca şi unghiul *ATZ*; şi fiind date rapoartele lui *AZ* şi *TZ* către *ZS*, va fi dat raportul lor unul către altul; şi deci va fi dat triunghiul *ATZ*, al cărui vîrf este punctul *Z*. Q.E.I.

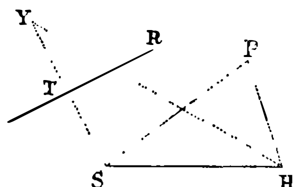
CAZUL 2. Dacă două din trei linii, spre pildă *AZ* şi *BZ* sînt egale, ducem aşa fel dreapta *TZ*, ca ea să bisecteze dreapta *AB*; apoi aflăm triunghiul *ATZ* ca mai sus.

CAZUL 3. Dacă toate trei sînt egale, punctul *Z* se va afla în centrul cercului ce trece prin punctele *A*, *B*, *C*. Q.E.I.

Această lemă a problemelor se rezolvă şi prin cartea *De Tactionibus* a lui Apollonius refăcută de Vieta.

PROPOZIŢIA XXI. PROBLEMA XIII

Să se descrie în jurul unui focar dat o traiectorie care va trece prin puncte date şi va atinge drepte pe poziţie dată.

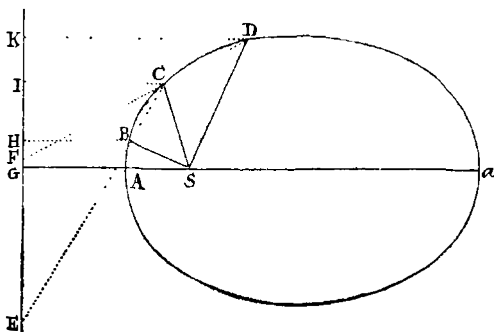


Fie dat focarul *S*, punctul *P*, şi tangenta *TR*, şi să se afle celălalt focar *H*. Să ducem pe tangentă perpendiculara *ST* şi să o prelungim pînă în *Y*, aşa ca *TY* să fie egal cu *ST*, şi *YH* va fi egal cu axa principală. Să unim *SP*, *HP* şi va fi *SP* diferenţa dintre *HP* şi axa principală. În acest mod dacă se dau mai multe tangente *TR*, sau mai multe puncte *P*, se va ajunge la tot atîtea linii *YH*, sau *PH*, duse din punctele amintite *Y* sau *P* la focarul *H*, care sau sînt egale cu axele, sau diferă de ele prin lungimile date *SP*, şi de aceea sau sînt egale între ele, sau au diferenţe date; şi de aici potrivit lemei de mai sus, este dat celălalt focar *H*. Avînd însă focarele împreună cu lungimea axei (care sau este *YH*; sau, dacă traiectoria este o elipsă, $PH + SP$; iar dacă este hiperbolă, $PH - SP$) vom avea traiectoria. Q.E.I.

SCOLIE

Cînd traiectoria este o hiperbolă, sub numele acestei hiperbole nu înţeleg hiperbola opusă. Căci corpul înaintînd în mişcarea sa nu poate trece pe hiperbola opusă.

Cazul cînd se dau trei puncte se rezolvă mai repede în felul următor.



Fie punctele date *B*, *C*, *D*. Unind *BC*, *CD* să le prelungim pînă în *E*, *F*, astfel ca *EB* să fie către *EC* precum *SB* către *SC*, şi *FC* către *FD* precum *SC* către *SD*. Pe *EF* dusă şi prelungită să coborîm

normalele *SG*, *BH*, şi pe *GS* prelungită la infinit să luăm *GA* către *AS* şi *Ga* către *aS* precum *HB* către *BS* şi va fi *A* vîrful, şi *Aa* axa principală a traiectoriei: care după cum *GA* va fi mai mare, egală, sau mai mică decît *AS*, va fi elipsă, parabolă, sau hiperbolă; punctul *a* în primul caz căzînd de aceeaşi parte a liniei *GF* cu punctul *A*; în al doilea caz depărtîndu-se la infinit; în al treilea căzînd de partea contrară a liniei *GF*. Căci dacă se duc pe *GF* perpendicularele *CI*, *DK*; va fi *IC* către *HB* precum *EC* către *EB*, adică precum *SC* către *SB*; şi la rîndul său *IC* către *SC* precum *HB* către *SB* sau precum *GA* către *SA*. Şi printr-un raţionament analog, se va demonstra că *KD* este în acelaşi raport către *SD*. Prin urmare punctele *B*, *C*, *D*, se află pe o secţiune conică descrisă în jurul focarului *S* astfel ca toate dreptele duse din focarul *S* la diversele puncte ale secţiunii să fie către perpendicularele coborîte din acele puncte pe dreapta *GF* în acel raport dat.

Printr-o metodă mult asemănătoare, ilustrul geometru de la Hire, în Cartea a VIII-a, propoziţia XXV a conicelor sale dă o soluţie acestei probleme.

SECŢIUNEA V

Despre aflarea orbitelor cînd nici unul din focare nu este dat

LEMA XVII

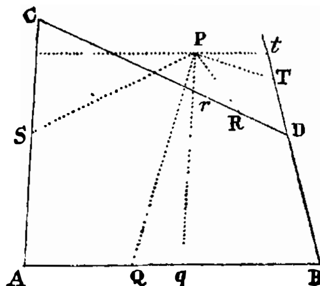
Dacă dintr-un punct oarecare P al unei secţiuni conice date se duc la cele patru laturi AB, CD, AC, DB prelungite la infinit ale unui trapez oarecare ABDC înscris în acea secţiune conică, respectiv tot atîtea drepte PQ, PR, PS, PT sub unghiuri date: dreptunghiul PQ × PR format de dreptele duse la două laturi opuse va fi către dreptunghiul PS × PT format de dreptele duse la celelalte două laturi opuse într-un raport dat.

CAZUL 1. Să presupunem mai întîi că liniile duse la laturile opuse sînt paralele cu una oarecare din laturile rămase, anume *PQ* şi *PR* cu latura *AC*, şi *PS* şi *PT* cu latura *AB*. Şi afară de aceasta două din laturile opuse anume *AC* şi *BD*, să fie paralele între ele. Şi dreapta, care bisectează acele laturi paralele, va fi unul din diametrii secţiunii conice şi va bisecta şi pe *RQ*. Fie *O* punctul care bisectează pe *RQ*, şi va fi *PO* ordonata la acel diametru. Să prelungim *PO* pînă în *K*, aşa ca *OK* să fie egal cu *PO*, şi va fi *OK* ordonata la partea contrară diametrului. Aşadar deoarece punctele *A*, *B*, *P* şi *K* sînt pe secţiunea conică, şi *PK* taie pe *AB* după un unghi dat, va fi (potrivit propoziţiilor 17, 19, 21 şi 23, Cartea a III-a a conicelor lui A p o l l o n i u s), dreptunghiul *PQK* către dreptunghiul *AQB* într-un raport dat. Dar *QK* şi *PR* sînt egale, ca fiind diferenţele egalelor *OK*, *OP* şi *OQ*, *OR* şi de aici şi dreptunghiurile *PQK* şi *PQ* × *PR* sînt egale; şi de aceea dreptunghiul *PQ* × *PR* este către dreptunghiul *AQB*, adică către dreptunghiul *PS* × *PT* într-un raport dat. Q.E.D.

CAZUL 2. Să presupunem apoi că laturile opuse *AC* şi *BD* ale trapezului nu sînt paralele. Să ducem *Bd* paralelă cu *AC* şi întîlnind atît dreapta *ST* în *t* cît şi secţiunea conică în *d*. Să unim *Cd* tăind *PQ* în *r*, şi să ducem la *PQ* paralela *DM* tăind pe *Cd* în *M* şi pe *AB* în *N*. Apoi din cauza triunghiurilor asemenea *BTt*, *DBN*, este *Bt* sau *PQ* către *Tt* precum *DN* către *NB*. Astfel şi *Rr* este către *AQ* sau *PS* precum *DM* către *AN*. Prin urmare înmulţind antecedentele cu antecedente şi consecventele cu consecvente, după cum dreptunghiul *PQ* × *Rr* este către dreptunghiul *PS* × *Tt*, tot aşa dreptunghiul *NDM* către dreptunghiul *ANB*, şi (potrivit cazului 1) tot aşa drept-

unghiul $PQ \times Pr$ către dreptunghiul $PS \times Pt$, şi separînd tot aşa dreptunghiul $PQ \times PR$ către dreptunghiul $PS \times PT$. Q.E.D.

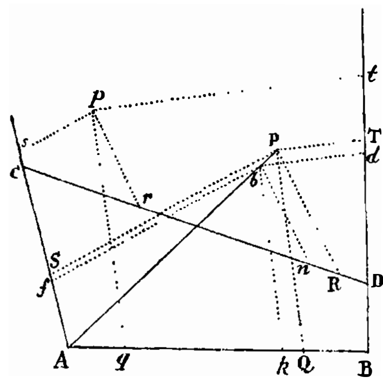
CAZUL 3. Să presupunem în sfîrşit că cele patru linii PQ, PR, PS, PT nu sînt paralele cu laturile AC, AB, ci au o înclinare oarecare faţă de ele. Rînd pe rînd să ducem Pq, Pr paralele cu AC; şi Ps, Pt paralele cu AB; şi fiind date unghiurile triunghiurilor PQq, PRr, PSs, PTt, vor fi date rapoartele lui PQ către Pq, PR către Pr, PS către Ps, şi PT către Pt; şi la fel rapoartele compuse $PQ \times PR$ către $Pq \times Pr$, şi $PS \times PT$ către $Ps \times Pt$. Dar din cele demonstrate mai sus, raportul lui $Pq \times Pr$ către $Ps \times Pt$ este dat: deci şi raportul lui $PQ \times PR$ către $PS \times PT$. Q.E.D.



LEMA XVIII

Presupunînd aceleaşi condiţii, dacă dreptunghiul $PQ \times PR$ format de dreptele duse la cele două laturi opuse ale trapezului se află într-un raport dat către dreptunghiul $PS \times PT$ format de dreptele duse la celelalte două laturi; punctul P, de la care se duc liniile se găseşte pe secţiunea conică descrisă în jurul trapezului.

Prin punctele A, B, C, D şi printr-unul oarecare din numărul infinit de puncte P, anume p, să ne închipuim descrisă o secţiune conică; zic că punctul P o atinge totdeauna. Dacă negi, uneşte pe AP care taie această secţiune conică în alt punct decît în P, dacă aceasta este cu putinţă, anume în b. Prin urmare dacă din aceste puncte p şi b se duc la laturile trapezului sub unghiuri date dreptele pq, pr, ps, pt, şi bk, bn, bf, bd; va fi precum $bk \times bn$ către $bf \times bd$, tot aşa (potrivit lemei XVII) $pq \times pr$ către $ps \times pt$, şi astfel (prin ipoteză) $PQ \times PR$ către $PS \times PT$. Şi din cauza asemănării trapezelor $bkAf$, $PQAS$, după cum bk către bf, tot aşa PQ către PS. De aceea împărţind termenii propoziţiei precedente la termenii corespunzători ai acesteia, va fi bn către bd precum PR către PT. Prin urmare trapezele isoscele $Dnbd$, $DRPT$ sînt asemenea şi de aceea diagonalele lor Db, DP coincid. Aşadar b se află la intersecţia dreptelor AP, DP şi de aceea coincide cu punctul P. De aceea punctul P, oriunde se ia, se află pe secţiunea conică considerată. Q.E.D.

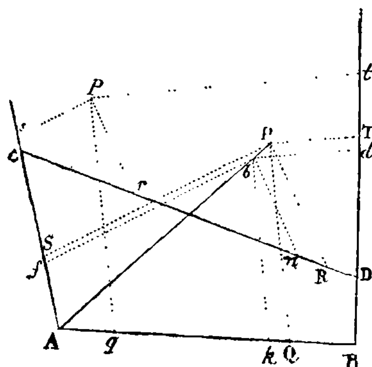


COROLAR. De aici dacă trei drepte PQ, PR, PS se duc din punctul comun P sub unghiuri date respectiv la tot atîtea alte drepte AB, CD, AC date prin poziţie, şi fie dreptunghiul format de două drepte duse $PQ \times PR$ către pătratul celei de a treia PS într-un raport dat: punctul P, de la care

se duc dreptele se va afla pe secțiunea conică ce atinge liniile *AB*, *CD* în *A* și *C*, și invers. Căci, să facem să coincidă linia *BD* cu linia *AC* menținînd poziția celor trei *AB*, *CD*, *AC*; apoi să facem să coincidă și linia *PT* cu linia *PS*: și dreptunghiul $PS \times PT$ va deveni PS^2 și dreptele *AB*, *CD*, care tăiau curba în punctele *A* și *B*, *C* și *D*, nu mai pot tăia curba în acele puncte ce coincid, ci o ating numai.

SCOLIE

Numele de secțiune conică în această lemă se ia în înțeles larg; cuprinzînd atît secțiunea rectilinie care trece prin vîrful conului cît și pe cea circulară paralelă cu baza. Căci dacă punctul *p* cade pe dreapta, care unește punctele *A* și *B* sau *C* și *B*, secțiunea conică se transformă într-o pereche de drepte, dintre care una este dreapta pe care cade punctul *p*, și cealaltă este dreapta care unește celelalte două din cele patru puncte. Dacă două unghiuri opuse ale trapezului luate împreună sînt egale cu două unghiuri drepte, și la laturile lui se duc fie perpendicular fie sub unghiuri oarecare egale patru linii *PQ*, *PR*, *PS*, *PT*, și fie dreptunghiul format de două drepte duse $PQ \times PR$ egal cu dreptunghiul format de celelalte două $PS \times PT$, secțiunea conică devine cerc. Același rezultat se obține, dacă se duc patru linii sub unghiuri oarecare, și dreptunghiul format de două drepte duse $PQ \times PR$ este către dreptunghiul format de celelate două $PS \times PT$ precum dreptunghiul format de sinusurile unghiurilor *S*, *T*, sub care se duc ultimele două *PS*, *PT* către dreptunghiul format de sinusurile unghiurilor *Q*, *R*, sub care se duc primele două *PQ*, *PR*. În celelalte cazuri locul punctului *P* va fi una din cele trei figuri, care de obicei se numesc secțiuni conice. Însă în locul trapezului *ABCD* se poate substitui un patrulater, ale cărui două laturi opuse se taie reciproc la fel cu diagonalele. Dar dintre cele patru puncte *A*, *B*, *C*, *D* unul sau două se pot îndepărta la infinit și în acest fel laturile figurii, care converg la acele puncte pot deveni paralele: în care caz secțiunea conică va trece prin celelalte puncte, și se va îndepărta la infinit în direcțiile paralelelor.

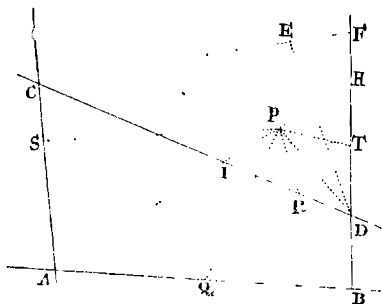


LEMA XIX

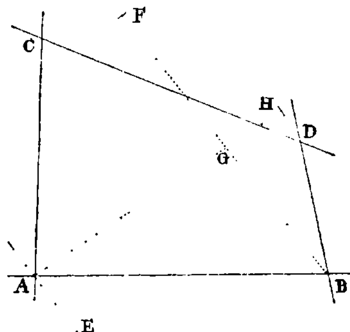
Să se afle punctul P, de la care dacă se duc patru drepte PQ, PR, PS, PT respectiv la tot atîtea alte drepte de poziție dată AB, CD, AC, BD sub unghiuri date, dreptunghiul format de două drepte duse PQ, PR să fie către dreptunghiul format de alte două PS, PT într-un raport dat.

Să presupunem liniile *AB*, *CD*, la care se duc două drepte *PQ*, *PR* cuprinzînd unul dintre dreptunghiuri, se întîlnesc cu alte două linii de poziție

dată în punctele A, B, C, D. De la unul oarecare dintre ele A să ducem dreapta oarecare AH în care vrem să aflăm punctul P. Ea taie liniile opuse BD, CD, anume BD în H şi CD în I, şi fiind date toate unghiurile figurii, vor fi date rapoartele PQ către PA şi PA către PS, şi deci raportul lui PQ către PS. Scoţîndu-l pe acesta din raportul dat $PQ \times PR$ către $PS \times PT$, raportul lui PR către PT va fi dat, şi alăturînd rapoartele date PI către PR, şi PT către PH raportul lui PI către PH va fi dat şi astfel punctul şi P. Q.E.I.



COROLARUL 1. De aici se poate duce o tangentă la un punct oarecare D al locului punctelor în număr infinit P. Căci coarda PD, dacă punctele P şi D coincid, adică, dacă AH trece prin punctul D, devine tangentă. În care caz, ultimul raport al disparentelor IP şi PH se va afla ca mai sus. De aceea să ducem CF paralelă la AD, întîlnind pe BD în F, şi să o tăiem în E în acelaşi raport ultim, şi DE va fi tangentă, deoarece CF şi disparenta IH sînt paralele, şi tăiate la fel în E şi P.



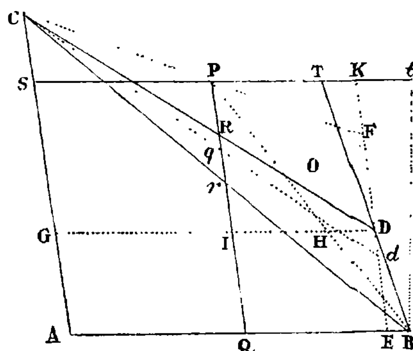
COROLARUL 2. De aici se poate defini şi locul tuturor punctelor P. Prin unul oarecare din punctele A, B, C, D, anume A, să ducem tangenta AE a locului, şi printr-un alt punct oarecare B să ducem paralela BF la tangentă întîlnind locul în F. Şi să aflăm punctul F cu ajutorul lemei XIX. Să bisectăm BF în G, şi linia nedefinită AG dusă va fi poziţia diametrului la care BG şi FG sînt ordonate. Această AG întîlneşte locul în H, şi AH va fi diametrul sau latura transversă, către care parametrul va fi ca BG^2 către $AG \times GH$. Dacă AG nu întîlneşte locul nicăieri, linia AH fiind infinită, locul va fi o parabolă, şi parametrul ei corespunzînd diametrului AG va fi $\frac{BG^2}{AG}$. Dacă însă ea îl întîlneşte undeva, locul va fi o hiperbolă, cînd punctele A şi H sînt situate de aceleaşi părţi ale lui G; şi elipsă, cînd G este intermediar, dacă nu cumva unghiul AGB este drept, şi în acelaşi timp BG^2 egal cu dreptunghiul AGH, în care caz se va obţine un cerc.

Şi astfel în acest corolar se arată nu calculul, ci compoziţia geometrică a problemei celor vechi asupra celor patru linii începută de E u c l i d şi continuată de A p o l l o n i u s, pe care o căutau cei vechi.

LEMA XX

Dacă două unghiuri opuse A și P ale unui paralelogram oarecare ASPQ își au vîrfurile pe o secțiune oarecare în punctele A și P; și laturile unuia din unghiuri prelungite la infinit AQ, AS întîlnesc secțiunea conică în B și C; iar din punctele de întîlnire B și C se duc la un al cincilea punct oarecare D al secțiunii conice, două drepte BD, CD întîlnind celelalte două laturi, ale paralelogramului, PS, PQ prelungite la infinit, în T și R: părțile tăiate ale laturilor PR și PT vor fi totdeauna între ele într-un raport dat. Și invers, dacă acele părți tăiate sînt între ele într-un raport dat, punctul D se află pe o secțiune conică ce trece prin cele patru puncte A, B, C, P.

CAZUL 1. Să unim *BP*, *CP* și din punctul *D* să ducem două drepte *DG*, *DE*, dintre care cea dintîi *DG* fie paralelă cu *AB* și să întîlnească pe *PB*, *PQ*, *CA* în *H*, *I*, *G*; cealaltă *DE* să fie paralelă cu *AC* și să întîlnească pe *PC*, *PS*, *AB* în *F*, *K*, *E*: și va fi (potrivit lemei XVII) dreptunghiul $DE \times DF$ în raport dat către $DG \times DH$. Dar *PQ* este către *DE* (sau *IQ*) precum *PB* către *HB*, și astfel precum *PT* către *DH*; și la rîndul său *PQ* către *PT* precum *DE* către *DH*. Dar și *PR* către *DF* este precum *RC* către *DC*, și de aceea precum *PS* către *DG* (sau *IG*), și la rîndul său *PR* către *PS* precum *DF* către *DG*; și compunînd rapoartele dreptunghiului $PQ \times PR$ către dreptunghiul $PS \times PT$ precum dreptunghiul $DE \times DF$ către dreptunghiul $DG \times DH$, și deci într-un raport dat. Dar *PQ* și *PS* sînt date și de aceea este dat raportul lui *PR* către *PT*. Q.E.D.



CAZUL 2. Dar dacă *PR* și *PT* se presupun a fi unul către celălalt într-un raport dat, atunci refăcînd un raționament analog, urmează că dreptunghiul $DE \times DF$ este într-un raport dat către dreptunghiul $DG \times DH$, și de aceea punctul *D* (potrivit lemei XVIII) se află pe secțiunea conică ce trece prin punctele *A*, *B*, *C*, *P*. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă se duce *RC* tăind pe *PQ* în *r* și pe *PT* se ia *Pt* către *Pr* în raportul pe care-l are *PT* către *PR*: *Bt* va fi tangentă la secțiunea conică în punctul *B*. Căci să ne închipuim că punctul *D* coincide cu punctul *B*, astfel că coarda *BD* dispărînd, *BT* devine în tangentă; și *CD* și *BT* coincid cu *CB* și *Bt*.

COROLARUL 2. Și viceversa dacă *Bt* e tangentă, și într-un punct oarecare *D* al secțiunii conice se întîlnesc *BD*, *CD*; va fi *PR* către *PT* precum *Pr* către *Pt*. Și invers, dacă *PR* este către *PT* precum *Pr* către *Pt*, atunci *BD*, *CD* se întîlnesc într-un punct oarecare *D* al secțiunii conice.

COROLARUL 3. O secțiune conică nu taie altă secțiune conică în mai mult de patru puncte. Căci, dacă se poate, să presupunem că două secțiuni

conice trec prin cinci puncte *A*, *B*, *C*, *P*, *O;* şi dreapta *BD* le taie în punctele *D*, *d*, şi pe *PQ* o taie dreapta *Cd* în *q*. Prin urmare *PR* se raportă către *PT* precum *Pq* către *PT;* de unde *PR* şi *Pq* sînt reciproc egale, contrar ipotezei.

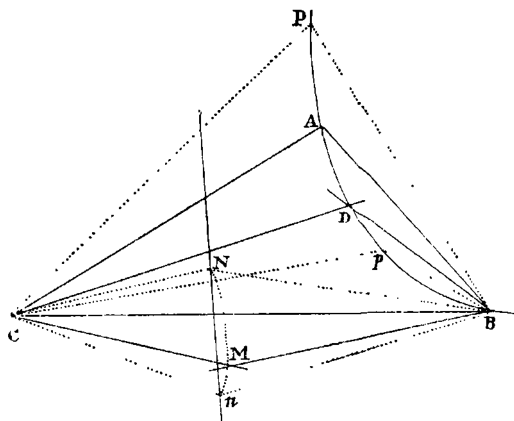
LEMA XXI

Dacă două drepte mobile şi infinite BM, CM duse prin două puncte date B, C ca poli, descriu prin punctul lor de întîlnire M o a treia dreaptă de poziţie dată MN; şi se duc alte două drepte infinite BD, CD făcînd cu precedentele două în punctele date B, C unghiurile date MBD, MCD: zic că aceste două BD, CD descriu prin punctul lor de întîlnire D o secţiune conică ce trece prin punctele B, C. Şi viceversa, dacă dreptele BD, CD descriu prin punctul lor de întîlnire D o secţiune conică ce trece prin punctele B, C, A iar unghiul DBM este totdeauna egal cu unghiul dat ABC, şi unghiul DCM totdeauna egal cu unghiul dat ACB: punctul M se află pe o dreaptă de poziţie dată.

Căci fie dat pe dreapta *MN* punctul *N*, şi cînd punctul mobil *M* coincide cu cel imobil *N*, să coincidă punctul mobil *D* cu cel imobil *P*. Să unim *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, şi din punctul *P* să ducem dreptele *PT*, *PR* întîlnind pe *BD*, *CD* în *T* şi *R*, şi făcînd unghiul *BPT* egal cu unghiul dat *BNM*, şi unghiul *CPR* egal cu unghiul dat *CNM*. Aşadar fiindcă (prin ipoteză) unghiurile *MBD*, *NBP* sînt egale, ca şi unghiurile *MCD*, *NCP;* să scădem unghiurile comune *NBD* şi *NCD*, şi vor rămîne egale *NBM* şi *PBT*, *NCM* şi *PCR;* şi astfel triunghiurile *NBM*, *PBT* sînt asemenea, ca şi triunghiurile *NCM*, *PCR*. Din care cauză *PT* este către *NM* precum *PB* către *NB*, şi *PR* către *NM* precum *PC* către *NC*. Dar punctele *B*, *C*, *N*, *P* sînt imobile. Prin urmare *PT* şi *PR* au un raport dat către *NM*, şi de aceea un raport dat între ele; şi astfel (potrivit lemei XX) punctul *D*, intersecţia perpetuă a dreptelor mobile *BT* şi *CR*, se află pe secţiunea conică ce trece prin punctele *B.C.P.* Q.E.D.

Şi invers, dacă punctul mobil *D* se află pe secţiunea conică ce trece prin punctele date *B*, *C*, *A*, şi fie unghiul *DBM* totdeauna egal cu unghiul dat *ABC*, şi unghiul *DCM* totdeauna egal cu unghiul dat *ACB*, şi cînd punctul *D* coincide succesiv cu două puncte imobile oarecare *p*, *P* ale secţi-

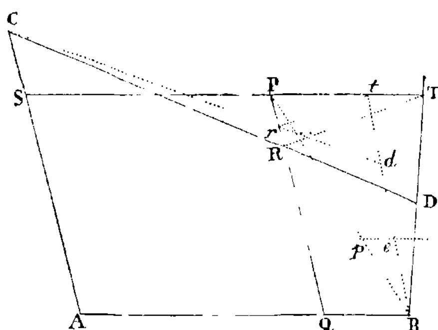
unii, punctul mobil *M* coincide succesiv cu două puncte imobile *n*, *N*: prin aceleași *N*, *n* se duce dreapta *nN*, și aceasta va fi locul perpetuu al punctului mobil *M*. Căci dacă se poate, să presupunem că punctul *M* descrie o linie curbă oarecare. Prin urmare punctul *D* să se afle pe secțiunea conică ce trece prin cinci puncte *B*, *C*, *A*, *p*, *P*, cînd punctul *M* se află totdeauna pe linia curbă. Dar din cele deja demonstrate punctul *D* se află de asemenea pe secțiunea conică ce trece prin aceleași cinci puncte *B*, *C*, *A*, *p*, *P*, cînd punctul *M* se află incontinuu pe linia dreaptă. Deci două secțiuni conice vor trece prin aceleași cinci puncte, contrar corolarului 3 al lemei XX. Așadar e absurd să presupunem că punctul *M* descrie o linie curbă. Q.E.D.



PROPOZIȚIA XXII. PROBLEMA XIV

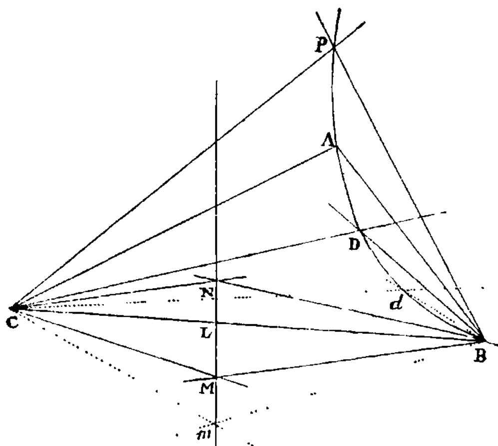
Să se descrie o traiectorie prin cinci puncte date.

Se dau cinci puncte *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. De la unul oarecare din ele *A* să ducem la alte două oarecare *B*, *C*, care să se numească poli, dreptele *AB*, *AC* și paralelele la acestea *TPS*, *PRQ* prin punctul al patrulea *P*. Apoi de la cei doi poli *B*, *C*, să ducem prin punctul al cincilea *D* două drepte infinite *BDT*, *CRD* întîlnind pe cele duse mai de curînd *TPS*, *PRQ* (cea dintîi pe cea dintîi și cea din urmă pe cea din urmă) în *T* și *R*. Apoi de la dreptele *PT*, *PR*, ducînd dreapta *tr* paralelă cu *TR*, să tăiem din dreptele *PT*, *PR* dreptele oarecare *Pt*, *Pr* proporționale cu înșiși *PT*, *PR*; și dacă *Bt*, *Cr*, duse prin capetele lor *t*, *r* și polii *B*, *C* se întîlnesc în *d*, acel punct *d* se va afla pe traiectoria căutată. Căci punctul *d* (potrivit lemei XX) se află pe secțiunea conică ce trece prin cele patru puncte *A*, *B*, *C*, *P*; și liniile *Rr*, *Tt* dispărînd, punctul *d* coincide cu punctul *D*. Prin urmare secțiunea conică trece prin cele cinci puncte *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. Q.E.D.



Aceeaşi altfel

Din punctele date să unim trei oarecare *A*, *B*, *C*; şi rotind în jurul a două dintre ele *B*, *C* ca poli, unghiurile de mărime dată *ABC*, *ACB*, să se aplice braţele *BA*, *CA*, mai întîi la punctul *D*, apoi la punctul *P*, şi să se noteze punctele *M*, *N* în care se întretaie celelalte braţe *BL*, *CL* în ambele cazuri. Să ducem dreapta infinită *MN*, şi să rotim unghiurile mobile în jurul polilor lor *B*, *C* în aşa fel ca intersecţia braţelor *BL*, *CL* sau *BM*, *CM*, care fie *m*, să cadă totdeauna pe dreapta infinită *MN*; şi intersecţia braţelor *BA*, *CA*, sau *BD*, *CD*, care fie *d*, va descrie traiectoria căutată *PADdB*. Căci punctul *d* (potrivit lemei XXI) se află pe secţiunea conică ce trece prin punctele *B*, *C*; şi cînd punctul *m* se apropie de punctele *L*, *M*, *N*, punctul *d* (prin construcţie) se apropie de punctele *ADP*. Şi astfel va fi descrisă secţiunea conică ce trece prin cele cinci puncte *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. Q.E.F.

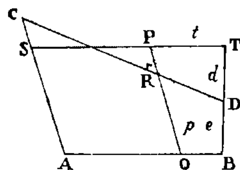


COROLARUL 1. De aici se poate duce lesne o dreaptă, care să atingă traiectoria căutată într-un punct oarecare dat *B*. Să apropiem punctul *d* de punctul *B*, şi dreapta *Bd* devine tangenta căutată.

COROLARUL 2. De unde se pot afla şi centrele traiectoriilor, diametrii, şi laturile drepte, ca în corolarul 2 al lemei XIX.

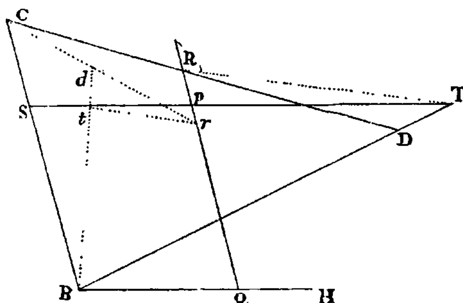
SCOLIE

Construcţia de mai sus devine ceva mai simplă unind *B*, *P*, şi luînd pe ea, prelungită dacă e necesar, *Bp* către *BP* precum *PR* către *PT*; şi ducînd prin *p* dreapta infinită *pe* paralelă cu *SPT*, şi luînd pe ea totdeauna *pe* egal cu *Pr*; şi ducînd dreptele *Be*, *Cr* concurente în *d*. Căci fiindcă *Pr* către *Pt*, *PR* către *PT*, *pB* către *PB*, *pe* către *Pt* sînt în acelaşi raport, *pe* şi *Pr* vor fi totdeauna egale. Prin această metodă punctele traiectoriei se află foarte repede, dacă nu cumva preferăm ca în construcţia a doua să descriem curba în mod mecanic.



PROPOZIŢIA XXIII. PROBLEMA XV

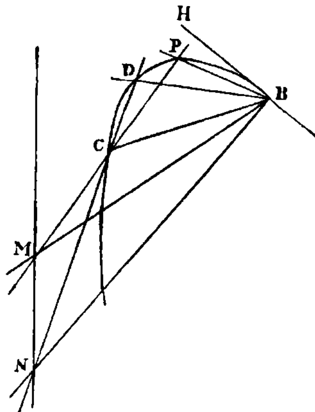
Să se descrie o traiectorie ce va trece prin patru puncte date şi atinge o dreaptă de poziţie dată.



CAZUL 1. Fie dată tangenta *HB* punctul de contact *B*, şi alte trei puncte *C*, *D*, *P*. Să unim *BC*, şi ducînd *PS* paralelă cu dreapta *BH*, şi *PQ* paralelă cu dreapta *BC*, să întregim paralelogramul *BSPQ*. Să ducem *BD* tăind pe *SP* în *T*, şi *CD* tăind pe *PQ* în *R*. În sfîrşit ducînd paralela oarecare *tr* la *TR*, din *PQ*, *PS* să tăiem *Pr*, *Pt* proporţionale respectiv cu *PR*, *PT*; şi punctul de întîlnire *d* al dreptelor duse *Cr*, *Bt* (potrivit lemei XX) va cădea totdeauna pe traiectoria descrisă.

Aceeaşi altfel

Să rotim atît unghiul de mărime dată *CBH* în jurul polului *B*, cît şi o rază oarecare rectilinie şi prelungită în ambele direcţii *DC* în jurul polului *C*. Să notăm punctele *M*, *N*, în care braţul *BC* al unghiului taie raza, cînd celălalt braţ *BH* se întîlneşte cu acea rază în punctele *P* şi *D*. Apoi pe dreapta infinită dusă *MN* să se întîlnească totdeauna raza *CP* sau *CD* şi braţul *BC* al unghiului, şi punctul de întîlnire al celuilalt braţ *BH* cu raza va desena traiectoria căutată.



Căci dacă în construcţiile problemei de mai sus punctul *A* se apropie de punctul *B*, liniile *CA* şi *CB* coincid, şi linia *AB* în ultima sa poziţie va fi tangenta *BH*; şi de aceea construcţiile făcute acolo devin identice cu construcţiile descrise aici. Deci punctul de întîlnire al braţului *BH* cu raza va desena secţiunea conică ce trece prin punctele *C*, *D*, *P* şi tangentă la dreapta *BH* în punctul *B*. Q.E.F.

CAZUL 2. Fie date patru puncte *B*, *C*, *D*, *P* situate în afara tangentei *HI*. Să le unim două cîte două prin liniile *BD*, *CP* concurente în *G*, şi întîlnind tangenta în *H* şi *I*. Să tăiem tangenta în *A*, aşa fel ca *HA* către *IA*, să fie precum este dreptunghiul format de media proporţională între *CG* şi *GP* şi media proporţională între *BH* şi *HD*, către dreptunghiul format

de media proporţională între DG şi GB şi media proporţională între PI şi IC; şi A va fi punctul de contact. Căci dacă paralela HX dusă la dreapta PI taie traiectoria în punctele oarecare X şi Y: punctul A va trebui aşezat (după proprietăţile conicelor) în aşa fel ca HA^2 către AI^2 să fie într-un raport compus din raportul dreptunghiului XHY către dreptunghiul BHD, sau al dreptunghiului CGP către dreptunghiul DGB, şi din raportul dreptunghiului BHD către dreptunghiul PIC. Însă o dată aflat punctul de contact A, traiectoria va fi descrisă ca în primul caz. Q.E.F.

Dar punctul A se poate lua fie între punctele H şi I, fie în afara lor; şi de aceea traiectoria poate fi descrisă în două. feluri.

PROPOZIŢIA XXIV. PROBLEMA XVI

Să se descrie o traiectorie, care va trece prin trei puncte date şi va atinge două drepte de poziţie dată.

Fie date tangentele HI, KL, şi punctele B, C, D. Prin două puncte oarecare B, D, să ducem dreapta infinită BD întîlnind tangentele în punctele H, K. Apoi şi prin alte două puncte oarecare C, D să ducem dreapta infinită CD întîlnind tangentele în punctele I, L. Să tăiem dreptele astfel duse în R şi S, aşa fel ca să fie HR către KR precum media proporţională a lui BH şi HD către media proporţională a lui BK şi KD; şi IS către LS precum media proporţională a lui CI şi ID către media proporţională a lui CL şi LD. Să tăiem însă după voie fie între punctele K şi H, I şi L, fie în afara lor; să ducem apoi RS tăind tangentele în A şi P, şi vor fi A şi P puncte de contact. Căci dacă presupunem că A şi P sînt puncte de contact situate undeva pe tangente; şi printr-unul oarecare I dintre punctele H, I, K, L, situat pe una dintre cele două tangente HI ducem dreapta IY paralelă cu cealaltă tangentă KL, care întîlneşte curba în X şi Y, şi pe aceasta luăm IZ medie proporţională între IX şi IY: în conformitate cu proprietăţile conicelor, vom avea dreptunghiul XIY sau IZ^2 către LP^2 precum dreptunghiul CID către dreptunghiul CLD, adică (prin construcţie) după cum SI^2 către SL^2 şi de aceea IZ către LP precum SI către SL. Aşadar punctele S, P, Z sînt situate pe o dreaptă. Mai departe tangentele întîlnindu-se în G, vom

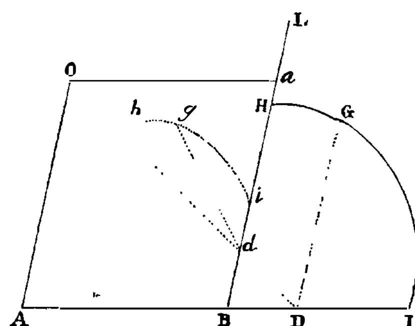
avea (din proprietățile conicelor) dreptunghiul XIY sau IZ^2 către IA^2 precum GP^2 către GA^2, și de aceea IZ către IA precum GP către GA. Prin urmare punctele P, Z și A sînt pe o dreaptă, astfel că și punctele S, P și A se află pe o dreaptă. Și prin același raționament se demonstrează că punctele R, P și A sînt pe o dreaptă. Deci punctele de contact A și P se află pe dreapta RS. Însă o dată aflate aceste puncte traiectoria se va descrie ca în primul caz al problemei de mai sus. Q.E.F.

În această propoziție, și în cazul 2 al propoziției de mai sus construcțiile sînt aceleași, fie că dreapta XY taie traiectoria în X și Y, fie că nu o taie; și ele nu depind de această tăiere. Dar dacă se demonstrează construcțiile cînd acea dreaptă taie traiectoria, se cunosc construcțiile cînd nu o taie; și de aceea pentru a scurta demonstrațiile nu le mai amintesc.

LEMA XXII

Să se transforme figurile în alte figuri de același gen.

Să presupunem că trebuie transformată o figură oarecare HGI. Să ducem după voie două drepte paralele AO, BL tăind o a treia oarecare de poziție dată AB în A și B, și dintr-un punct oarecare G al figurii să ducem la dreapta AB o dreaptă oarecare GD, paralelă cu OA. Apoi dintr-un punct oarecare O, dat pe dreapta OA, să se ducă la punctul D dreapta OD, întîlnind pe BL în d și din punctul de întîlnire să se ridice dreapta dg cuprinzînd cu dreapta BL un unghi dat oarecare, și avînd către Od același raport pe care-l are DG către OD; și va fi g în noua figură hgi punctul corespunzător punctului G. Din aceeași cauză diversele puncte ale primei figuri vor da tot atîtea puncte ale noii figuri. Să ne închipuim așadar că punctul G parcurge cu o mișcare continuă toate punctele primei figuri, atunci și punctul g cu aceeași mișcare continuă va parcurge toate punctele noii figuri și o va descrie. Pentru a face distincție să numim DG prima ordonată, dg noua ordonată; AD prima abscisă, ad noua abscisă; O polul, OD raza tăietoare, OA prima rază ordonată, și Oa (cu care se completează paralelogramul $OABa$) noua rază ordonată.



Zic că, dacă punctul G se află pe linia dreaptă de poziție dată, punctul g de asemenea se va afla pe linia dreaptă de poziție dată. Dacă punctul G se va afla pe secțiunea conică, punctul g se va afla de asemenea pe secțiunea conică. Aici număr cercul printre secțiunile conice. Mai departe dacă punctul G se află pe o linie de ordinul al treilea analitic, punctul g se va afla pe o linie tot de ordinul al treilea; și tot așa cu liniile curbe de ordin superior. Două linii pe care se află punctele G, g vor fi totdeauna de același ordin analitic. Căci după cum ad este către OA tot așa Od către

OD, *dg* către *DG*, şi *AB* către *AD;* şi de aceea *AD* este egal cu $\frac{OA \times AB}{ad}$, şi *DG* este egal cu $\frac{OA \times dg}{ad}$. Acum dacă punctul *G* se află pe o linie dreaptă, şi de aceea într-o ecuaţie oarecare, prin care se exprimă o relaţie între abscisa *AD* şi ordonata *DG*, acele nedeterminate *AD* şi *DG* nu se urcă mai sus de o singură dimensiune, scriind în această ecuaţie $\frac{OA \times AB}{ad}$ în loc de *AD*, şi $\frac{OA \times dg}{ad}$ în loc de *DG*, se va obţine o nouă ecuaţie în care noua abscisă *ad* şi noua ordonată *dg* se urcă numai la o singură dimensiune, şi care astfel reprezintă o linie dreaptă. Dar dacă *AD* şi *DG*, sau una dintre ele, s-ar urca la două dimensiuni în prima ecuaţie, la fel se urcă *ad* şi *dg* la două dimensiuni în ecuaţia a doua. Şi tot aşa în trei sau mai multe dimensiuni. Nedeterminatele *ad*, *dg* în ecuaţia a doua şi *AD*, *DG* în prima se urcă totdeauna la acelaşi număr de dimensiuni, şi de aceea liniile, pe care se află punctele *G*, *g*, sînt de acelaşi ordin analitic.

Zic, afară de aceasta, că dacă o dreaptă oarecare atinge linia curbă din prima figură; această dreaptă transferată în acelaşi fel cu curba în noua figură atinge acea linie curbă în noua figură; şi invers. Căci dacă două puncte oarecare ale unei curbe se apropie unul de altul şi coincid în prima figură, aceleaşi puncte transferate se vor apropia unul de altul şi vor coincide în noua figură; şi dreptele care unesc aceste puncte, devin în acelaşi timp tangentele curbelor în ambele figuri.

Demonstraţiile acestor afirmaţii se pot face într-un fel mai geometric. Dar e mai bine să fiu scurt.

Aşadar dacă o figură rectilinie trebuie să fie transmutată în alta, e deajuns să transferăm intersecţiile dreptelor din care ea constă, şi să ducem prin ele în noua figură linii drepte. Dar dacă se cere să transmutăm una curbilinie, trebuie să transferăm punctele, tangentele şi celelalte linii drepte, prin care se defineşte linia curbă. Această lemă serveşte însă la soluţionarea problemelor mai grele, transmutînd figurile propuse în altele mai simple. Căci drepte oarecare convergente se transformă în paralele, luînd ca prima rază ordonată o linie dreaptă oarecare, ce trece prin punctul de convergenţă; şi aceasta pentru că în acest fel punctul de convergenţă se îndepărtează la infinit; iar linii paralele sînt acelea, care nu se întîlnesc niciodată. Însă după ce problema se rezolvă în figura cea nouă; dacă această figură prin operaţii inverse se transformă în figura primă vom avea soluţia căutată.

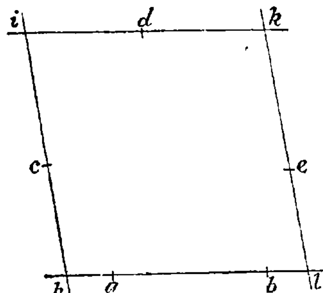
Această lemă mai este utilă şi în soluţionarea problemelor solidelor. Căci de cîte ori intervin două secţiuni conice prin a căror intersecţie se poate rezolva problema, e permis să transformăm una dintre ele, fie că e hiperbolă fie că e parabolă, în elipsă: apoi elipsa se transformă uşor în cerc. La fel dreapta şi secţiunea conică în construcţia problemelor plane se transformă în dreaptă şi cerc.

PROPOZIŢIA XXV. PROBLEMA XVII

Să se descrie o traiectorie, ce va trece prin două puncte date, şi atinge trei drepte de poziţie dată.

Prin intersecţia a două tangente oarecare una cu alta, şi prin intersecţia tangentei a treia cu dreapta, ce trece prin cele două puncte date, să ducem

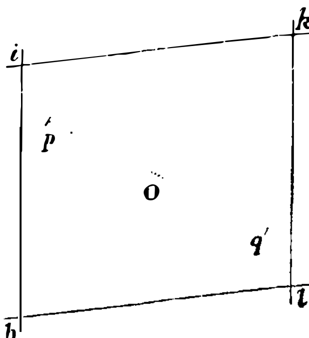
o dreaptă infinită; și luînd-o ca prima rază ordonată să transformăm figura, conform lemei de mai sus, într-o figură nouă. În această figură cele două tangente devin paralele între ele, și a treia tangentă va fi paralelă cu dreapta ce trece prin cele două puncte date. Fie *hi*, *kl* cele două tangente paralele, *ik* tangenta a treia, și *hl* dreapta paralelă cu aceasta trecînd prin punctele *a*, *b*, prin care trebuie să treacă secțiunea conică în această figură nouă, și *hikl* paralelogramul completat. Să tăiem dreptele *hi*, *ki*, *kl*, în *c*, *d*, *e*, în așa fel ca *hc* către latura al cărei pătrat este dreptunghiul *ahb*, *ic* către *id*, și *ke* către *kd* să fie precum suma dreptelor *hi* și *kl* către suma celor trei linii, dintre care prima este dreapta *ik* și celelalte două sînt laturile ale căror pătrate sînt dreptunghiurile *ahb* și *alb*: și *c*, *d*, *e* vor fi punctele de contact. Căci din proprietățile conicelor pătratul lui *hc* către dreptunghiul *ahb* și pătratul lui *ic* către pătratul lui *id*, și pătratul lui *ke* către pătratul lui *kd*, și pătratul lui *el* către dreptunghiul *alb* sînt în același raport; și de aceea *hc* către latura al cărei pătrat este *ahb*, *ic* către *id*, *ke* către *kd* și *el* către latura al cărei pătrat este *alb* sînt în raportul rădăcinii pătrate a aceluia, și compunînd, în raportul dat al tuturor antecedentelor *hi* și *kl* către toate consecventele, care sînt latura al cărei pătrat este dreptunghiul *ahb*, și dreapta *ik*, și latura al cărei pătrat este dreptunghiul *alb*. Prin urmare din acel raport dat avem punctele de contact *c*, *d*, *e* în figura cea nouă. Prin operațiile inverse ale ultimei leme aceste puncte se transferă în figura primă, și acolo (conform problemei XIV) se va descrie traiectoria. Q.E.F. De altfel în mod analog după cum punctele *a*, *b* se află fie între punctele *h*, *l*, fie înafară, trebuie să luăm punctele *c*, *d*, *e* fie între punctele *h*, *i*, *k*, *l*, fie în afară. Dacă vreunul din punctele *a*, *b* cade între punctele *h*, *l*, și celălalt în afară, problema e imposibilă.



PROPOZIȚIA XXVI. PROBLEMA XVIII

Să se descrie o traiectorie ce va trece printr-un punct dat și va atinge patru drepte de poziție dată.

Din intersecția comună a două tangente oarecare să ducem la intersecția comună a celorlalte două o dreaptă infinită, și luînd aceasta ca primă rază ordonată să transformăm figura (conform lemei XXII) într-o figură nouă, și două cîte două tangente, care se întîlneau pe prima rază ordonată devin acum paralele. Fie acestea *hi*, și *kl*, *ik* și *hl* cuprinzînd paralelogramul *hikl*. Și fie *p* în această nouă figură punctul corespunzător punctului dat în prima figură. Prin centrul *O* al figurii să ducem *pq* și, *Og* fiind egal cu



Op, *q* va fi celălalt punct prin care trebuie să treacă secțiunea conică în această nouă figură. Prin operația inversă a lemei XXII transferă acest punct în figura primă, și acolo vor fi două puncte prin care trebuie descrisă traiectoria. Într-adevăr prin ea se poate descrie traiectoria conform problemei XVII. Q.E.F.

LEMA XXIII

Dacă două drepte de poziție dată AC, BD se termină în punctele date A, B, și au între ele un raport dat, iar dreapta CD, care unește punctele nedeterminate C, D se taie după un raport dat în K: zic că punctul K se va afla pe o dreaptă de poziție dată.

Căci să presupunem că dreptele *AC*, *BD* se întîlnesc în *E* și pe *BE* să luăm *BG* către *AE* precum *BD* către *AC*, și fie *FD* totdeauna egal cu dreapta dată *EG*; și prin construcție va fi *EC* către *GD*, adică către *EF*, precum *AC* către *BD*, și deci în raportul dat, și de aceea triunghiul *EFC* va fi dat ca gen. Să tăiem *CF* în *L* așa fel ca *CL* către *CF* să fie în raportul lui *CK* către *CD*; și fiindcă acel raport e dat, va fi dat și triunghiul *EFL* ca gen; și de aceea punctul *L* se va afla pe dreapta *EL* de poziție dată. Să unim *LK*, și triunghiurile *CLK*, *CFD* vor fi asemenea; și fiind dat *FD* și fiind dat raportul lui *LK* către *FD*, va fi dat *LK*. Să luăm *EH* egal ca acesta, și *ELKH* va fi totdeauna un paralelogram. Deci punctul *K* este situat pe latura *HK* de poziție dată a acelui paralelogram. Q.E.D.

COROLAR. Fiind dată figura *EFLC* ca gen, cele trei drepte, *EF*, *EL* și *EC*, adică *GD*, *HK* și *EC*, au între ele rapoarte date.

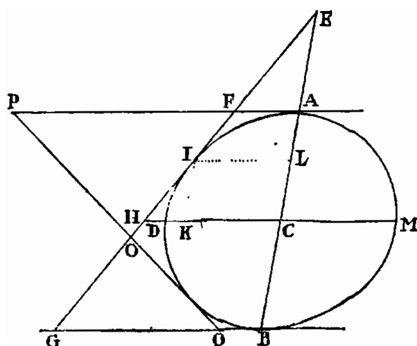
LEMA XXIV

Dacă trei drepte, dintre care două să fi paralele și de poziție dată, ating o secțiune conică oarecare: zic că semidiametrul secțiunii paralel cu cele două, este media proporțională între segmentele acestora cuprinse între punctele de contact și tangenta a treia.

Fie *AF*, *GB* două paralele atingînd secțiunea conică *ADB* în *A* și *B*; *EF* dreapta a treia atingînd secțiunea conică în *I*, și întîlnind tangentele de mai sus în *F* și *G*; și fie *CD* semidiametrul paralel cu tangentele figurii; zic că *AF*, *CD*, *BG* sînt continuu proporționale.

Căci dacă diametrii conjugați *AB*, *DM* întîlnesc tangenta *FG* în *E* și *H*, și se taie reciproc în *C*, și se întregește paralelogramul *IKCL*; din natura secțiunilor conice va fi precum *EC* către *CA* tot așa *CA* către *CL*,

și tot așa separînd $EC - CA$ către $CA - CL$, sau EA către AL, și compunînd EA către $EA + AL$ sau EL după cum EC către $EC + CA$ sau EB; și deci din cauza asemănării triunghiurilor EAF, ELI, ECH, EBG, AF către LI precum CH către BG. Tot astfel din natura secțiunilor conice, LI sau CK către CD precum și CD către CH, și de aceea prin înmulțirea celor două proporții AF către CD după cum CD către BG. Q.E.D.



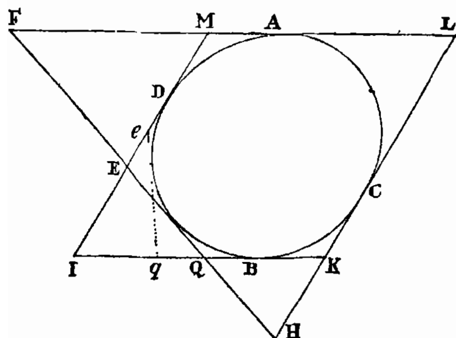
COROLARUL 1. De aici dacă două tangente FG, PQ întîlnesc tangentele paralele AF, BG în F și G, P și Q, și se întretaie în O;, prin înmulțirea celor două proporții va fi AF către BQ după cum AP către BG, și separînd după cum FP către GQ, și de aceea după cum FO către OG.

COROLARUL 2. De unde cele două drepte PG, FQ, duse prin punctele P și G, F și Q se întîlnesc pe dreapta ACB ce trece prin centrul figurii și punctele de contact A, B.

LEMA XXV

Dacă cele patru laturi ale unui paralelogram prelungite la infinit ating o secțiune conică oarecare, și sînt tăiate de o a cincea tangentă oarecare; însă se iau abscisele a două laturi oarecare coterminale terminate la unghiurile opuse ale paralelogramului; zic că fiecare absciză este către latura din care este tăiată, precum partea celeilalte laturi coterminale aflătoare între punctul de contact și a treia latură către cealaltă abscisă.

Să presupunem că cele patru laturi ML, IK, KL, MI ale paralelogramului $MLIK$ ating secțiunea conică în A, B, C, D și că tangenta a cincea FQ taie aceste laturi în F, Q, H și E; și se iau abscisele ME, KQ ale laturilor MI, KI sau abscisele KH, MF ale laturilor KL, ML: zic că ME este către MI precum BK către KQ; și KH către KL precum AM către MF. Căci potrivit corolarului întîi al lemei de mai sus ME este către EI precum AM sau BK către BQ, și compunînd ME către MI precum BK către KQ. Q.E.D. La fel KH către HL precum BK sau AM către AF, și separînd KH către KL precum AM către MF. Q.E.D.



COROLARUL 1. De aici dacă se dă paralelogramul *IKLM*, descris în jurul unei secțiuni conice date, va fi dat dreptunghiul *KQ* × *ME*, precum și dreptunghiul egal cu acesta *KH* × *MF*. Căci acele dreptunghiuri vor fi egale din cauza asemănării triunghiurilor *KQH*, *MFE*.

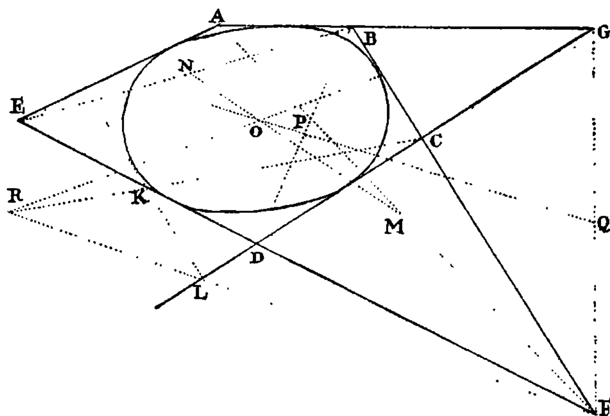
COROLARUL 2. Și dacă se duce o a șasea tangentă *eq* întîlnind tangentele *KI*, *MI* în *q* și *e*; dreptunghiul *KQ* × *ME* va fi egal cu dreptunghiul *Kq* × *Me*; și va fi *KQ* către *Me* precum *Kq* către *ME*, și separînd precum *Qq* către *Ee*.

COROLARUL 3. De unde și dacă *Eq*, *eQ* se unesc și se bisectează, și se duce o dreaptă prin punctele de înjumătățire, aceasta va trece prin centrul secțiunii conice. Căci deoarece *Qq* este către *Ee* precum *KQ* către *ME*, dreapta va trece prin mijlocul tuturor dreptelor *Eq*, *eQ*, *MK* (potrivit lemei XXIII) și mijlocul dreptei *MK* este centrul secțiunii.

PROPOZIȚIA XXVII. PROBLEMA XIX

Să se descrie o traiectorie care atinge cinci drepte de poziție dată.

Fie date prin poziția lor tangentele *ABG*, *BCF*, *GCD*, *FDE*, *EA*. Să bisectăm în *M* și *N* diagonalele *AF*, *BE* ale figurii patrulatere *ABFE* cuprinsă de patru oarecare dintre ele, și (potrivit corolarului 3 al lemei XXV) dreapta *MN* dusă prin punctele de înjumătățire va trece prin centrul traiectoriei. Să bisectăm din nou în *P* și *Q* diagonalele (ca să zic așa) *BD*, *GF* ale figurii patrulatere *BGDF* cuprinsă de alte patru tangente oarecare: și dreapta *PQ* dusă prin punctele de înjumătățire va trece prin centrul traiectoriei. Prin

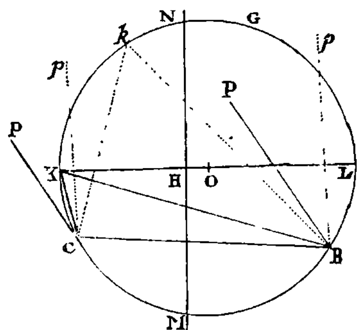


urmare centrul va fi dat în punctul de întîlnire al acestor bisectoare. Fie acela *O*. Să ducem *KL* paralelă la o tangentă oarecare *BC*, la o astfel de distanță încît centrul *O* să fie așezat la mijloc între paralele, și dreapta dusă *KL* să atingă traiectoria ce trebuie descrisă. Să presupunem că aceasta taie alte două tangente oarecare *GCD*, *FDE* în *L* și *K*. Prin punctele de întîlnire *C* și *K*, *F* și *L* ale acestor tangente neparalele *CL*, *FK* cu paralelele

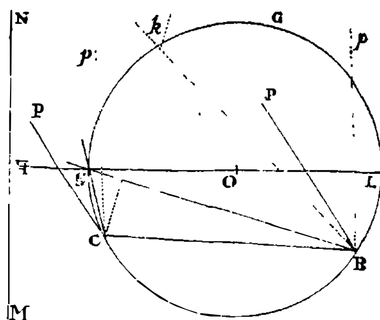
CF, *KL*, să ducem *CK*, *FL* concurente în *R*, și dreapta *OR* dusă și prelungită va tăia tangentele paralele *CF*, *KL* în punctele de contact. Acest lucru este evident potrivit corolarului 2 al lemei XXIV. Prin aceeași metodă se pot afla alte puncte de contact, și atunci în sfîrșit prin construcția din problema XIV se poate descrie traiectoria. Q.E.F.

SCOLIE

Problemele, în care se dau fie centrele fie asimptotele traiectoriilor, sînt cuprinse în cele precedente. Căci fiind date puncte și tangente în același timp cu centrul, se dau tot atîtea alte puncte și alte tangente la o distanță egală de centru, de cealaltă parte a lui. Însă o asimptotă trebuie concepută ca o tangentă, și extremitatea ei infinit de îndepărtat (dacă se poate vorbi astfel), ca un punct de contact. Să ne închipuim că punctul de contact al unei tangente oarecare se îndepărtează la infinit, și tangenta se schimbă în asimptotă, și construcțiile problemelor precedente se schimbă în construcții unde asimptota este dată.



După ce traiectoria a fost descrisă se pot afla axele și focarele ei prin această metodă. În construcția și figura lemei XXI să facem ca brațele *BP*, *CP*, ale unghiurilor mobile *PBN*, *PCN*, al căror punct de întîlnire descrie traiectoria, să fie paralele între ele, și păstrînd acea poziție să se rotească în jurul polilor lor *B*, *C* în aceea figură. Între timp celelalte brațe *CN*, *BN* ale acelor unghiuri să descrie prin punctele lor de întîlnire *K* sau *k*, cercul *BCKC*. Fie *O* centrul acestui cerc. Din acest centru să ducem la directoarea *MN*, pe care se întîlneau între timp celelalte laturi *CN*, *BN*, în timp ce se descria traiectoria, normala *OH* tăind cercul în *K* și *L*. Și dacă celelalte laturi *CK*, *BK* se întîlnesc în punctul *K* care e mai apropiat de directoare, primele laturi *CP*, *BP* vor fi paralele cu axa mare și perpendiculare pe cea mică; și va avea loc contrariul dacă aceleași laturi se întîlnesc în punctul mai îndepărtat *L*. De unde dacă se dă centrul traiectoriei se vor da axele. Acestea însă fiind date, focarele sînt ușor aflate. Dar pătratele axelor sînt între ele precum *KH* către *LH*, și de aceea e ușor să se descrie o traiectorie de un gen dat prin patru puncte date. Căci dacă două din punctele date sînt constituite din polii *C*, *B*, al treilea va da unghiurile mobile *PCK*, *PBK*; acestea însă fiind date se poate descrire cercul *BGKC*. Atunci fiind dat genul traiectoriei, va fi dat raportul *OH* către *OK*, și deci



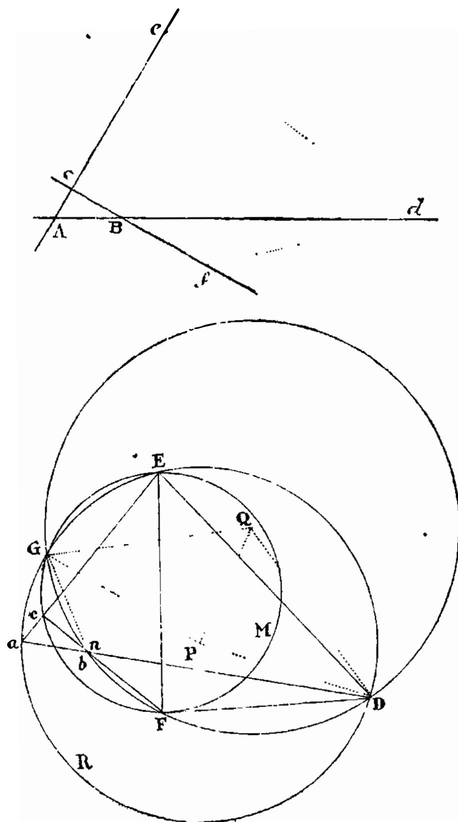
însuși OH. Din centrul O și cu intervalul OH să descriem un alt cerc și dreapta care atinge acest cerc, și care trece prin intersecția laturilor CK, BK, unde primele laturi GP, BP se întîlnesc cu al patrulea punct dat, va fi directoarea MN cu ajutorul căreia se descrie traiectoria. De unde la rîndul său se poate înscrie un trapez de un gen dat (dacă se exclud anumite cazuri imposibile) într-o secțiune conică oarecare dată.

Sînt și alte leme cu ajutorul cărora se pot descrie traiectorii de un gen dat, fiind date puncte și tangente. De felul acesta este faptul că dacă se duce o linie printr-un punct oarecare de poziție dată, care taie o secțiune conică dată în două puncte și se bisectează intervalul intersecțiilor, punctul de înjumătățire atinge o altă secțiune conică de același gen cu cea precedentă și avînd axele paralele cu axele celei precedente. Dar trec la chestiuni mai folositoare.

LEMA XXVI

Să se așeze cele trei unghiuri ale unui triunghi de specie și mărime date pe tot atîtea drepte de poziție dată care nu sînt toate paralele fiecare la fiecare.

Fie date trei drepte infinite AB, AC, BC după poziția lor, și se cere să se așeze triunghiul DEF în așa fel, încît unghiul său D să atingă linia AB, unghiul E linia AC, și unghiul F linia BC. Pe DE, DF și EF să descriem trei segmente de cerc DRE, DGF, EMF care să cuprindă unghiuri egale respectiv cu unghiurile BAC, ABC, ACB. Să descriem însă aceste segmente de acele părți ale liniilor DE, DF, EF, ca literele $DRED$ să urmeze pe orbită în aceeași ordine cu literele $BACB$, literele $DGFD$ în aceeași cu literele $ABCA$, și literele $EMFE$ în aceeași cu literele $ACBA$; apoi să întregim aceste segmente în cercuri întregi. Fie G punctul unde se taie reciproc primele două cercuri, și fie centrele lor P și Q. Unind GP, PQ să luăm Ga către AB precum GP către PQ, și din centrul G cu intervalul Ga să descriem un cerc care să taie pe primul cerc DGE în a. Să unim atît aD tăind al doilea cerc DFG în b, cît și aE tăind al treilea cerc EMF în c. Și atunci se poate construi figura $ABCdef$ asemenea și egală cu figura $abcDEF$. Ceea ce fiind făcut problema e rezolvată.



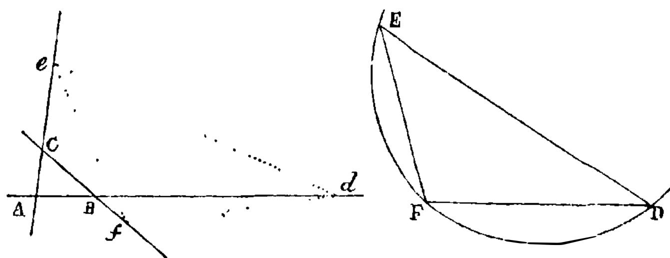
Căci să ducem *Fc* întîlnind pe *aD* în *n*, și să unim *aG*, *bG*, *QG*, *QD*, *PD*. Din construcție unghiul *EaD* este egal cu unghiul *CAB*, și unghiul *acF* egal cu unghiul *ACB*, și deci triunghiul *anc* isoscel cu triunghiul *ABC*. Prin urmare unghiul *anc* sau *FnD* este egal cu unghiul *ABC* și în consecință cu unghiul *FbD*; și de aceea punctul *n* cade în punctul *b*. Mai departe unghiul *GPQ*, care e jumătatea unghiului la centru *GPD*, este egal cu unghiul înscris *GaD*; și unghiul *GQP* care este jumătatea unghiului la centru *CQD*, este egal cu suplementul unghiului înscris *GbD*, și de aceea egal cu unghiul *Gba*; și deci triunghiurile *GPQ*, *Gab* sînt asemenea; și *Ga* este către *ab* precum *GP* către *PQ*; adică (prin construcție) precum *Ga* către *AB*. Așadar *ab* și *AB* sînt egale; și de aceea triunghiurile *abc*, *ABC*, care am demonstrat adineaori că sînt asemenea, sînt și egale. De unde, fiindcă unghiurile *D*, *E*, *F* ale triunghiului *DEF* ating respectiv laturile *ab*, *ac*, *bc* ale triunghiului *abc*, figura *ABCdef* se poate întregi asemenea și egală cu figura *abcDEF*, și întregind-o se rezolvă problema. Q.E.F.

COROLAR. De aici se poate duce o dreaptă ale cărei părți date în lungime vor fi interceptate de trei drepte de poziție dată. Să ne închipuim că, în timp ce punctul *D* se apropie de latura *EF*, și laturile *DE*, *DF* se așează în aceeași direcție, triunghiul *DEF* se schimbă în linie dreaptă, a cărei parte *DE* trebuie așezată între dreptele de poziție dată *AB*, *AC* și partea dată *DF* între dreptele de poziție dată *AB*, *BC*; și aplicînd construcția precedentă la acest caz problema va fi rezolvată.

PROPOZIȚIA XXVIII. PROBLEMA XX

Să se descrie o traiectorie de specie și mărime dată, ale cărei părți date vor fi așezate între trei drepte de poziție dată.

Se cere să se descrie o traiectorie care să fie asemenea și egală cu linia curbă *DEF*, și care să fie tăiată de cele trei drepte *AB*, *AC*, *BC* de poziție dată în părțile *DE*, *EF* asemenea și egale cu părțile date ale acesteia.



Să ducem dreptele *DE*, *EF*, *DF*, și să punem unghiurile *D*, *E*, *F* ale triunghiului *DEF* pe acele drepte de poziție dată (potrivit lemei XXVI) apoi în jurul triunghiului să descriem o traiectorie asemenea și egală cu curba *DEF*. Q.E.F.

LEMA XXVII

Să se descrie un trapez de o specie dată, ale cărui unghiuri să fie aşezate respectiv pe patru drepte de poziţie dată, care nici nu sînt toate paralele, şi nici nu converg spre un punct comun.

Fie date după poziţie patru drepte *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*; dintre care cea dintîi să taie pe a doua în *A*, pe a treia în *B*, şi pe a patra în *C*: şi se cere să se descrie trapezul *fghi*, care să fie asemenea cu trapezul *FGHI*; şi al cărui unghi *f*, egal cu unghiul dat *F*, să atingă dreapta *ABC*; şi celelalte unghiuri *g*, *h*, *i*, egale cu celelalte unghiuri date *G*, *H*, *I*, să atingă respectiv celelalte linii *AD*, *BD*, *CE*. Să unim *FH* şi pe *FG*, *FH*, *FI* să se descrie tot atîtea segmente de cerc *FSG*, *FTH*, *FVI*; dintre care cel dintîi *FSG* să fie capabil de un unghi egal cu unghiul *BAD*, al doilea *FTH* să fie capabil de un unghi egal cu unghiul *CBD*, şi al treilea *FVI* să fie capabil de un unghi egal cu unghiul *ACE*. Segmentele trebuie însă descrise de acele părţi ale liniilor *FG*, *FH*, *FI*, ca ordinea circulară a literelor *FSGF* să fie aceeaşi cu a literelor *BADB*, şi ca literele *FTHF* să urmeze pe orbită în aceeaşi ordine ca literele *CBDC*, şi literele *FVIF* în aceeaşi ca *ACEA*. Să completăm segmentele în cercuri întregi, şi fie *P* centrul primului cerc *FSG*, şi *Q* centrul celui de-al doilea *FTH*. Să unim şi să prelungim de ambele părţi *PQ* şi pe ea să luăm *QR* în acel raport către *PQ* pe care-l are *BC* către *AB*. Dar să luăm *QR* de acele părţi ale punctului *Q* ca ordinea literelor *P*, *Q*, *R* să fie aceeaşi ca a literelor *A*, *B*, *C*: şi din centrul *R* şi cu intervalul *RF* să descriem al patrulea cerc *FNC* tăind cercul al treilea *FVI* în *c*. Să unim *Fc* tăind primul cerc în *a*, şi pe al doilea în *b*. Să ducem *aG*, *bH*, *cI* şi se poate construi figura *ABCfghi* asemenea cu figura *abcFGHI*. Ceea ce fiind făcut, trapezul *fghi* va fi tocmai acela care trebuia construit.

Căci să presupunem că primele două cercuri *FSG*, *FTH* se întretaie în *K*. Să unim *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK* şi să prelungim *QP* pînă în *L*. Unghiurile înscrise *FaK*, *FbK*, *FcK* sînt jumătăţi ale unghiurilor la centru *FPK*, *FQK*, *FRK*, şi deci egale cu jumătăţile lor *LPK*, *LQK*, *LRK*. Prin urmare figura *PQRK* este echiunghică şi asemenea cu figura *abcK*, şi de aceea *ab* este către *bc* precum *PQ* către *QR*, adică precum *AB* către *BC*. Afară de

aceasta prin construcție unghiurile *fAg*, *fBh*. *fCi*, sînt egale cu unghiurile *FaG*, *FbH*, *FcI*. În consecință se poate completa figura *ABCfghi* asemenea cu figura *abcFGHI*. Ceea ce fiind efectuat, trapezul *fghi* va fi construit asemenea cu trapezul *FGHI*, și cu unghiurile sale *f*, *g*, *h*, *i* va atinge dreptele *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*. Q.E.F.

COROLAR. De aici se poate duce o dreaptă ale cărei părți cuprinse într-o anumită ordine de patru drepte de poziție dată, vor avea reciproc o proporție dată. Să mărim unghiurile *FGH*, *GHI* așa fel încît dreptele *FG*, *GH*, *HI* să fie situate în aceeași direcție, și construind problema în acest caz se va duce dreapta *fghi*, ale cărei părți *fg*, *gh*, *hi*, interceptate de patru drepte de poziție dată *AB* și *AD*, *AD* și *BD*, *BD* și *CE*, vor fi una către alta precum liniile *FG*, *GH*, *HI* și vor păstra aceeași ordine între ele. Același lucru se face mai pe scurt astfel:

Să prelungim *AB* pînă în *K*, și *BD* pînă în *L*, ca să fie *BK* către *AB*, precum *HI* către *GH*; și *DL* către *BD* precum *GI* către *FG*; și să unim *KL* întîlnind dreapta *CE* în *i*. Să prelungim *iL* pînă în *M*, încît să fie *LM* către *iL* precum *GH* către *HI*, și să ducem atît *MQ* paralel la *LB* și întîlnind dreapta *AD* în *g*, cît și *gi* tăind *AB*, *BD*, în *f*, *h*. Zic că s-a făcut.

Căci să presupunem că *Mg* taie dreapta *AB* în *Q*, și *AD* dreapta *KL* în *S*, și să ducem *AP* care să fie paralelă cu *BD* și să întîlnească *iL* în *P* și vor fi *gM* către *Lh* (*gi* către *hi*, *Mi* către *Li*, *GI* către *HI*, *AK* către *BK*) și *AP* către *BL* în același raport. Să tăiem *DL* în *R* ca să fie *DL* către *RL* în același raport, și fiind *gS* proporțional cu *gM*, *AS* cu *AP*, și *DS* cu *DL*: prin egalitate, va fi precum *gS* către *Lh*, tot așa *AS* către *BL* și *DS* către *RL*;

și amestecat *BL* — *RL* către *LH* — *BL* precum *AS* — *DS* către *gS* — *AS*. Adică *BR* către *Bh* precum *AD* către *Ag*, și de aceea precum *BD* către *gQ*. Și la rîndul său *BR* către *BD* precum *Bh* către *gQ*, sau *fh* către *fg*. Dar prin construcție linia *BL* a fost tăiată în același raport în *D* și *R* ca și linia *FI* în *G* și *H*: și de aceea *BR* este către *BD* precum *FH* către *FG*. Deci *fh* este

către *fg* precum *FH* către *FG*. Așadar, fiindcă și *gi* este către *hi* precum *Mi* către *Li*, adică precum *GI* către *HI*, e clar că liniile *FI*, *fi*, sînt tăiate în mod asemănător în *g* și *h*, *G* și *H*. Q.E.F.

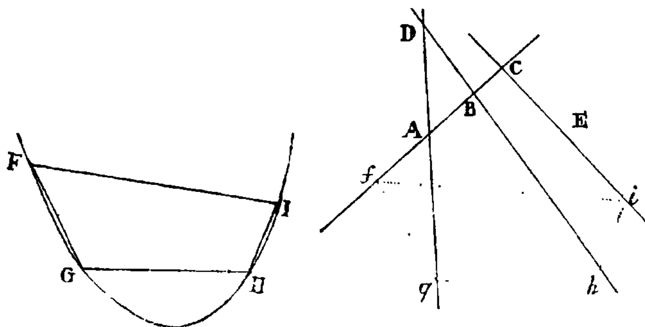
În construcția acestui corolar după ce se duce *LK* tăind pe *CE* în *i*, se poate prelungi *iE* pînă în *V*, ca să fie *EV* către *Ei*, precum *FH* către *HI*, și se poate duce *Vf* paralel cu *BD*. Același lucru se obține dacă din centrul *i* cu intervalul *IH*, se descrie un cerc tăind *BD* în *X*, și se prelungește *iX* pînă în *Y*, ca să fie *iY* egală cu *IF*, și se duce *Yf* paralel cu *BD*.

Alte soluții ale acestei probleme le-au aflat de multă vreme W r e n și W a l l i s.

PROPOZIȚIA XXIX. PROBLEMA XXI

Să se descrie o traiectorie de un gen dat, care va fi tăiată de patru drepte de poziție dată în părți de ordine, specie și proporție date.

Se cere să se descrie o traiectorie, care să fie asemenea cu linia curbă *FGHI* și ale cărei părți asemenea și proporționale cu părțile ei *FG*, *GH*, *HI*, să fie interceptate de dreptele *AB* și *AD*, *AD* și *BD*, *BD* și *CE*, de poziție dată, prima de primele, a doua de cele de-a doua, a treia de cele de-a treia.



Ducînd dreptele *FG*, *GH*, *HI*, *FI*, să descriem (potrivit lemei XXVII) trapezul *fghi* care să fie asemenea cu trapezul *FGHI*, și ale cărui unghiuri *f*, *g*, *h*, *i* să atingă respectiv dreptele de poziție dată *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, în ordinea indicată. Apoi să descriem în jurul acestui trapez o traiectorie asemenea cu linia curbă *FGHI*.

SCOLIE

Se poate construi această problemă și după cum urmează. Unind *FG*, *GH*, *HI*, *FI* să prelungim *GF* pînă în *V* și să unim *FH*, *IG*; și să facem unghiurile *CAK*, *DAL* egale cu unghiurile *FGH*, *VFH*. Să presupunem că *AK*, *AL* se întîlnesc cu dreapta *BD* în *K* și *L*, și apoi să ducem *KM*, *LN*, dintre care *KM* să constituie unghiul *AKM* egal cu unghiul *GHI*, și să fie către *AK* precum este *HI* către *GH*; și *LN* să constituie unghiul *ALN* egal

cu unghiul *FHI* și să fie către *AL* precum *HI* către *FH*. Să ducem însă *AK*, *KM*, *AL*, *LN*, de acele părți ale liniilor *AD*, *AK*, *AL* ca literele *CAKMC*, *ALKA*, *DALND* să urmeze pe orbită în aceeași ordine ca literele *FGHIF*; și dreapta *MN* dusă să întîlnească dreapta *CE* în *i*. Să facem unghiul *iEP* egal cu unghiul *IGF*, și fie *PE* către *Ei* precum *FG* către *GI*; și prin *P* să ducem *PQf*, care împreună cu dreapta *ADE* să cuprindă unghiul *PQE* egal cu unghiul *FIG*, și să întîlnească dreapta *AB* în *f*, și să unim *fi*. Să ducem însă *PE* și *PQ* de aceleași părți ale liniilor *CE*, *PE* astfel ca ordinea circulară a literelor *PEiP* și *PEQP* să fie aceeași ca a literelor *FGHIF*, și dacă pe linia *fi* în aceeași ordine a literelor se construiește trapezul *fghi* asemenea cu trapezul *FGHI*, și se circumscrie o traiectorie de genul dat, problema e rezolvată.

Atît despre aflarea orbitelor. Mai rămîne să determinăm mișcările corpurilor pe orbitele aflate.

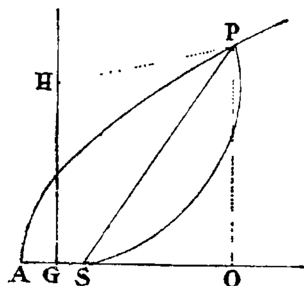
SECŢIUNEA VI

Despre aflarea mişcărilor pe orbite date

PROPOZIŢIA XXX. PROBLEMA XXII

Să se afle într-un moment anumit locul unui corp în mişcare pe o traiectorie parabolică dată.

Fie S focarul A vîrful principal al parabolei, şi fie $4AS \times M$ egal cu aria sectorului parabolic APS, care a fost descrisă de raza SP, fie după plecarea corpului din vîrf, fie înainte de ajungerea lui la vîrf. Mărimea ariei acelui sector se cunoaşte din timpul proporţional cu ea. Să bisectăm AS în G, şi să ridicăm perpendiculara GH egală cu $3M$, şi cercul descris din centrul H cu intervalul HS va tăia parabola în locul cerut P. Căci lăsînd să cadă perpendiculara PO pe axă şi ducînd PH, este $AG^2+GH^2 (=HP^2=\overline{AO-AG}^2+\overline{PO-GH}^2)= AO^2+PO^2-2GAO-2GH\times PO+AG^2+GH^2$. De unde $2GH\times PO\ (=AO^2+PO^2-2GAO)=AO^2+\frac{3}{4}PO^2$. În loc de AO^2 să scriem $AO\times\frac{PO^2}{4AS}$; şi împărţind toţi termenii prin 3 PO şi înmulţindu-i cu 2 AS, vom avea $\frac{4}{3}GH.AS\ (=\frac{1}{6}AO\times PO+\frac{1}{2}AS\times PO\ \frac{AO+3AS}{6}\times PO=\frac{4AO-3SO}{6}\times PO=$ aria $\overline{APO-SPO})=$ aria APS. Dar GH era $3M$, şi de aceea $\frac{4}{3}GH\times AS$ este $4AS\times M$. Deci aria sectorului APS este egală cu aria ce trebuia tăiată $4AS\times M$. Q.E.D.



COROLARUL 1. De aici GH este către AS, precum timpul în care corpul a descris arcul AP către timpul în care corpul a descris arcul dintre vîrful A şi perpendiculara ridicată pe axă din focarul S.

COROLARUL 2. Şi considerînd cercul ASP ce trece necontenit prin corpul în mişcare P, viteza punctului H este către viteza pe care a avut-o corpul în vîrful A ca 3 la 8; şi deci linia GH e în acelaşi raport cu linia dreaptă pe care ar descrie-o corpul în timpul mişcării sale de la A la P, cu viteza pe care a avut-o în vîrful A.

COROLARUL 3. De aici invers se poate afla timpul în care corpul a descris un arc oarecare dat AP. Uneşte AP şi în punctul său din mijloc ridică o perpendiculară întîlnind dreapta GH în H.

LEMA XXVIII

Nu există nici o figură ovală a cărei arie, tăiată de drepte după voie să se poată afla în mod general prin ecuaţii finite după numărul termenilor şi al dimensiunilor.

În interiorul ovalei fie dat un punct oarecare, în jurul căruia ca pol să se rotească incontinuu o linie dreaptă cu o mişcare uniformă, şi între

timp pe acea dreaptă să pornească un punct mobil de la pol, și să se miște totdeauna cu o viteză care să fie ca pătratul acelei drepte din interiorul ovalei. Prin această mișcare punctul va descrie o spirală cu un număr infinit de spire. Dacă acum proporția de arie ovală tăiată de acea dreaptă se poate afla printr-o ecuație finită, prin aceeași ecuație se va afla și distanța punctului de la pol, care este proporțională cu această arie, astfel că toate punctele spiralei se pot afla printr-o ecuație finită: și de aceea și intersecția oricărei drepte de poziție dată cu spirala se poate afla printr-o ecuație finită. Și orice dreaptă prelungită la infinit taie spirala într-un număr infinit de puncte, și ecuația, prin care se află o intersecție oarecare a două linii, exprimă toate intersecțiile lor prin tot atîtea rădăcini, și de aceea se ridică la tot atîtea dimensiuni cîte intersecții sînt. Fiindcă două cercuri se taie reciproc în două puncte, o intersecție nu se va afla decît printr-o ecuație de două dimensiuni, prin care se află și cealaltă intersecție. Deoarece intersecțiile a două secțiuni conice pot fi patru, nici una din ele nu poate fi aflată în general, decît printr-o ecuație de patru dimensiuni, prin care se află toate deodată. Căci dacă se caută separat intersecțiile, cum legea și condiția tuturora este aceeași, calculul va fi același în fiecare caz, și de aceea concluzia totdeauna aceeași, care deci trebuie să cuprindă toate intersecțiile deodată și să le exprime în mod indiferent. De unde și intersecțiile secțiunilor conice și a curbelor de puterea a treia, deoarece ele pot fi șase, apar simultan prin ecuații de șase dimensiuni, și intersecțiile a două curbe de puterea a treia, deoarece pot fi nouă, apar simultan prin ecuații de nouă dimensiuni. Dacă aceasta nu ar fi necesar să se întîmple, toate problemele solide s-ar putea reduce la plane și cele mai mult decît solide la solide. Vorbesc aici de curbe ireductibile în putere. Căci dacă ecuația, prin care se definește curba, se poate reduce la o putere inferioară: curba nu va fi unică, ci compusă din două sau mai multe, ale căror intersecții se pot afla separat prin diverse calcule. În același mod cele două intersecții ale dreptelor și secțiunilor conice apar totdeauna prin ecuații de două dimensiuni, cele trei ale dreptelor și curbelor ireductibile de puterea a treia prin ecuații de trei, cele patru ale dreptelor și curbelor ireductibile de puterea a patra prin ecuații de patru dimensiuni, și așa la infinit. Prin urmare intersecțiile în număr infinit ale dreptei și spiralei, deoarece această curbă este simplă și ireductibilă în mai multe curbe, cer ecuații infinite ca număr al dimensiunilor și rădăcinilor, prin care toate intersecțiile se pot exprima simultan. Căci aceeași este legea și același este calculul pentru toate. Căci dacă din pol se coboară o perpendiculară pe dreapta secantă, și se rotește perpendicular împreună cu secanta în jurul polului, intersecțiile spiralelor vor trece una în alta și aceea care era cea dintîi sau cea mai apropiată, după o revoluție va fi a doua, după două a treia, și așa mai departe: și nici nu se va schimba ecuația decît dacă se schimbă mărimea cantităților prin care se determină poziția secantei. De unde fiindcă acele cantități după diversele revoluții se întorc la primele mărimi, ecuația va reveni la prima formă, și deci una și aceeași va da toate intersecțiile, și de aceea ea va avea rădăcini în număr infinit, prin care toate se pot exprima. Prin urmare în general intersecția dreptei și spiralei nu se poate afla printr-o ecuație finită, și deci nu există nici o ovală, a cărei arie tăiată prin drepte anumite, să se poată exprima în general printr-o astfel de ecuație.

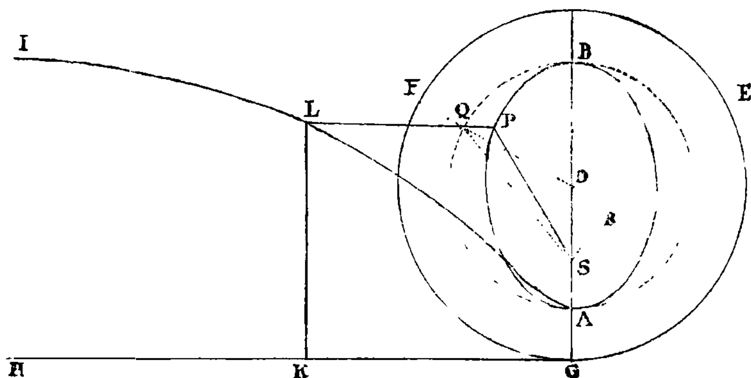
Prin același raționament, dacă intervalul dintre pol și punct, cu care se descrie spirala, se ia proporțional cu perimetrul ovalei tăiate, se poate arăta că în general lungimea perimetrului nu se poate exprima printr-o ecuație finită. Aici însă vorbesc de ovale care nu sînt atinse de figuri conjugate ce merg la infinit.

COROLAR. De aici aria elipsei care se descrie cu raza dusă din focar la corpul mobil, nu se deduce din timpul dat printr-o ecuație finită; și de aceea nu se poate determina prin descrierea curbelor geometrice raționale. Numesc curbe geometric raționale pe acelea ale căror puncte toate pot fi determinate prin lungimi ce se definesc prin ecuații, adică, prin rapoarte complicate ale lungimilor; și pe celelalte (ca spirale cvadratice, trochoide) geometric iraționale. Căci lungimile care sînt sau nu sînt ca un număr către un număr (ca în Cartea a X-a a Elementelor) sînt aritmetic raționale sau iraționale. Prin urmare tai o arie a elipsei proporțională cu timpul printr-o curbă geometrică irațională după cum urmează.

PROPOZIȚIA XXXI. PROBLEMA XXIII

Să se afle într-un anumit moment locul unui corp ce se mișcă pe o traiectorie eliptică dată.

Fie *A* vîrful principal al elipsei *APB*, *S* focarul, și *O* centrul, și fie *P* locul ce trebuie aflat al corpului. Să prelungim *OA* pînă în *G*, ca să fie *OG* către *OA* precum *OA* către *OS*. Să ridicăm perpendiculara *GH*, și din centrul *O* și cu intervalul *OG* să descriem cercul *GEF*, și pe rigla *GH* ca bază să înainteze roata *GEF* învîrtindu-se în jurul axei sale, și descriind între timp cu punctul său *A* trochoida *ALI*. Ceea ce fiind făcut, să luăm pe *GK* în acel raport către perimetrul *GEFG* al roții, precum este timpul, în



care corpul înaintînd din *A* a descris arcul *AP*, către timpul unei revoluții în elipsă. Să ridicăm perpendiculara *KL* întîlnind trochoida în *L*, și dreapta dusă *LP* paralelă cu *KG* va întîlni elipsa în locul căutat *P* al corpului.

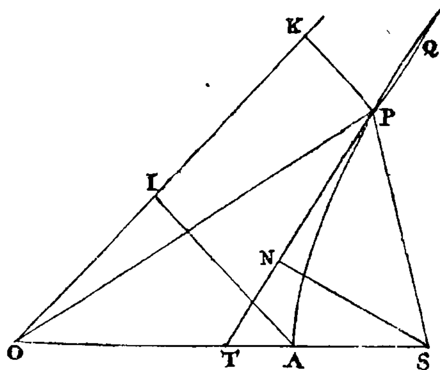
Căci din centrul *O*, cu intervalul *OA* să descriem semicercul *AQB*, și fie *Q* intersecția arcului *AQ* cu dreapta *LP*, prelungită dacă e necesar, și să unim *SQ*, *OQ*. Fie *F* intersecția arcului *EFQ* cu *OQ*, și pe aceeași *OQ*

să coborîm perpendiculara *SR*. Aria *APS* este ca aria *AQS*, adică precum diferența între sectorul *OQA* și triunghiul *OQS*, sau precum diferența dreptunghiurilor $\frac{1}{2}\ OQ \times AQ$ și $\frac{1}{2}\ OQ \times SR$, adică, fiind dat $\frac{1}{2}\ OQ$, precum diferența între arcul *AQ* și dreapta *SR*, și de aceea (fiindcă aceleași sînt rapoartele date *SR* către sinusul arcului *AQ*, *OS* către *OA*, *OA* către *OG*, *AQ* către *GF*, și prin separare $AQ - SR$ către $GF -$ sinusul arcului *AQ*) precum *GK* diferența între arcul *GF* și sinusul arcului *AQ*. Q.E.D.

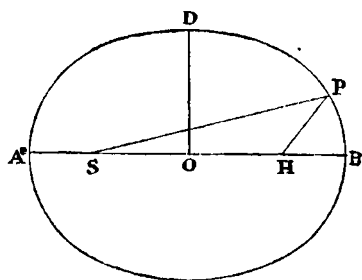
SCOLIE

De altfel, deoarece descrierea acestei curbe este dificilă, e preferabil să dăm o soluție cu adevărat aproximativă. Să se afle atît un unghi oarecare *B*, care să fie către unghiul de 57.29578 grade, pe care-l subîntinde un unghi egal cu raza, precum e distanța focarelor *SH* către diametrul *AB* al elipsei; cît și o lungime oarecare *L*; care să fie către rază în același raport invers. Care odată fiind aflate, problema poate fi apoi soluționată prin următoarea analiză. Printr-o construcție oarecare, sau făcînd vreo conjectură, să se afle locul *P* al corpului foarte apropiat de locul lui adevărat *p*. Și ducînd la axa elipsei ordonata *PR*, din proporția diametrelor elipsei, va fi dată ordonata *RQ* a cercului circumscris *AQB*, care este sinusul unghiului *AOQ* fiind *AO* raza; și care taie elipsa în *P*. Este deajuns să aflăm acel unghi printr-un calcul rudimentar în numere apropiate. Să presupunem că cunoaștem și unghiul proporțional cu timpul, adică acela care să fie către patru drepte, după cum este timpul, în care corpul a descris arcul *Ap*, către timpul unei revoluții pe elipsă. Fie acest unghi *N*. Atunci să luăm și unghiul *D* către unghiul *B*, precum este sinusul unghiului *AOQ* către rază, și unghiul *E* către unghiul $N - AOQ + D$, precum este lungimea *L* către aceeași lungime *L* micșorată cu cosinusul unghiului *AOQ*, cînd acest unghi e mai mic decît unul drept, mărită cînd e mai mare. Apoi să luăm atît unghiul *F* către unghiul *B*, precum este sinusul unghiului $AOQ + E$ către rază, cît și unghiul *G* către unghiul $N - AOQ - E + F$ precum este lungimea *L* către aceeași lungime micșorată cu cosinusul unghiului $AOQ + E$ cînd unghiul este mai mic ca unul drept, mărită cînd e mai mare. A treia oară, să luăm unghiul *H* către unghiul *B* după cum este sinusul unghiului $AOQ + E + G$ către rază; și unghiul *I* către unghiul $N - AOQ - E - G + H$, precum e lungimea *L* către aceeași lungime micșorată cu cosinusul unghiului $AOQ + E + G$, cînd unghiul este mai mic decît unul drept, mărită cînd e mai mare. Și așa se poate continua la infinit. În sfîrșit, să se ia unghiul *AOq* egal cu unghiul $AOQ + E + G + I +$etc. Și din cosinusul său *Or* și ordonata *pr*, care este către sinusul său *qr* precum axa mai mică a elipsei către axa mai mare,

se va avea locul corect p al corpului. Cînd unghiul $N - AOQ + D$ este negativ, semnul $+$ al lui E trebuie schimbat pretutindeni în $-$ şi semnul $-$ în $+$. Acelaşi lucru trebuie să se înţeleagă despre semnele lui G şi I cînd unghiurile $N - AOQ - E + F$, şi $N - AOQ - E - G + H$ devin negative. Dar seria infinită $AOQ + E + G + I +$ etc. convergează cît se poate de repede astfel că abia va fi vreodată necesar să se meargă dincolo de al doilea termen E. Şi calculul se întemeiază pe teorema, că aria APS este precum diferenţa între arcul AQ şi dreapta coborîtă din focarul S perpendicular pe raza OQ.



Printr-un calcul asemănător se rezolvă problema în hiperbolă. Fie O centrul ei, A vîrful, S focarul şi OK asimptota. Presupunem că cunoaştem cantitatea ariei ce trebuie tăiată proporţional cu timpul. Fie ea A, şi să presupunem că cunoaştem prin conjectură poziţia dreptei SP care taie o arie APS foarte apropiată de cea adevărată. Să unim OP, şi de la A şi P să se ducă la asimptotă AI, PK paralele cu cealaltă asimptotă, şi prin tabela de logaritmi se va da aria $AIKP$, şi aria OPA egală cu ea, pe care scăzînd-o din triunghiul OPS va rămîne aria tăiată APS. Aplicînd diferenţa dublă $2\,APS - 2A$, sau $2A - 2APS$ dintre aria de tăiat A, şi aria tăiată APS la linia SN, care e perpendiculară din focarul S pe tangenta TP, se va naşte lungimea coardei PQ. Să înscriem însă coarda PQ între A şi P, dacă aria tăiată APS este mai mare ca aria de tăiat A, şi de partea contrară a punctului P în caz contrariu: şi punctul Q va fi locul mai precis al corpului. Şi repetînd calculul se va afla locul cu o precizie din ce în ce mai mare.



Şi prin aceste calcule problema se rezolvă în general în mod analitic. Într-adevăr pentru scopurile astronomice este mai potrivit calculul particular ce urmează. Fiind AO, OB, OD semiaxele elipsei şi L parametrul ei, şi D diferenţa între semiaxa mică OD şi juinătatea $\frac{1}{2}L$ a parametrului; să căutăm atît unghiul Y, al cărui sinus să fie către rază precum este dreptunghiul format de diferenţa D, şi semisuma axelor $AO + OD$ către pătratul axei mari AB; cît şi unghiul Z, al cărui sinus să fie către rază precum este dreptunghiul dublu format de distanţa SH a focarelor şi diferenţa D către triplul pătrat al semiaxei mari AO. Aceste unghiuri o dată aflate, locul corpului se va determina apoi astfel. Să luăm unghiul T proporţional cu timpul în care a fost descris arcul BP, sau egal cu mişcarea medie cum se spune: şi fie unghiul V prima ecuaţie a mişcării medii, către unghiul Y, prima

ecuaţie maximă, precum sinusul unghiului dublu T către rază; şi unghiul X, ecuaţia a doua, către unghiul Z, ecuaţia a doua maximă, precum este cubul sinusului unghiului T către cubul razei. Să luăm unghiul BHP, mişcarea medie egalată, egal sau cu suma $T+X+V$ a unghiurilor T, V, X, dacă unghiul T este mai mic decît unul drept, sau cu diferenţa $T+X-Y$ dacă el este mai mare decît unul drept şi mai mic decît două drepte; şi dacă HP întîlneşte elipsa în P, dreapta dusă SP va tăia aria BSP aproape proporţional cu timpul. Această practică pare destul de expeditivă, deoarece e suficient să se afle primele două sau trei cifre ale unghiurilor foarte mici V şi X exprimate dacă vrem, în secunde. Dar e deajuns de precisă şi pentru teoria planetelor. Căci chiar în orbita lui Marte, a cărei ecuaţie maximă a centrului este de zece grade, eroarea abia va întrece o secundă. Însă aflat fiind unghiul BHP al mişcării medii egalate, unghiul BSP al mişcării adevărate şi distanţa SP se obţin imediat prin metoda foarte cunoscută.

Pînă aici despre mişcarea corpurilor în linii curbe. Se poate însă întîmpla ca mobilul să se coboare sau să se urce pe o dreaptă; şi acum trec la expunerea celor ce privesc acest fel de mişcări.

SECŢIUNEA VII

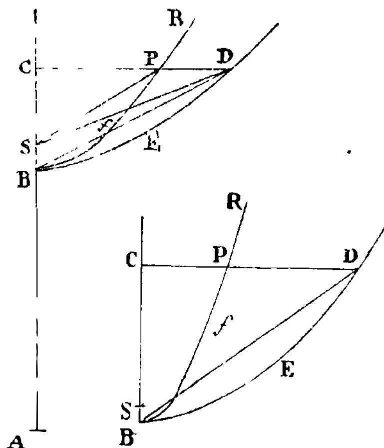
Despre urcarea şi coborîrea rectilinie a corpurilor

PROPOZIŢIA XXXII. PROBLEMA XXIV

Admiţînd că forţa centripetă este invers proporţională cu pătratul distanţei locurilor de la centru, să se definească spaţiile pe care le descrie un corp căzînd pe o dreaptă în timpuri date.

CAZUL 1. Dacă corpul nu cade perpendicular, el va descrie (potrivit corolarului 1, propoziţia XIII) o secţiune conică oarecare al cărei focar coincide cu centrul forţelor. Fie *ARPB* secţiunea conică şi *S* focarul ei. Şi mai întîi dacă figura e o elipsă; deasupra axei ei mari să descriem semicercul *ADB*; şi prin corpul ce cade să ducem dreapta *DPC* perpendiculară pe axă; şi ducînd *DS*, *PS*, aria *ASD* va fi proporţională cu aria *ASP*, şi deci şi cu timpul. Menţinînd axa *AB*, să micşorăm încontinuu lăţimea elipsei, şi aria *ASB* va rămîne totdeauna proporţională cu timpul. Să micşorăm lăţimea la infinit: şi acum orbita *APB* coincizînd cu axa *AB* şi focarul *S* cu capătul *B* al axei, corpul va coborî pe dreapta *AC*, şi aria *ABD* va deveni proporţională cu timpul. Astfel va fi dat spaţiul *AC*, pe care-l descrie corpul căzînd perpendicular din locul *A* într-un timp dat, dacă se ia aria *ABD* proporţională cu timpul, şi din punctul *D* se coboară pe dreapta *AB* perpendiculară *DC*. Q.E.I.

CAZUL 2. Dacă figura *RPB* este o hiperbolă, să descriem pe acelaşi diametru principal *AB* hiperbola dreptunghiulară *BED*: şi fiindcă ariile *CSP*, *CBfP*, *SPfB* sînt respectiv către ariile *CSD*, *CBED*, *SDEB*, în raportul dat al înălţimilor *CP*, *CD*; şi aria *SPfB* e proporţională cu timpul în care corpul *P* se va mişca pe arcul *PfB*; şi aria *SDEB* va fi proporţională cu acelaşi timp. Să micşorăm parametrul hiperbolei *RPB* la infinit menţinînd constantă latura transversă, şi arcul *PB* va coincide cu dreapta *CB* şi focarul *S* cu vîrful *B* şi dreapta *SD* cu dreapta *BD*. De aceea aria *BDEB* va fi proporţională cu timpul în care corpul *C* coborînd drept descrie linia *CB*. Q.E.I.



CAZUL 3. Şi printr-un raţionament analog dacă figura *RPB* este o parabolă, şi din acelaşi vîrf principal *B* se descrie o altă parabolă *BED*, care totdeauna rămîne dată, în timp ce parabola de mai înainte, pe al cărei perimetru se mişcă corpul *P*, micşorînd şi reducînd la

zero parametrul său coincide cu linia CB; segmentul parabolic $BDEB$ va fi proporțional cu timpul în care acel corp P sau C coboară la centrul S sau B. Q.E.I.

PROPOZIȚIA XXXIII. TEOREMA IX

Presupunînd acestea aflate, zic că viteza corpului în cădere într-un loc oarecare C este către viteza unui corp ce descrie un cerc descris din centrul B cu intervalul BC, ca rădăcina pătrată a raportului lui AC, distanța corpului de la vîrful A mai îndepărtat al cercului sau hiperbolei dreptunghiulare, către $\frac{1}{2}$ *AB, semidiametrul principal al figurii.*

Să bisectăm AB, diametrul comun al ambelor figuri RPB, DEB, prin O; și să ducem dreapta PT, care atinge figura RPB în P, și de asemenea taie diametrul comun AB (prelungit dacă e necesar) în T; și fie SY perpendiculara pe această dreaptă și BQ pe acest diametru, și să presupunem că parametrul figurii este L. Din corolarul IX, propoziția XVI rezultă că viteza corpului ce se mișcă pe linia RPB în jurul centrului S într-un loc oarecare P este către viteza corpului ce descrie cercul cu intervalul SP în jurul aceluiași centru ca rădăcina pătrată a raportului dreptunghiului $\frac{1}{2}$ $L \times SP$ către pătratul lui SY. Dar din proprietățile conicelor ACB către CP^2, precum $2AO$ către L, și de aceea $\frac{2CP^2 \times AO}{ACB}$ este egal cu L. Prin urmare vitezele sînt între ele ca rădăcina pătrată a raportului lui $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{ACB}$ către SY^2. Apoi din proprietățile conicelor CO este către BO precum BO către TO, și prin compunere sau separare precum CB către BT. De unde fie separînd fie compunînd devine BO — sau $+ CO$ către BO precum CT către BT, adică AC către AO precum CP către BQ; și de aici $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{ACB}$ este egal cu $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Acum să micșorăm la infinit lățimea CP a figurii RPB, astfel ca punctul P să coincidă cu punctul C, și punctul S cu punctul B, și linia SP cu linia BC, și linia SY cu linia BQ; și acum viteza corpului ce se coboară pe linia dreaptă CB va fi către viteza corpului ce descrie un

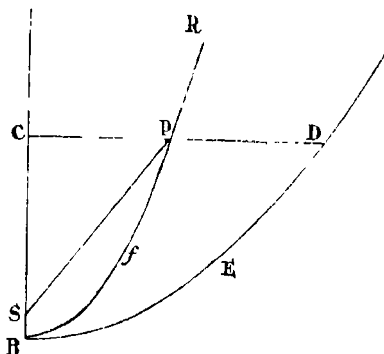
cerc din centrul B cu intervalul BC, ca rădăcina pătrată a raportului lui $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$ către SY^2, adică (neglijînd rapoartele de egalitate SP către BC şi BQ^2 către SY^2) ca rădăcina pătrată a raportului lui AC către AO adică $\frac{1}{2} AB$. Q.E.D.

COROLARUL 1. Coincizînd punctele B şi S, avem TC către TS precum AC către AO.

COROLARUL 2. Corpul ce se roteşte pe un cerc oarecare la o distanţă dată de la centru, prin mişcarea sa îndreptată în sus se va urca la distanţa dublă de la centru.

PROPOZIŢIA XXXIV. TEOREMA X

Dacă figura BED este o parabolă, zic că viteza corpului ce cade într-un loc oarecare C este egală cu viteza cu care un corp poate descrie în mod uniform un cerc în jurul centrului B cu jumătatea intervalului său BC.



Căci viteza unui corp ce descrie o parabolă RPB în jurul centrului S într-un loc oarecare P (potrivit corolarului VII, propoziţia XVI) este egală cu viteza corpului ce descrie în mod uniform un cerc cu jumătatea intervalului SP în jurul aceluiaşi centru S. Să micşorăm lăţimea CP a parabolei la infinit, astfel ca arcul parabolic PfB să coincidă cu dreapta CB, centrul S cu vîrful B şi intervalul SP cu intervalul BC, şi propoziţia va fi evidentă. Q.E.D.

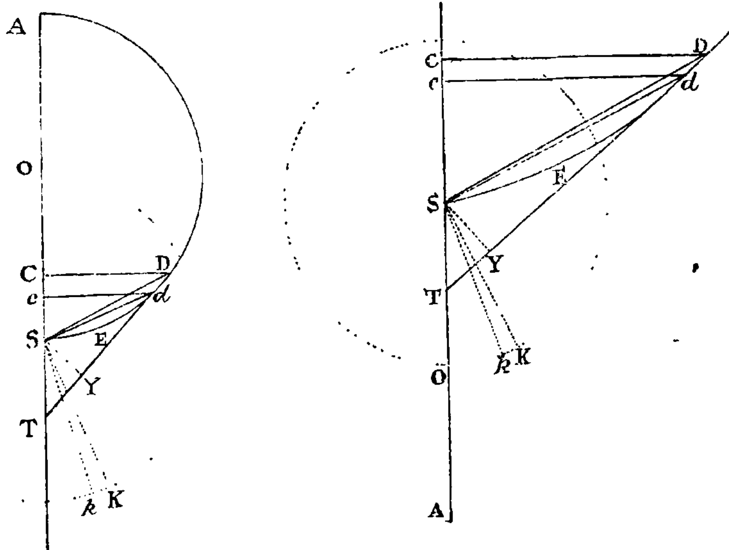
PROPOZIŢIA XXXV. TEOREMA XI

Aceleaşi lucruri fiind presupuse, zic că aria figurii DES, descrisă cu raza indefinită SD, este egală cu aria pe care un corp o poate descrie în acelaşi timp, rotindu-se în mod uniform în jurul centrului S cu o rază egală cu jumătatea parametrului figurii DES.

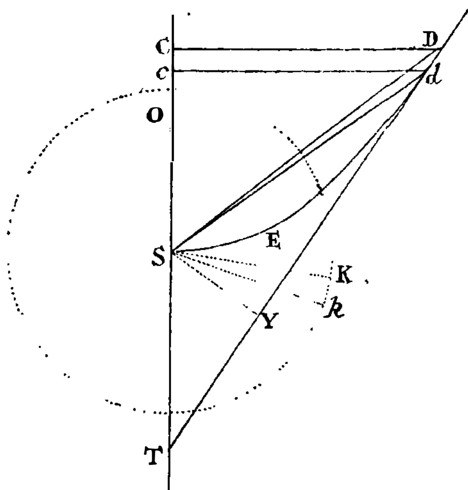
Căci să ne închipuim că corpul C căzînd într-un interval de timp cît se poate de mic descrie linioara Cc, şi între timp un alt corp K, rotindu-se în mod uniform pe cercul OKk în jurul centrului S descrie arcul Kk. Să ridicăm perpendicularele CD, cd întîlnind figura DES în D, d. Să unim SD, Sd, SK, Sk şi să ducem Dd întîlnind axa AS în T, şi să coborîm pe ea perpendiculara SY.

CAZUL 1. Acum dacă figura DES este un cerc sau o hiperbolă rectangulară să bisectăm diametrul ei transversal AS în O, şi SO va fi jumătatea parametrului. Şi fiindcă TC către TD e precum Cc către Dd şi TD către TS precum CD către SY, prin egalitate va fi TC către TS precum $CD \times Cc$ către $SY \times Dd$. Dar (potrivit corolarului 1, propoziţia XXXIII) TC este

către TS precum AC către AO, anume dacă la coincidenţa punctelor D, d se iau rapoartele ultime ale liniilor. Deci AC este către AO sau SK precum $CD \times Cc$ către $SY \times Dd$. Apoi viteza corpului descendent în C este către viteza corpului ce descrie un cerc cu intervalul SC în jurul centrului S ca rădăcina pătrată a raportului lui AC către AO sau SK (potrivit propoziţiei XXXIII).



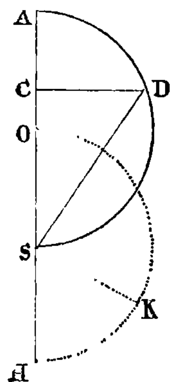
Şi această viteză este către viteza corpului ce descrie cercul OKk precum rădăcina pătrată a raportului lui SK către SC (potrivit corolarului VI, propoziţia IV) şi prin egalitate viteza primă către ultima, adică linioara Cc către arcul Kk precum rădăcina pătrată a raportului lui AC către SC, adică în raportul lui AC către CD. Din care cauză $CD \times Cc$ este egal cu $AC \times Kk$, şi de aceea AC către SK precum $AC \times Kk$ către $SY \times Dd$, şi de aici $SK \times Kk$ egal cu $SY \times Dd$ şi $\frac{1}{2}$ $SK \times Kk$ egal cu $\frac{1}{2}$ $SY \times Dd$, adică aria KSk egală cu aria SDd. Prin urmare în diversele intervale de timp se nasc particulele KSk şi SDd a două arii, care dacă mărimea lor se micşorează şi numărul creşte la infinit, obţin un raport de egalitate şi de aceea (potrivit corolarului lemei IV) ariile întregi născute deodată sînt totdeauna egale. Q.E.D.



Cazul 2. Dar dacă figura DES este o parabolă, se va afla că este ca mai sus $CD \times Cc$ către $SY \times Dd$ precum TC către TS, adică precum

2 către 1, şi astfel $\frac{1}{4}$ $CD \times Cc$ este egal cu $\frac{1}{2}$ $SY \times Dd$. Dar viteza corpului descendent în C este egală cu viteza cu care poate fi descris în mod uniform un cerc cu intervalul $\frac{1}{2}$ SC (potrivit propoziţiei XXXIV). Şi această viteză este către viteza cu care se poate descrie cercul de rază SK, adică linioara Cc către arcul Kk (potrivit corolarului VI, propoziţia IV) este precum rădăcina pătrată a raportului lùi SK către $\frac{1}{2}$ SC, în raportul lui SK către $\frac{1}{2}$ CD. Din care cauză $\frac{1}{2}$ $SK \times Kk$ este egal cu $\frac{1}{4}$ $CD \times Cc$, şi deci egal cu $\frac{1}{2}$ $SY \times Dd$, adică aria KSk egală cu aria SDd, ca mai sus. Q.E.D.

PROPOZIŢIA XXXVI. PROBLEMA XXV



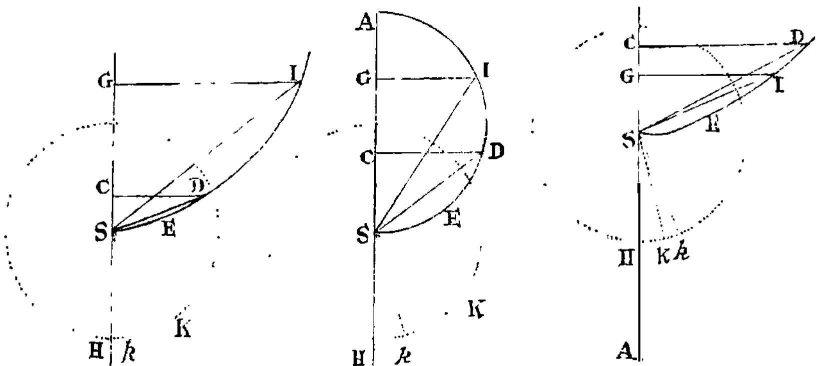
Să se determine timpurile de coborîre ale unui corp ce cade dintr-un loc dat.

Pe diametrul AS, distanţa corpului de la centru la început, să descriem semicercul ADS, precum şi semicercul OKH egal cu acesta în jurul centrului S. Dintr-un loc oarecare C al corpului să ridicăm ordonata CD. Să unim SD, şi să facem sectorul OSK egal cu aria ASD. Din propoziţia XXXV este evident că corpul căzînd va descrie spaţiul AC în acelaşi timp în care un alt corp, învîrtindu-se în mod uniform în jurul centrului S, poate descrie cercul OK. Q.E.F.

PROPOZIŢIA XXXVII. PROBLEMA XXVI

Să se definească timpurile de urcare sau coborîre ale unui corp aruncat dintr-un loc dat în sus sau în jos.

Să presupunem că corpul pleacă din locul dat G după linia GS cu o viteză oarecare. Să luăm GA către $\frac{1}{2}$ AS ca pătratul raportului acestei viteze către viteza uniformă în cerc, cu care corpul se poate roti la inter-



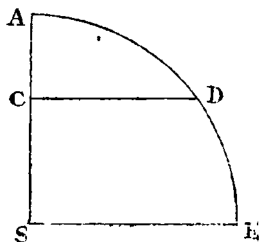
valul dat *SG* în jurul centrului *S*. Dacă acel raport este ca al numărului doi către unitate, punctul dat este la o distanţă infinită, în care caz trebuie să se descrie parabola cu vîrful *S*, axa *SG*, cu un parametru oarecare. Aceasta este evident din propoziţia XXXIV. Dacă însă raportul este mai mic sau mai mare decît 2 către 1, în primul caz trebuie să descriem un cerc, în cel din urmă o hiperbolă dreptunghiulară pe diametrul *SA*. Este evident acest lucru din propoziţia XXXIII. Atunci din centrul *S* cu un interval egal cu jumătatea parametrului să descriem cercul *HkK*, şi la locul *G* al corpului descendent sau ascendent, şi la un alt loc oarecare *C*, să ridicăm perpendicularele *GI*, *CD* întîlnind secţiunea conică sau cercul în *I* şi *D*. Apoi unind *SI*, *SD*, fie sectoarele *HSK*, *HSk* egale cu segmentele *SEIS*, *SEDS*, şi potrivit propoziţiei XXXV corpul *G* va descrie spaţiul *GC* în acelaşi timp în care corpul *K* poate descrie arcul *Kk*. Q.E.F.

PROPOZIŢIA XXXVIII. TEOREMA XII

Presupunînd că forţa centripetă este proporţională cu înălţimea sau cu distanţa locurilor de la centru, zic că timpurile, vitezele şi spaţiile descrise ale corpurilor ce cad sînt respectiv proporţionale cu arcele, şi cu sinusurile arcelor şi cu sinus versus-urile.

Să presupunem că un corp cade dintr-un loc oarecare *A* de-a lungul dreptei *AS*; şi din centrul *S* al forţelor, cu intervalul *AS*, să descriem cadranul *AE* al cercului, şi fie *CD* sinusul unui arc oarecare *AD*; şi corpul *A*, în timpul *AD*, căzînd descrie spaţiul *AC*, şi în locul *C* va cîştiga viteza *CD*.

Se demonstrează din propoziţia X în acelaşi fel cum s-a demonstrat propoziţia XXXII din propoziţia XI.



COROLARUL 1. De aici sînt egale timpurile, în care un corp căzînd din locul *A* ajunge la centrul *S*, şi un alt corp mişcîndu-se descrie arcul cadranului *ADE*.

COROLARUL 2. Deci sînt egale toate timpurile în care cad corpurile din locuri oarecare pînă la centru. Căci toate timpurile periodice ale corpurilor ce se rotesc (potrivit corolarului III, propoziţia IV) sînt egale.

PROPOZIŢIA XXXIX. PROBLEMA XXVII

Fiind dată o forţă centripetă de un gen oarecare, şi admiţînd cvadraturile figurilor curbilinii, se caută atît viteza în diversele locuri ale unui corp ascendent sau descendent pe o dreaptă, cît şi timpul în care corpul va ajunge la un loc oarecare şi invers.

Să presupunem că dintr-un loc oarecare *A* corpul *E* cade în lungul dreptei *ADEC*, şi din locul lui *E* să ridicăm totdeauna perpendiculara *EG* proporţională cu forţa centripetă în acel loc tinzînd către centrul *C*: şi fie *BFG* linia

curbă pe care punctul G o atinge incontinuu. Dar să presupunem că EG coincide chiar la începutul mişcării cu perpendiculara AB şi va fi viteza corpului într-un loc oarecare E pecum dreapta al cărei pătrat este egal cu aria curbilinie $ABGE$. Q.E.I.

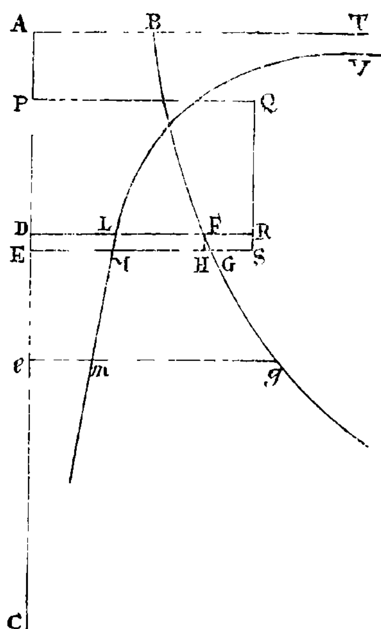
Pe EG să luăm EM invers proporţional cu dreapta, al cărei pătrat este egal cu aria $ABGE$, şi fie VLM linia curbă, pe care se află punctul M incontinuu, şi a cărei asimptotă este dreapta AB prelungită; şi timpul, în care corpul căzînd descrie linia AE, va fi precum aria curbilinie $ABTVME$. Q.E.I.

Căci pe dreapta AE să luăm linia cît se poate de mică DE de lungime dată, şi fie DLF locul liniei EMG, cînd corpul se afla în D; dacă forţa centripetă e astfel ca dreapta, al cărei pătrat este egal cu aria $ABGE$, este ca viteza corpului descendent: aria însăşi va fi ca pătratul vitezei, adică, dacă în locul vitezelor în D şi E, se scriu V şi $V+I$, aria $ABFD$ va fi ca VV, şi aria $ABGE$ ca $VV+2VI+II$, şi prin separare aria $DFGE$ ca $2VI+II$ şi astfel $\frac{DFGE}{DE}$ ca $\frac{2\,VI \times II}{DE}$, adică, dacă se adună primele rapoarte ale cantităţilor născînde, lungimea DF precum cantitatea $\frac{2VI}{DE}$, şi de aceea şi precum jumătatea cantităţii $\frac{I \times V}{DE}$. Timpul însă, în care corpul căzînd descrie linioara DE, este proporţional cu acea linioară şi invers proporţional cu viteza V, şi forţa este proporţională cu creşterea I a vitezei şi invers proporţională cu timpul, şi de aceea dacă luăm primele rapoarte ale celor născînde, precum $\frac{I \times V}{DE}$, adică precum lungimea DF. Prin urmare forţa proporţională cu DF sau EG face să descindă corpul cu acea viteză care să fie ca dreapta al cărei pătrat este egal cu aria $ABGE$. Q.E.D.

Afară de aceea fiindcă timpul în care se descrie o linioară oarecare DE de o lungime dată este în raport invers cu viteza şi deci în raport invers cu dreapta al cărei pătrat este egal cu aria $ABFD$; şi deoarece DL, şi astfel aria născîndă $DLME$, este în raport invers cu aceeaşi dreaptă: timpul va fi ca aria $DLME$, şi suma tuturor timpurilor ca suma tuturor ariilor, adică (potrivit corolarului, lema IV) timpul întreg în care se descrie linia AE ca aria întreagă $ATVME$. Q.E.D.

COROLARUL 1. Fie P locul de unde trebuie să cadă corpul astfel ca sub influenţa unei oarecare forţe centripete cunoscute, uniforme (care de obicei se presupune a fi gravitatea) să cîştige în locul D o viteză egală cu viteza pe care un alt corp căzînd sub influenţa altei forţe oarecare a cîştigat-o în acelaşi loc D, şi pe perpendiculara DF să luăm DR, care să fie către DF ca acea forţă uniformă către cealaltă forţă în locul D, şi să completăm

dreptunghiul *PDRQ*, și să tăiem aria egală cu el *ABFD*; *A* va fi locul din care a căzut celălalt corp. Căci completînd dreptunghiul *DRSE*, deoarece aria *ABFD* către aria *DFGE* precum *VV* către 2*VI*, și deci precum $\frac{1}{2}$ *V* către *I*, adică precum jumătatea vitezei întregi către creșterea vitezei corpului ce cade cu o forță neegală; și la fel aria *PQRD* către aria *DRSE* precum jumătatea vitezei întregi către creșterea vitezei corpului căzînd sub acțiunea unei forțe uniforme; și fie creșterile (din cauza egalității timpurilor născînde) ca forțele generatoare, adică precum ordonatele *DF*, *DR* și deci ca ariile născînde *DFGE*, *DRSE*; de asemenea ariile întregi *ABFD*, *PQRD* vor fi una către alta precum jumătățile vitezelor întregi, și de aceea din cauza egalității vitezelor, sînt egale.



Corolarul 2. De unde dacă un corp oarecare dintr-un loc oarecare *D* este proiectat cu o viteză dată fie în sus fie în jos, și se dă legea forței centripete, viteza lui se va afla într-un alt loc oarecare *e* ridicînd ordonata *eg*, și luînd acea viteză către viteza în locul *D* precum este dreapta, al cărei pătrat este egal cu dreptunghiul *PQRD*, fie mărit cu aria curbilinie *DFge*, dacă locul *e* este inferior locului *D*, sau micșorat, dacă el este superior, către dreapta al cărei pătrat este egal cu dreptunghiul singur *PQRD*.

Corolarul 3. Timpul se cunoaște de asemenea ridicînd ordonata *em* invers proporțională cu latura al cărei pătrat este *PQRD* + sau — *DFge* și luînd timpul în care corpul a descris linia *De* către timpul în care un alt corp a căzut cu o forță uniformă din *P* și căzînd a ajuns în *D*, precum aria curbilinie *DLme* către dreptunghiul $2PD \times DL$. Căci timpul în care corpul căzînd cu o forță uniformă a descris linia *PD* este către timpul în care același corp a descris linia *PE* ca rădăcina pătrată a raportului lui *PD* către *PE*, adică (linioara *DE* abia născîndu-se) în raportul lui *PD* către $PD + \frac{1}{2} DE$ sau $2PD$ către $2PD + DE$, și prin separare, către timpul în care același corp a descris linioara *DE* ca 2*PD* către *DE*, și deci precum dreptunghiul $2PD \times DL$ către aria *DLME*; și timpul în care ambele corpuri au descris linioara *DE* către timpul în care corpul celălalt a descris cu o mișcare neegală linia *De*, precum aria *DLME* către aria *DLme*, și prin egalitate timpul cel dintîi către timpul din urmă precum dreptunghiul $2PD \times DL$ către aria *DLme*.

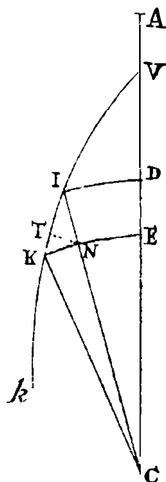
SECŢIUNEA VIII

Despre aflarea orbitelor în care se rotesc corpuri acţionate de forţe centripete oarecare.

PROPOZIŢIA XL. TEOREMA XIII

Dacă un corp, constrîns de o forţă centripetă oarecare, se mişcă oarecum, şi un alt corp se urcă sau se coboară pe o dreaptă, şi vitezele lor sînt egale într-un caz oarecare de înălţimi egale, vitezele lor vor fi egale la toate înălţimile egale.

Să presupunem că un corp oarecare descinde din *A* prin *D*, *E*, spre centrul *C*, şi un alt corp se mişcă din *V* pe linia curbă *VIKk*. Din centrul *C* cu intervale oarecare să se descrie cercurile concentrice *DI*, *EK* întîlnind dreapta *AC* în *D* şi *E*, şi curba *VIK* în *I* şi *K*. Să unim *IC* întîlnind *KE* în *N*; şi pe *IK* să coborîm perpendiculara *NT*; şi fie intervalul *DE* sau *IN* al circumferinţelor cercurilor cît se poate de mic, şi corpurile în *D* şi *I* să aibe viteze egale. Deoarece distanţele *CD*, *CI* sînt egale, forţele centripete în *D* şi *I* vor fi egale. Să exmprimăm aceste forţe prin linioarele egale *DE*, *IN*; şi dacă o forţă *IN* (potrivit corolarului 2 al legilor) se descompune în două *NT* şi *IT*, forţa *NT*, acţionînd după linia *NT* perpendiculară pe cursul *ITK* al corpului, nu va schimba de loc viteza corpului în cursul său, ci numai va abate corpul de la cursul rectiliniu, şi va face ca el să se îndepărtezc într-una de tangenta orbitei şi să-şi continue drumul curbiliniu *ITKk*. În producerea acestui efect se va consuma întreagă acea forţă: dar cealaltă forţă *IT*, acţionînd după cursul corpului, întreagă îl va accelera, şi într-un timp dat cît se poate de scurt va produce o acceleraţie proporţională cu sine însăşi. Deci acceleraţiile corpurilor în *D* şi *I* făcute în timpuri egalc (dacă luăm primele rapoarte ale liniilor născînde *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT*) sînt precum liniile *DE*, *IT*: iar în timpuri neegale precum liniile şi timpurile luate împreună. Timpurile însă în care se descriu *DE* şi *IK*, din cauza egalităţii vitezelor sînt precum drumurile descrise de *DE* şi *IK* şi deci acceleraţiile, în cursul corpurilor prin liniile *DE* şi *IK*, sînt ca *DE* şi *IT*, *DE* şi *IK* luate împreună, adică precum DE^2 şi dreptunghiul $IT \times IK$. Dar dreptunghiul $IT \times IK$ este egal cu pătratul lui *IN*, adică egal cu DE^2 şi de aceea în trecerea corpurilor de la *D* şi *I* la *E* şi *K* se nasc acceleraţii egale. Aşadar vitezele corpurilor în *E* şi *K* sînt egale; şi prin acelaşi raţionament totdeauna se vor afla egale la distanţele egale următoare. Q.E.D.



Dar şi prin acelaşi raţionament corpurile de viteză egală şi la distanţă egală de centru, în urcarea la distanţe egale vor fi întîrziate în mod egal. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă un corp sau oscilează atîrnînd de un fir, sau printr-o piedică foarte netedă şi perfect alunecoasă e forţat să se mişte

pe o linie curbă, şi un alt corp se urcă sau se coboară pe o dreaptă, şi vitezele lor sînt egale la aceeaşi înălţime oarecare: vitezele lor vor fi egale la oricare alte înălţimi egale. Căci prin firul corpului pendular sau prin piedica vasului perfect alunecos se efectuează acelaşi lucru ca prin forţa transversă *NT*. Prin aceasta corpul nu este întîrziat, nu este accelerat, ci numai silit să se îndepărteze de cursul rectiliniu.

COROLARUL 2. De aici şi dacă mărimea *P* este distanţa maximă de centru la care corpul se poate urca fie oscilînd fie rotindu-se pe o traiectorie oarecare, şi fiind proiectat în sus dintr-un punct oarecare al traiectoriei cu viteza pe care o are acolo; şi fie cantitatea *A* distanţa corpului de centru într-un alt punct oarecare al orbitei, şi fie forţa centripetă totdeauna precum o putere oarecare A^{n-1} a lui A, al cărei indice $n-1$ este un număr oarecare n micşorat cu unitatea; viteza corpului la orice înălţime A va fi ca $\sqrt{P^n - A^n}$ şi de aceea e dată. Căci viteza corpului ce se urcă sau se coboară pe o dreaptă (potrivit propoziţiei XXXIX) este în acelaşi raport.

PROPOZIŢIA XLI. PROBLEMA XXVIII

Fiind dată o forţă centripetă de un gen oarecare şi admiţînd cvadraturile figurilor curbilinii, se cer atît traiectoriile pe care se vor mişca corpurile, cît şi timpurile mişcărilor pe traiectoriile aflate.

Fie îndreptată o forţă oarecare spre centrul *C* şi se cere să se afle traiectoria *VIKk*. Fie dat cercul *VR* cu centrul *C* descris cu un interval oarecare *CV*, şi din acelaşi centru să se descrie alte cercuri oarecare *ID*, *KE* tăind

traiectoria în *I* şi *K* şi dreapta *CV* în *D* şi *E*. Să ducem atît dreapta *CNIX* tăind cercurile *KE*, *VR* în *N* şi *X*, cît şi dreapta *CKY* întîlnind cercul *VR* în *Y*. Fie însă punctele *I* şi *K* foarte apropiate unul de altul şi să meargă corpul din *V* prin *I* şi *K* la *k*; şi fie punctul *A* locul din care trebuie să cadă un alt corp, ca să cîştige în locul *D* o viteză egală cu viteza corpului de

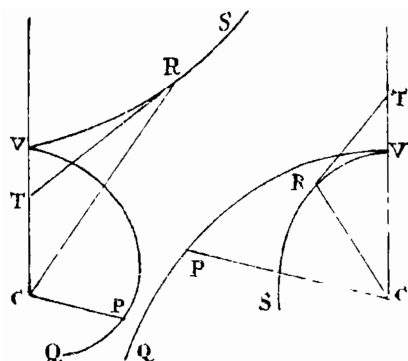
mai înainte în I. În aceleași condiții ca cele din propoziția XXXIX, linioara IK, descrisă într-un timp dat cît se poate de scurt, va fi ca viteza, și deci ca dreapta al cărei pătrat este egal cu aria $ABFD$, și triunghiul ICK proporțional cu timpul va fi dat și deci KN va fi invers proporțional cu înălțimea IC, adică, dacă se dă o cantitate oarecare Q și înălțimea IC se numește A, precum $\frac{Q}{A}$. Această cantitate $\frac{Q}{A}$ să o numim Z, și să presupunem că mărimea lui Q este așa fel încît într-un caz oarecare $\sqrt{ABFD}$ către Z precum IK către KN, și în toate cazurile va fi $\sqrt{ABFD}$ către Z precum IK către KN, și $ABFD$ către ZZ după cum IK^2 către KN^2; și separînd $AFD - ZZ$, către ZZ precum IN^2 către KN^2 și deci $\sqrt{ABFD - ZZ}$ către Z sau $\frac{Q}{A}$ precum IN către KN, și de aceea $A \times KN$ egal cu $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$. De unde fiindcă $YX \times XC$ este către $A \times KN$ precum CX^2 către AA, dreptunghiul $XY \times XC$ va fi egal cu $\frac{Q \times IN \times CX^2}{AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Prin urmare dacă pe perpendiculara DF se iau totdeauna DI, Dc egale respectiv cu $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$, $\frac{Q \times CX^2}{2AA \cdot \sqrt{ABFD - ZZ}}$, și se descriu liniile curbe ab, ac, pe care se află totdeauna punctele b, c, și din punctul V se ridică pe linia AC perpendiculara Va tăind ariile curbilinii $VDba$, $VDca$, și se ridică și ordonatele Ez, Ex: deoarece dreptunghiul $Dd \times IN$ sau $DbzE$ este egal cu jumătatea dreptunghiului $A \times KN$ sau cu triunghiul ICK; și dreptunghiul $Dc \times IN$ sau $DC \times E$ este egal cu jumătatea dreptunghiului $YX \times XC$, sau cu triunghiul XCY; adică, deoarece părticelele născînde $DdzE$, ICK sînt totdeauna egale cu ariile $VDba$, VIC și părticelele născînde $Dc \times E$, XCY sînt totdeauna egale cu ariile $VDca$, VCX, aria născută $VDba$ va fi egală cu aria născută VIC, și deci proporțională cu timpul și aria născută $VDca$ egală cu sectorul născut VCX. Prin urmare fiind dat un timp oarecare în decursul căruia corpul s-a coborît din locul V, va fi dată aria $VDba$ proporțională cu el însuși și deci va fi dată înălțimea CD sau CI a corpului, și aria $VDca$, și sectorul VCX egal cu ea împreună cu unghiul ei VCI. Dar fiind date unghiul VCI și înălțimea CI se dă locul I, unde se va afla corpul la sfîrșitul acelui timp. Q.E.I.

COROLARUL 1. De aici se pot afla ușor înălțimile maxime și minime ale corpurilor, adică, apsidele traiectoriilor. Căci apsidele sînt punctele în care dreapta IC dusă prin centru cade perpendicular pe traiectoria VIK: ceea ce se întîmplă cînd dreptele IK și NK sînt egale, și deci cînd aria $ABFD$ este egală cu ZZ.

COROLARUL 2. Dar și unghiul KIN, în care traiectoria taie undeva linia IC, se află ușor din înălțimea dată IC a corpului: anume luînd sinusul ei către rază precum KN către IK, adică precum Z către latura al cărei pătrat este aria $ABFD$.

COROLARUL 3. Dacă din centrul C și cu vîrful principal V se descrie o secțiune conică oarecare VRS; și dintr-un punct oarecare R al ei se duce tangenta RT întîlnind axa CV prelungită la infinit în punctul T; apoi unind CR se duce dreapa CP care să fie egală cu abscisa CT, și să formeze unghiul VCP proporțional cu sectorul VCR; și dacă o forță centripetă invers pro-

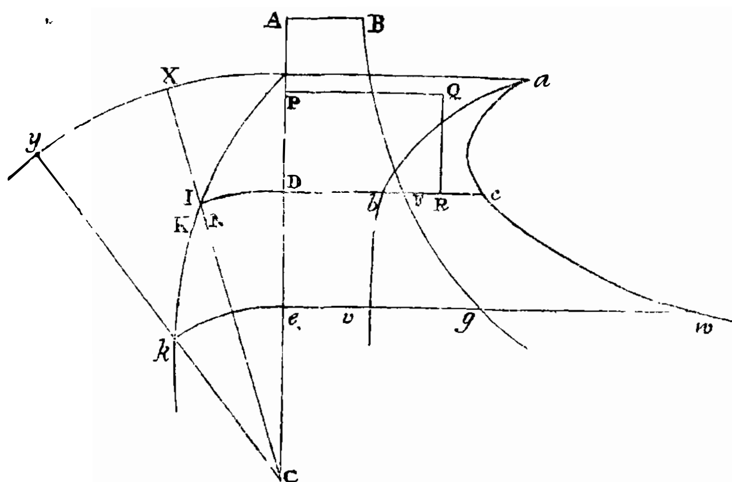
porţională cu cubul distanţei locurilor de la centru tinde spre centrul *C* şi dacă corpul porneşte din locul *V* cu o viteză potrivită de-a lungul unei linii perpendicular pe dreapta *CV*: corpul va înainta pe traiectoria *VPQ* pe care punctul *P* se află incontinuu; şi deci dacă secţiunea conică *VRS* este o hiperbolă, corpul va coborî spre centru; dar dacă ea este o elipsă, el va urca incontinuu şi se va îndepărta la infinit. Şi invers, dacă corpul pleacă din locul *V* cu o viteză oarecare, şi apoi cum începe, sau să coboare oblic spre centru, sau să se urce oblic dinspre el, figura *VRS* este fie o hiperbolă fie o elipsă, se poate afla traiectoria mărind sau micşorînd unghiul *VCP* într-un raport dat oarecare. Dar şi, schimbînd forţa centripetă în centrifugă, corpul se va urca oblic pe traiectoria *VPQ*, care se află luînd unghiul *VCP* proporţional cu sectorul eliptic *VRC* şi lungimea *CP* egală cu lungimea *CT* ca mai sus. Toate acestea rezultă din propoziţia precedentă prin cvadratura unei curbe oarecare, a cărei aflare ca fiind destul de uşoară o omit pentru a fi scurt.



PROPOZIŢIA XLII. PROBLEMA XXIX

Fiind dată legea forţei centripete, se caută mişcarea unui corp ce porneşte dintr-un loc dat, cu o viteză dată, după o dreaptă dată.

Să menţinem condiţiile din cele trei propoziţii precedente: să presupunem că un corp porneşte din locul *I* în direcţia linioarei *IK*, cu viteza pe



care un alt corp căzînd din locul *P* cu o forţă centripetă uniformă o poate cîştiga în *D*: şi fie această forţă uniformă către forţa cu care primul corp

e mai întîi împins în *I*, precum *DR* către *DF*. Să presupunem însă că corpul înaintează spre *k*; și din centrul *C*, și cu intervalul *Ck* să descriem cercul *ke* întîlnind dreapta *PD* în *e* și să ridicăm ordonatele *eg*, *ev*, *ew* ale curbelor *BFg*, *abc*, *acw*. Din dreptunghiul dat *BDRQ* și din legea forței centripete dată, prin care primul corp este acționat, se dă linia curbă *BFg*, prin construcția problemei XXVII și corolarul 1 al ei. Apoi din unghiul dat *CIK* se dă proporția celor născînde *IK*, *KN*, și de aici, prin construcția problemei XXVIII se dă cantitatea *Q*, împreună cu liniile curbe *abv*, *acw*: și deci, la sfîrșitul unui timp oarecare *Dbve*, se dă atît înălțimea *Ce* sau *Ck* a corpului, cît și aria *Dcwe*, și sectorul *XCy* egal cu ea, și unghiul *ICk*, și locul *k* în care se va afla atunci corpul. Q.E.I.

Presupunem însă în aceste propoziții că forța centripetă la o distanță oarecare de centru variază după o lege oarecare pe care cineva și-o poate imagina, la distanțe însă egale de centru ea este pretutindeni aceeași. Dar pînă aici am considerat mișcarea corpurilor în orbite imobile. Mai rămîne să adăugăm cîte ceva despre mișcarea pe orbite care se învîrtesc în jurul centrului forțelor.

SECŢIUNEA IX

Despre mişcarea corpurilor pe orbite mobile, şi despre mişcarea apsidelor

PROPOZIŢIA XLIII. PROBLEMA XXX

Se cere să facem ca un corp să se poată mişca pe o traiectorie oarecare ce se roteşte în jurul centrului forţelor întocmai ca un alt corp pe aceeaşi traiectorie în repaus.

Să presupunem că pe orbita *VPK* de poziţie dată se roteşte un corp *P* înaintînd de la *V* spre *K*. Din centrul *C* să ducem totdeauna *Cp*, care să fie egal cu *CP*, şi să formeze unghiul *VCp* proporţional cu unghiul *VCP*; şi aria, pe care o descrie linia *Cp*, va fi către aria *VCP*, pe care o descrie simultan linia *CP*, precum viteza liniei descriitoare *Cp* către viteza liniei descriitoare *CP*; adică, precum unghiul *VCp* către unghiul *VCP*, şi deci într-un raport dat, şi de aceea proporţională cu timpul. Fiindcă aria pe care o descrie linia *Cp* într-un plan imobil este proporţională cu timpul, este evident că corpul, influenţat de o forţă centripetă de mărime potrivită, se poate roti împreună cu punctul *p* pe linia curbă pe care o descrie în planul imobil acelaşi punct *p* din motivul chiar acum expus. Fie unghiul *VCu* egal cu unghiul *PCp*, şi linia *Cu* cu linia *CV*, şi figura *uCp* cu figura *VCP*, şi corpul fiind totdeauna în *p* se va mişca pe perimetrul figurii rotitoare *uCp*, şi va descrie arcul său *up* în acelaşi timp în care un alt corp *P* poate descrie arcul *VP* asemenea şi egal cu el în figura ce se află în repaus *VPK*. Să se caute aşadar prin corolarul 5 al propoziţiei VI forţa centripetă prin acţiunea căreia corpul se poate roti pe linia curbă pe care o descrie punctul *p* în planul imobil şi problema va fi rezolvată. Q.E.F.

PROPOZIŢIA XLIV. TEOREMA XIV

Diferenţa forţelor cu care se pot mişca în mod egal un corp pe o orbită în repaus, şi un alt corp pe aceeaşi orbită în rotaţie, este în raport invers cu cubul înălţimii comune.

Să presupunem că părţile *up*, *pk* ale orbitei în rotaţie sînt asemenea şi egale cu părţile *VP*, *PK* ale orbitei în repaus; că distanţa punctelor *P*, *K* este cît se poate de mică. Să coborîm din punctul *k* pe dreapta *pC* perpendiculara *kr* şi să o prelungim pînă în *m*, ca să fie *mr* către *kr* precum unghiul *VCp* către unghiul *VCP*. Deoarece înălţimile corpurilor *PC* şi *pC*, *KC* şi *kC* sînt totdeauna egale, este evident că incrementele sau decrementele liniilor

PC și *pC* sînt totdeauna egale, și deci dacă diversele mișcări ale corpurilor aflătoare în locurile *P* și *p* se descompun (potrivit corolarului II al legilor) în cîte două, dintre care unele să fie îndreptate spre centru sau în direcția liniilor *PC*, *pC* și celelalte să fie transversale celor dintîi, și să aibă direcția perpendiculară pe liniile *PC*, *pC*; mișcările spre centru vor fi egale și mișcarea transversală a corpului *p* va fi către mișcare transversală a corpului *P*, precum mișcarea unghiulară a liniei *pC* către mișcarea unghiulară a liniei *PC*, adică, precum unghiul *VCp* către unghiul *VCP*. Deci în același timp în care corpul *P* prin ambele sale mișcări ajunge în punctul *K*, corpul *p* printr-o mișcare egală spre centru se va mișca de asemenea de la *p* spre *C* și de aceea la sfîrșitul acelui timp se va afla undeva pe linia *mkr*, care trecînd prin punctul *k* este perpendiculară pe linia *pC*; și printr-o mișcare transversală va cîștiga o distanță de la linia *pC*, care este către distanța pe care celălalt corp *P* o cîștigă de la linia *PC*, după cum e mișcarea transversală a corpului *p* către mișcarea transversală a celuilalt corp *P*. De aceea cum *kr* este egal cu distanța pe care o cîștigă corpul *P* de la linia *PC*, și *mr* către *kr* precum unghiul *VCp* către unghiul *VCP*, adică, precum mișcarea transversală a corpului *p* către mișcarea transversală a corpului *P*, este evident că corpul *p* la sfîrșitul acelui timp se va afla în locul *m*. Acestea vor fi așa atunci cînd corpurile *p* și *P* se mișcă în mod egal în direcția liniilor *pC* și *PC*, și deci sînt acționate de forțe egale în direcția acelor linii. Dar să luăm unghiul *pCn* către unghiul *pCk* precum e unghiul *VCp* către unghiul *VCP* și fie *nC* egal cu *kC* și corpul *p*, la sfîrșitul acelui timp de fapt se va afla în *n*; și deci este acționat de o forță mai mare decît corpul *P*, dacă unghiul *nCp* este mai mare ca unghiul *kCp*, adică dacă orbita *upk* sau se mișcă progresiv, sau se mișcă retrograd cu o viteză mai mare decît dublul aceleia cu care linia *CP* e dusă înainte; și cu o forță mai mică dacă orbita se mișcă retrograd mai încet. Și diferența forțelor este ca intervalul *mn* al locurilor, prin care corpul *p* sub acțiunea ei trebuie să fie transferat în acel spațiu de timp dat. Din centrul *C* cu intervalul *Cn* sau *Ck* să presupunem că se descrie cercul tăind liniile *mr*, *mn* prelungite în *s* și *t*, și dreptunghiul $mn \times mt$ va fi egal cu dreptunghiul $mk \times ms$, și deci *mn* egal $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum însă triunghiurile *pCk*, *pCn*, într-un timp dat sînt date în mărime, *kr* și *mr* și diferența lor *mk* și suma lor *ms* sînt în raport invers cu înăl-

ţimea pC şi deci dreptunghiul $mk \times ms$ este în raport invers cu pătratul înălţimii pC. Şi mt este proporţional cu $\frac{1}{2}$ mt, adică, precum înălţimea pC. Acestea sînt primele rapoarte ale liniilor născînde; şi de aici $\frac{mk \times ms}{mt}$, adică linioara născîndă mn, şi diferenţa forţelor proporţională cu ea este în raport invers cu cubul înălţimii pC. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici diferenţa forţelor în locurile P şi p, sau K şi k, este către forţa cu care corpul se poate roti cu o mişcare circulară de la R la K în acelaşi timp în care corpul P pe o orbită imobilă descrie arcul PK, precum linioara născîndă mn către sinus versus-ul arcului născînd RK, adică precum $\frac{mk \times ms}{mt}$ către $\frac{rk^2}{2kC}$, sau precum $mk \times ms$ către pătratul lui rk; adică, dacă luăm cantităţi date F, G, în acel raport între ele, pe care-l are unghiul VCP către unghiul VCp, precum GG-FF către FF. Şi de aceea, dacă din centrul C cu un interval oarecare CP sau Cp descrie un sector circular egal cu aria întreagă VPC, pe care corpul P rotindu-se într-un timp oarecare pe o orbită imobilă o descrie cu raza dusă la centru; diferenţa forţelor cu care se roteşte corpul P pe o orbită imobilă şi corpul p pe o orbită mobilă, va fi către forţa centripetă, cu care un corp oarecare, cu raza la centru, ar fi putut descrie în mod uniform acel sector în acelaşi timp, în care a fost descrisă aria VPC precum GG-FF către FF. Căci acel sector şi aria pCk sînt între ele precum timpurile în care sînt descrise.

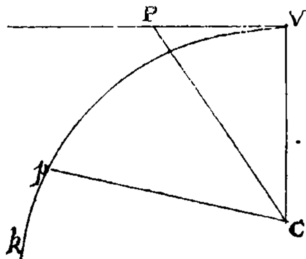
COROLARUL 2. Dacă orbita VPK este o elipsă avînd focarul C şi apsida cea mai înaltă V; şi să presupunem că elipsa upk este asemenea şi egală cu ea, în aşa fel ca pC să fie totdeauna egal cu PC, şi unghiul VCp să fie către unghiul VCP în raportul dat al lui G către F; dar în locul înălţimii PC, sau pC să scriem A, şi în locul parametrului elipsei să punem $2R$: forţa cu care corpul poate fi adus să se rotească pe o elipsă mobilă va fi precum $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$ şi invers. Căci să exprimăm forţa cu care un corp se roteşte pe o elipsă nemişcată prin cantitatea $\frac{FF}{AA}$, şi forţa în V va fi $\frac{FF}{CV^2}$. Forţa însă cu care un corp se poate învîrti pe un cerc la distanţa CV cu viteza pe care un corp rotindu-se pe o elipsă o are în V, este către forţa cu care un corp rotindu-se pe o elipsă e acţionat în apsida V, precum jumătatea parametrului elipsei către semidiametrul CV al cercului, şi deci este egal cu $\frac{RFF}{CV^3}$: şi forţa care este către aceasta precum GG-FF către FF

este egală cu $\frac{RGG - RFF}{CV^3}$: şi această forţă (potrivit corolarului 1 al acesteia) este diferenţa forţelor în V cu care se roteşte corpul P pe elipsa nemişcată VPK, şi corpul p pe elipsa mobilă upk. De unde fiindcă (potrivit acestei propoziţii) acea diferenţă la o altă înălţime oarecare A este către ea însăşi la înălţimea CV precum $\frac{1}{A^3}$ către $\frac{1}{CV^3}$, aceeaşi diferenţă la orice înălţime A va avea valoarea $\frac{RGG - RFF}{A^3}$. Deci la forţa $\frac{FF}{AA}$ cu care corpul se poate învîrti pe elipsa imobilă VPK, să adunăm excesul $\frac{RGG - RFF}{A^3}$ şi să se compună forţa toată $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$ cu care se poate roti corpul pe elipsa mobilă upk în aceleaşi timpuri.

COROLARUL 3. În acelaşi fel se află că, dacă orbita imobilă VPK este o elipsă avînd centrul în centrul C al forţelor; şi dacă presupunem de asemenea egală şi concentrică cu ea elipsa mobilă upk; şi fie $2R$ parametrul principal al acestei elipse, şi $2T$ latura transversă sau axa mare; şi fie unghiul VCp totdeauna către unghiul VCP precum G către F; forţele cu care corpurile se pot roti pe o elipsă imobilă şi mobilă în timpuri egale, vor fi respectiv ca $\frac{FFA}{T^3}$ şi $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$.

COROLARUL 4. Şi în general, dacă înălţimea maximă CV a corpului se numeşte T, şi raza curburii pe care o are orbita VPK în V, adică raza unui cerc curbat în mod egal se numeşte R; şi forţa centripetă, cu care un corp se poate roti pe o traiectorie oarecare imobilă VPK în locul V, să o numim $\frac{VFF}{TT}$, şi în alte locuri P să o numim în mod nedefinit X, la înălţimea CP numită A, şi să luăm G către F în raportul dat al unghiului VCp către unghiul VCP: forţa centripetă cu care acelaşi corp poate face aceeaşi traiectorie upk mişcată în mod circular în aceleaşi timpuri, va fi precum suma forţelor $X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$.

COROLARUL 5. Fiind dată aşadar mişcarea unui corp pe o orbită oarecare imobilă, mişcarea lui unghiulară în jurul centrului forţelor se poate mări sau micşora într-un raport dat, şi de aici se pot afla noi orbite imobile în care corpurile să se rotească cu noi forţe centripete.



COROLARUL 6. Prin urmare dacă pe dreapta CV de poziţie dată se ridică perpendiculara VP de lungime nedeterminată, şi se uneşte CP, şi se duce Cp egală cu ea, formînd unghiul VCp, care să fie către unghiul VCP într-un raport dat; forţa cu care corpul se poate roti pe curba Vpk pe care punctul p se află incontinuu, va fi în raport invers cu cubul înălţimii Cp. Căci corpul P prin forţa de inerţie, nefiind acţionat de nici o altă forţă, poate progresa în mod uniform pe dreapta VP. Să adunăm forţa dirijată spre centrul C, invers proporţională cu cubul înălţimii CP sau Cp şi (din cele deja demonstrate) mişcarea rectilinie se va îndoi în linia curbă Vpk. Dar această curbă Vpk este aceeaşi curbă VPQ aflată în corolarul 3, propoziţia XLI, în care am spus acolo că corpurile atrase de astfel de forţe se urcă în mod oblic.

PROPOZIŢIA XLV. PROBLEMA XXXI

Se caută mişcările apsidelor ale orbitelor care sînt foarte apropiate de cercuri.

Problema se rezolvă în mod aritmetic făcînd ca orbita, pe care un corp rotindu-se pe o elipsă mobilă (ca în corolarul 2 sau 3 al propoziţiei de mai sus) o descrie într-un plan imobil, să se apropie de forma orbitei ale cărei apside se caută, şi căutînd apsidele orbitei pe care o descrie corpul într-un plan imobil. Orbitele însă capătă aceeaşi formă dacă forţele centripete sub acţiunea cărora sînt descrise, comparate între ele, la înălţimi egale sînt făcute proporţionale. Fie punctul V apsida cea mai înaltă, şi să scriem T în locul înălţimii maxime CV, A în locul altei înălţimi oarecare CP sau Cp, şi X în locul diferenţei $CV-CP$ a înălţimilor; şi forţa cu care se mişcă corpul pe o elipsă ce se învîrteşte în jurul focarului său C (ca în corolarul 2), şi care în corolarul 2 era precum $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$, adică precum $\frac{FFA+RGG-RFF}{A^3}$, substituind $T-X$ în locul lui A, va fi precum $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3}$. La fel trebuie redusă oricare altă forţă centripetă la fracţia al cărei numitor să fie A^3 şi numărătorii, făcînd asemănarea termenilor omologi, trebuie făcuţi analogi. Lucrul va deveni clar prin exemple.

Exemplul 1. Să presupunem că forţa centripetă este uniformă şi deci ca $\frac{A^3}{A^3}$; adică (scriind în numărător $T-X$ în loc de A) precum $\frac{T^3-3TTX+3TXX-X^3}{A^3}$; şi comparînd termenii corespunzători ai numărătorilor, anume cei daţi cu cei daţi şi cei nedaţi cu cei nedaţi, fie $RGG-RFF+TFF$ către T^3 precum $-FFX$ către $-3TTX+3TXX-X^3$ sau precum $-FF$ către $-3TT+3TX-XX$. Dar fiindcă luăm orbita cît se poate de apropiată de cerc, să presupunem că orbita coincide cu cercul; şi fiindcă R, T sînt făcute egale şi X micşorată la infinit, rapoartele ultime vor fi RGG către T^3 precum $-FF$ către $-3TT$, sau GG către TT precum FF către $3TT$, şi la rîndul său GG către FF precum TT către $3TT$, adică precum 1 la 3; şi deci G către F, adică unghiul VCp către unghiul VCP precum 1 către $\sqrt{3}$. Prin urmare fiindcă corpul coborînd pe o elipsă imobilă, de la absida cea mai de sus la absida cea mai de jos, formează unghiul VCP (ca să zic aşa) de 180 de grade; un alt corp coborînd pe o elipsă mobilă şi deci pe orbita imobilă de care vorbim, de la apsida cea mai înaltă la apsida cea mai de jos va face unghiul VCp de $180/\sqrt{3}$ grade: aceasta din cauza asemănării orbitei, pe care o descrie corpul sub acţiunea unei forţe uniforme centripete şi a orbitei pe care corpul făcîndu-şi rotaţiile pe o elipsă ce se învîrteşte o descrie într-un plan în repaus. Din cauza asemănării de mai sus a termenilor, aceste orbite sînt făcute asemenea, nu în general, ci atunci cînd se apropie cît se poate de mult de forma circulară. Deci un corp învîrtindu-se cu o forţă centripetă uniformă pe o orbită aproape circulară, va face totdeauna între apsida cea mai de sus şi apsida cea mai de jos unghiul de $180/\sqrt{3}$ grade, sau 103° 55′ 23″ la centru; ajungînd de la apsida cea mai de sus la apsida cea mai de jos cînd o dată a descris acest unghi şi de aici reîntorcîndu-se la apsida cea mai de sus cînd din nou a făcut acelaşi unghi; şi aşa mai departe la infinit.

Exemplul 2. Să presupunem că forța centripetă este precum o putere oarecare A^{n-3} sau $\frac{A^n}{A^3}$ a înălțimii A: unde $n-3$ și n înseamnă indicii oarecare ai puterilor întregi sau fracționari, raționali sau iraționali, afirmativi sau negativi. Numărătorul A^n sau $\overline{T-X}^n$ redus la o serie nedeterminată prin metoda noastră a seriilor convergente, devine $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^n$ etc. Și comparînd termenii acestuia cu termenii celuilalt numărător $RGG - RFF + TFF - FFX$, devine $RGG - RFF + TFF$ către T^n precum $-FF$ către $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ etc. Și luînd rapoartele ultime cînd orbitele se apropie de forma circulară, avem RGG către T^n precum $-FF$ către $-nT^{n-1}$, sau GG către T^{n-1} precum FF către nT^{n-1}, și la rîndul său GG către FF precum T^{n-1} către nT^{n-1}, adică precum 1 către n; și deci G către F, adică unghiul VCp către unghiul VCP, precum 1 către $\sqrt{n}$. Din care cauză, cum unghiul VCP descris în căderea corpului de la apsida cea mai de sus la apsida cea mai de jos într-o elipsă, este de 180 de grade, se va forma unghiul VCp, în coborîrea unui corp de la apsida cea mai de sus la apsida cea mai de jos, într-o orbită aproape circulară pe care o descrie un corp oarecare cu o forță centripetă proporțională cu puterea A^{n-1}, egal cu unghiul de $180/\sqrt{n}$ grade; și acest unghi fiind repetat corpul se va întoarce de la apsida cea mai de jos la apsida cea mai de sus, și așa mai departe la infinit. Astfel dacă forța centripetă este precum distanța corpului de la centru, adică, precum A sau $\frac{A^4}{A^3}$, va fi n egal cu 4 și $\sqrt{n}$ egal cu 2; și deci unghiul între apsida cea mai de sus și apsida cea mai de jos egal cu $180/2°$ sau $90°$. Așadar corpul terminînd a patra parte a unei revoluții va ajunge la apsida cea mai de jos, și terminînd un alt sfert la apsida cea mai de sus și așa mai departe alternativ la infinit. Ceea ce este evident și din propoziția X. Căci corpul fiind acționat de această forță centripetă se va învîrti pe o elipsă imobilă, al cărei centru este în centrul forțelor. Căci dacă forța centripetă este în raport invers cu distanța, adică proporțională cu $1/A$ sau $\frac{A^2}{A^3}$, n va fi egal cu 2, și deci unghiul dintre apsida cea mai de sus și cea mai de jos va fi de $180/\sqrt{2}$ grade sau $127°\ 16'\ 45''$, și de aceea corpul învîrtindu-se cu o astfel de forță, prin repetarea continuă a acestui unghi, prin schimbări alternative de la apsida cea mai de sus la cea mai de jos și de la cea mai de jos la cea mai de sus va ajunge în infinit. Apoi dacă forța centripetă este în raport invers cu rădăcina a patra a puterii a 11-a a înălțimii, adică în raport invers cu $A^{\frac{11}{4}}$, și deci proporțională cu $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ sau cu $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ va fi n egal cu $\frac{1}{4}$ și $180/\sqrt{n}°$ egal cu $360°$ și de aceea corpul îndepărtîndu-se de apsida cea mai de sus, și apoi, coborînd incontinuu, va ajunge la apsida cea mai de jos, va termina o revoluție întreagă, apoi printr-o urcare perpetuă completînd o altă revoluție întreagă, se va întoarce la apsida cea mai de sus: și așa alternativ la infinit.

Exemplul 3. Luînd m și n ca indici oarecare ai puterilor înălțimii, și b, c, ca numere oarecare date, să presupunem că forța centripetă este ca

$\frac{bA^m + cA^n}{3}$ adică, precum $\frac{b(T-X)^m + c(T-X)^n}{3}$ sau (prin aceeași metodă a noastră a seriilor convergente) precum
$\frac{bT^m + cT^n - mbxT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{n-2} + \frac{nn-n}{2}c,XXT^{n-2}}{A^3}$ etc. și comparînd termenii numărătorilor va fi $RGG - RFF + TFF$ către $bT^m + cT^n$ precum $-FF$ către $-mbT^{m-1} - ncT^{m-1} + \frac{mm-m}{2} b \times T^{m-2} + \frac{nn-n}{2} cXT^{n-2}$ etc. Și luînd rapoartele ultime care se obțin cînd orbitele se apropie de forma circulară avem GG către $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ precum FF către $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, și la rîndul său GG către FF, precum $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ către $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Care proporție, exprimînd înălțimea maximă CV sau T în mod aritmetic prin unitate, devine GG către FF precum $b + c$ către $mb + nc$, și deci precum 1 către $\frac{mb + nc}{b+c}$. De unde G către F, adică unghiul VCp către unghiul VCP precum 1 către $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Și de aceea fiindcă unghiul VCP între apsida cea mai de sus și apsida cea mai de jos pe elipsa imobilă este de 180° unghiul VCp va fi între aceleași apside, pe orbita pe care o descrie corpul cu o forță centripetă proporțională cu cantitatea $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, egal cu unghiul de 180 $\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$ grade. Și prin același raționament dacă forța centripetă este precum $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, unghiul între apside va fi de 180 $\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$ grade. La fel se va rezolva problema în cazuri mai grele. Cantitatea cu care forța centripetă este proporțională trebuie totdeauna dezvoltată în serii convergente avînd numitorul A^3. Apoi partea dată a numărătorului care provine din acea operație către partea sa nedată, trebuie să fie în același raport precum partea dată a numărătorului $RGG - RFF + TFF - FFX$ către partea sa nedată: Și ștergînd cantitățile superflue, și scriind unitatea în locul lui T, se va obține proporția lui G către F.

COROLARUL 1. De aici dacă forța centripetă este ca o putere oarecare a înălțimii, se poate afla acea putere din mișcarea apsidelor; și invers. Adică dacă mișcarea circulară întreagă cu care corpul revine la aceeași apsidă, este către mișcarea unghiulară a unei revoluții, sau de 360 de grade, ca un număr oarecare m către un alt număr n, și înălțimea este denumită A: forța va fi ca acea putere a înălțimii $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ al cărei indice este $\frac{nn}{mm} - 3$. Ceea ce este evident prin exemplul al doilea. De unde e clar că cu îndepărtarea de la centru forța nu poate descrește într-un raport mai mare decît cubul raportului înălțimii: corpul învîrtindu-se cu o astfel de forță și îndepărtîndu-se de apsidă, dacă ar începe să se coboare niciodată nu ar ajunge la apsida cea mai de jos sau la înălțimea cea mai mică, ci se va coborî pînă la centru, descriind linia curbă pe care am tratat-o în corolarul 3, propoziția XLI. Dacă însă pornind din apsidă ar începe să se urce cît de puțin; el se va urca la infinit și niciodată nu va ajunge la apsida cea mai de sus. Căci va descrie linia curbă de care s-a vorbit în același corolar și în corolarul VI, propoziția XLIV. Astfel și cînd forța cu îndepărtarea de centru, descrește într-un raport mai mare decît cu cubul înălțimii corpul îndepărtîndu-se de apsidă sau va coborî pînă la centru sau se va urca la infinit, după

cum începe să se coboare sau să se urce. Dar dacă forța, cu îndepărtarea de centru, sau descrește într-un raport mai mic decît cu cubul înălțimii sau crește într-un raport oarecare al înălțimii, corpul nu se va coborî niciodată pînă la centru, ci va ajunge cîndva la apsida cea mai de jos: și invers, dacă corpul coborînd și urcînd alternativ de la apsidă la apsidă nu ajunge niciodată la centru: forța în îndepărtarea de centru sau va crește, sau va descrește într-un raport mai mic decît cu cubul înălțimii: și cu cît corpul se va întoarce mai repede de la apsidă la apsidă; cu atît se va îndepărta mai mult raportul forțelor de cubul acelui raport. Astfel dacă corpul se va întoarce de la apsida cea mai de sus la apsida cea mai de jos printr-o coborîre și urcare alternativă de 8, sau 4, sau 2, sau $1\frac{1}{2}$ revoluții, adică, dacă m către n va fi ca 8, sau 4, sau 2, sau $1\frac{1}{2}$ către 1, și deci $\frac{nn}{mm}-3$ ar fi $\frac{1}{64}-3$ sau $\frac{1}{16}-3$ sau $\frac{1}{4}-3$ sau $\frac{4}{9}-3$: forța va fi precum $A^{\frac{1}{64}-3}$ sau $A^{\frac{1}{16}-3}$ sau $A^{\frac{1}{4}-3}$ sau $A^{\frac{4}{9}-3}$ adică în raport invers cu $A^{3-\frac{1}{64}}$ sau $A^{3-\frac{1}{16}}$ sau $A^{3-\frac{1}{4}}$ sau $A^{3-\frac{4}{9}}$. Dacă corpul după diverse revoluții se va întoarce la cea apsidă nemișcată; m va fi către n ca 1 către 1 și deci $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ egal cu A^{-2} sau $\frac{1}{AA}$; și de aceea descreșterea forțelor va fi în raportul cu pătratul înălțimii după cum s-a demonstrat în cele precedente. Dacă corpul se va întoarce la aceeași apsidă după trei sferturi de revoluții sau două treimi sau o treime sau o pătrime de revoluție; m va fi către n precum $\frac{3}{4}$ sau $\frac{2}{3}$ sau $\frac{1}{3}$ sau $\frac{1}{4}$ către 1, și deci $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ va fi egal cu $A^{\frac{16}{9}-3}$ sau $A^{\frac{9}{4}-3}$ sau A^{9-3} sau A^{16-3}; și de aceea forța va fi sau în raport invers cu $A^{\frac{11}{9}}$ sau cu $A^{\frac{3}{4}}$ sau proporțională cu A^{6} și cu A^{13}. În sfîrșit dacă corpul mergînd de la apsida cea mai de sus la apsida cea mai de sus ar face o revoluție întreagă și afară de aceasta încă trei grade, și deci în fiecare revoluție a corpului apsida ar avansa cu trei grade; m va fi către n precum 363° către 360° adică precum 121 către 120 și deci $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ va fi egal cu $A^{-\frac{29523}{14641}}$, și de aceea forța centripetă va fi în raport invers cu $A^{-\frac{29523}{14641}}$ sau aproximativ în raport invers cu $A^{2\frac{4}{243}}$. Așadar forța centripetă descrește într-un raport ceva mai mare decît raportul pătratic dar care este cam de $59\frac{3}{4}$ ori mai aproape de raportul pătratic decît de cel cubic.

COROLARUL 2. De aici și dacă corpul acționat de o forță centripetă în raport invers cu pătratul înălțimii se rotește pe o elipsă avînd focarul în centrul forțelor, și acestei forțe i se adună sau se scade o altă forță externă oarecare; se poate cunoaște (prin exemplul al treilea) mișcarea apsidelor care se va naște din acea forță externă; și invers. Astfel dacă forța cu care corpul se învîrtește pe elipsă este ca $\frac{1}{AA}$, și forța externă scăzută precum cA, și deci forța rămasă ca $\frac{A-cA^4}{A^3}$; va fi (ca în exemplul al treilea) b egal cu 1, m egal cu 1, și n egal cu 4, și deci unghiul de revoluție

între apside egal cu unghiul de $180^\circ\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ grade. Să presupunem că forţa externă este de 357,45 ori mai mică decît forţa cu care corpul se învîrteşte pe elipsă, adică c este $\frac{100}{35745}$, A sau T fiind egal cu 1, şi atunci $180^\circ\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ va deveni $180^\circ\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, sau 180°.7623, adică 180°45′44″. Prin urmare corpul plecînd de la apsida cea mai de sus, va ajunge la apsida cea mai de jos cu o mişcare unghiulară de 180°45′44″, şi repetînd această mişcare va reveni la apsida cea mai de sus: şi deci apsida cea mai de sus va avansa cu fiecare revoluţie cu 1°31′28″. Apsida Lunii este aproximativ de două ori mai rapidă.

Atît despre mişcarea corpurilor pe orbite ale căror plane trec prin centrul forţelor. Mai rămîne să determinăm şi mişcările în plane excentrice. Căci scriitorii care tratează mişcarea corpurilor grele obişnuiesc să considere urcările şi coborîrile greutăţilor, atît pe plane oblice oarecare, cît şi pe cele perpendiculare: şi cu acelaşi drept vom avea de considerat aici mişcările corpurilor sub acţiunea unor forţe oarecare îndreptate spre centre, corpurile menţinîndu-se în plane excentrice. Presupunem însă că planele sînt foarte netede şi absolut alunecoase ca să nu întîrzie mişcările corpurilor. Mai mult, în aceste demonstraţii, în locul planelor de-a lungul cărora corpurile cad şi pe care le ating căzînd, folosim plane paralele cu acestea, în care centrele corpurilor se mişcă şi mişcîndu-se descriu orbite. Şi apoi determinăm după aceeaşi lege mişcările corpurilor efectuate pe suprafeţe curbe.

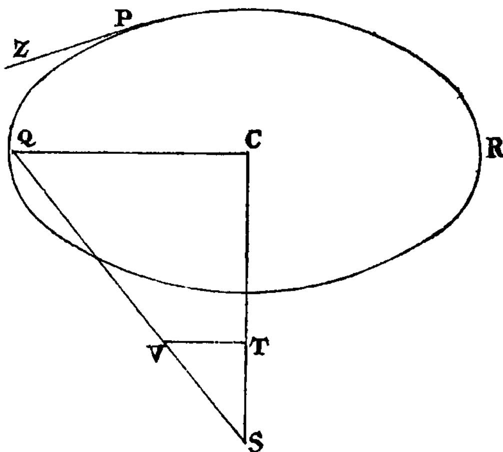
SECŢIUNEA X

Despre mişcarea corpurilor pe suprafeţe date, şi despre mişcarea oscilatoare a pendulelor.

PROPOZIŢIA XLVI. PROBLEMA XXXII

Fiind dată o forţă centripetă de un gen oarecare, şi fiind dat atît centrul forţelor cît şi un plan oarecare în care se roteşte corpul, şi admiţînd cvadraturile figurilor curbilinii: se cere mişcarea unui corp ce porneşte dintr-un loc dat, cu o viteză dată, în direcţia unei drepte din acel plan dat.

Fie *S* centrul forţelor, *SC* distanţa minimă a acestui centru de la planul dat, *P* corpul ce pleacă din locul *P* în direcţia dreptei *PZ*, *Q* acelaşi corp rotindu-se pe traiectoria sa, şi *PQR* traiectoria, descrisă în planul dat, care trebuie aflată. Să unim *CQ*, *QS*, şi dacă pe *QS* luăm *SV* proporţional cu forţa centripetă cu care corpul este atras spre centrul *S*, şi ducem *VT* care este paralel cu *CQ* şi întîlneşte pe *SC* în *T*: forţa *SV* se descompune (potrivit corolarului II al legilor) în forţele *ST*, *TV*; dintre care *ST* trăgînd corpul în direcţia unei linii perpendiculare pe plan, nu-i schimbă de loc mişcarea în acest plan. Forţa cealaltă însă *TV* lucrînd de-a lungul poziţiei planului, atrage corpul direct spre punctul *C* în planul dat, şi deci face, ca corpul să se mişte în acest plan, ca şi cînd forţa *ST* ar fi înlăturată şi corpul s-ar roti în jurul centrului *C* într-un spaţiu liber acţionat fiind numai de forţa *TV*. Dată fiind însă forţa centripetă *TV* cu care se roteşte corpul *Q* într-un spaţiu liber în jurul centrului dat *C*, se dă (prin propoziţia XLII) atît traiectoria *PQR*, pe care o descrie corpul, cît şi locul *Q*, în care corpul se va afla la un timp dat oarecare, cît şi în sfîrşit viteza corpului în acel loc *Q*; şi invers. Q.E.I.



PROPOZIŢIA XLVII. TEOREMA XV

Admiţînd că forţa centripetă este proporţională cu distanţa corpului de la centru; toate corpurile ce se rotesc în plane oarecare descriu elipse, şi efectuează revoluţiile în timpuri egale; şi acelea care se mişcă în linii drepte, alergînd înainte şi înapoi, termină diversele perioade de dus şi întors în aceleaşi timpuri.

Căci, menţinînd cele din poziţia de mai sus, forţa *SV*, cu care corpul *Q* învîrtindu-se într-un plan oarecare *PQR* este atras spre centrul *S*, este

precum distanţa SQ; şi deci SV şi SQ, TV şi CQ fiind proporţionale cu forţa TV, cu care corpul este atras spre punctul dat C în planul orbitei, este precum distanţa CQ. Deci forţele, cu care corpurile aflătoare în planul PQR sînt atrase spre punctul C, sînt în privinţa raportului distanţelor egale cu forţele cu care aceleaşi corpuri sînt atrase de oriunde spre centrul S şi de aceea; corpurile se vor mişca în aceleaşi timpuri, în aceleaşi figuri, într-un plan oarecare PQR în jurul punctului C, şi în spaţii libere în jurul centrului S; şi deci (potrivit corolarului 2, propoziţiei X şi corolarului 2, propoziţiei XXXVIII) în timpuri totdeauna egale, fie că descriu elipse în acel plan în jurul centrului C, fie că vor completa perioade de mişcare încoace şi încolo în linii drepte duse în acel plan prin centrul C. Q.E.D.

SCOLIE

Înrudite cu acestea sînt urcarea şi coborîrea corpurilor pe suprafeţe curbe. Să ne închipuim că se descriu linii curbe într-un plan apoi că se rotesc în jurul unor axe oarecare date ce trec prin centrul forţelor, şi prin acea revoluţie descriu suprafeţe curbe; apoi că corpurile se mişcă în aşa fel ca centrele lor să se afle totdeauna pe aceste suprafeţe. Dacă corpurile urcînd şi coborînd oblic aleargă încoace şi încolo; mişcările lor au loc în plane ce trec prin axă şi deci în linii curbe prin a căror revoluţie s-au născut acele suprafeţe curbe. Aşadar în aceste cazuri este suficient să considerăm mişcarea pe aceste linii curbe.

PROPOZIŢIA XLVIII. TEOREMA XVI

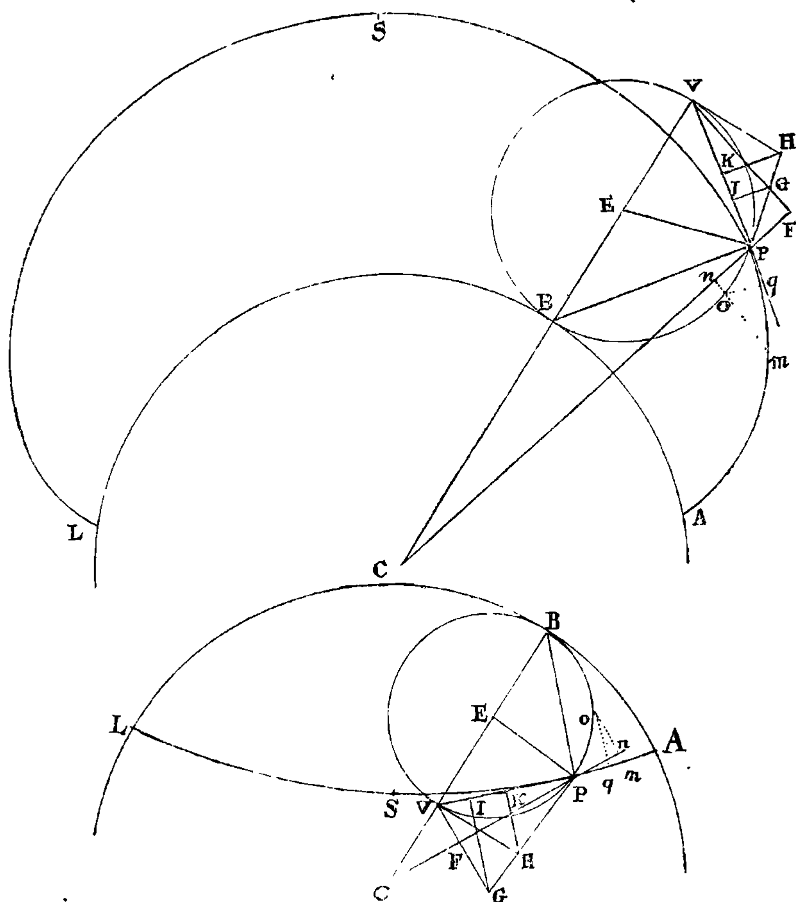
Dacă o roată stă în afara unei sfere sub unghiuri drepte şi învîrtindu-se în felul roţilor înaintează pe un cerc maxim, lungimea drumului curbiliniu pe care-l face un punct oarecare dat pe perimetrul roţii de cînd a atins sfera, şi care se poate numi cicloidă sau epicicloidă, va fi către dublul sinus versus-ului jumătăţii de arc care din acel timp a atins sfera, precum suma diametrelor sferei şi al roţii către semidiametrul sferei.

PROPOZIŢIA XLIX. TEOREMA XVII

Dacă o roată se află înlăuntrul unei sfere sub unghiuri drepte şi învîrtindu-se înaintează pe un cerc maxim; lungimea drumului curbiliniu pe care-l face un punct oarecare dat de perimetrul roţii, de cînd a atins sfera, va fi către dublul sinus versus-ului jumătăţii de arc care în tot acest timp a atins sfera, precum diferenţa diametrelor sferei şi roţii către semidiametrul sferei.

Fie ABL sfera, C centrul ei, BPV roata ce stă pe ea, E centrul roţii, B punctul de contact, şi P punctul dat pe perimetrul roţii. Să ne închipuim că această roată înaintează pe cercul maxim ABL de la A prin B spre L, şi între timp se roteşte astfel încît arcele AB, PB sînt totdeauna egale între ele, şi punctul P dat pe perimetrul roţii descrie în acel timp drumul curbiliniu AP. Fie însă AP întreg drumul curbiliniu descris din momentul cînd

roata a atins sfera în A, şi lungimea AP a acestui drum va fi către dublul sinus versus-ului arcului $\frac{1}{2}PB$, precum $2CE$ către CB. Căci să presupunem că dreapta CE (prelungită dacă este necesar) întîlneşte roata în V şi să unim CP, BP, EP, VP şi pe CP prelungită să coborîm normala VF. Să presupunem că PH, VH care se înîlnesc în H ating cercul în P şi V şi că PH taie pe VF în G, şi să coborîm normalele GI, HK, pe VP. La fel din centrul C şi cu



un interval oarecare să descriem cercul $n\ o\ m$ tăind dreapta CP în n, perimetrul roţii BP în o, şi drumul curbiliniu AP în m; şi din centrul V şi cu intervalul Vo să descriem un cerc tăind în a pe VP prelungit. Deoarece roata mergînd totdeauna se roteşte în jurul punctului de contact B, este evident că dreapta BP este perpendiculară pe linia curbă AP pe care o descrie punctul P al roţii, şi deci că dreapta VP va atinge această curbă în punctul P. Mărind sau micşorînd în mod gradat, raza cercului $n\ o\ m$ va deveni în sfîrşit egală cu distanţa CP; şi din cauza figurii disparente $P\ n\ o\ m\ q$ şi a figurii $PFGVI$, raportul ultim al linioarelor disparente Pm, Pn, Po, Pq, adică rapor-

tul schimbărilor momentane a curbei AP, a dreptei CP, a arcului circular BP, și a dreptei VP, va fi respectiv același ca ale liniilor PV, PF, PC, PI. Cum însă VF este perpendiculară pe CF și VH pe CV, de aceea și unghiurile HFG, VCF sînt egale; și unghiul VHG (din cauză că unghiurile din V și P ale patrulaterului $HVEP$ sînt drepte) este egal cu unghiul CEP, triunghiurile VHG, CEP vor fi asemenea; și de aici va fi după cum EP către CE tot așa HG către HV sau HP, și tot așa KI către KP, și compunînd sau separînd, după cum CB către CE tot așa PI către PK, și dublînd consecventele, după cum CB către $2CE$ tot așa PI către PV, și tot așa Pq către Pm. Prin urmare descreșterea liniei VP, adică creșterea liniei $BV-VP$ către creșterea liniei curbe AP este în raportul dat CB către $2CE$, și de aceea (potrivit corolarului, lema IV) lungimile $BV-VP$ și AP, născute de acele creșteri sînt în același raport. Dar BV fiind raza, VP este cosinusul unghiului BVP sau $\frac{1}{2}BEP$, și deci $BV - VP$ este sinus versus-ul aceluiași unghi; și de aceea în această roată, a cărei rază este $\frac{1}{2}VB$, $BV - VP$ va fi dublul sinus versus-ul arcului $\frac{1}{2}BP$. Așadar AP este către dublul sinus versus-ului arcului $\frac{1}{2}BP$ precum $2CE$ către CB. Q.E.D.

Iar pentru a le distinge vom numi linia AP din propoziția de mai înainte cicloida din afara sferei, pe cealaltă din cea din urmă cicloida din interiorul sferei.

Corolarul 1. De aici dacă descriem cicloida întreagă ASL și o bisectăm în S, lungimea părții PS va fi către lungimea VP (care este dublul sinusului unghiului VBP, EB fiind raza) precum $2CE$ către CB și deci într-un raport dat.

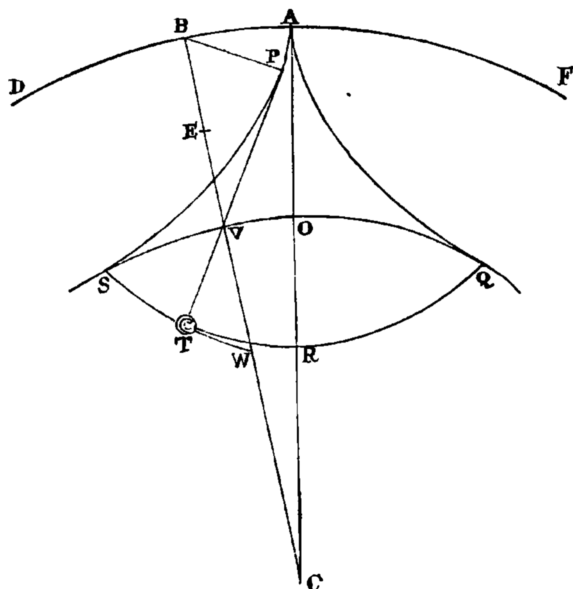
Corolarul 2. Și lungimea semiperimetului cicloidei AS va fi egală cu linia dreaptă care este către diametrul BV al roții precum $2CE$ către CB.

PROPOZIȚIA L. PROBLEMA XXXIII

Să facem un corp pendular să oscileze pe o cicloidă dată.

În interiorul sferei QVS, descrisă cu centrul C, fie dată cicloida QRS bisectată în R și întîlnind în punctele sale extreme Q și S suprafața sferei de ambele părți. Să ducem CR bisectînd arcul QS în O și să o prelungim pînă în A, astfel ca să avem CA către CO precum CO către CR. Din centrul C cu intervalul CA să descriem sfera exterioară DAF, și în interiorul acestei sfere cu o roată, al cărei diametru fie AO, să descriem două semicicloide AQ, AS care ating sfera interioară în Q și S și întîlnesc sfera exterioară în A. Din punctul A, de firul APT egal cu lungimea AR să atîrne corpul T, și să oscileze între semicicloidele AQ, AS, astfel ca de cîte ori pendulul se îndepărtează pe perpendiculara AR, firul cu partea lui superioară AP să se aplice la acea semicicloidă APS spre care tinde mișcarea; și să se îndoiască în jurul ei ca în jurul unui obstacol, și partea rămasă PT care nu atinge încă semicicloida, să rămînă întinsă în linie dreaptă; și greutatea T va oscila pe cicloida dată QRS. Q.E.F.

Căci să presupunem că firul PT întîlneşte atît cicloida QRS în T cît şi cercul QOS în V, şi să ducem CV; şi la partea rectilinie PT a firului din punctele extreme P şi T să ridicăm perpendicularele BP, TW, întîlnind dreapta CV în B şi W. Este evident din construcţia şi naşterea figurilor asemenea AS, SR că perpendicularele PB, TW taie din CV lungimile VB, VW egale cu diametrele OA, OR ale roţilor. Prin urmare TP este către VP (care este dublul sinusului unghiului VBP raza fiind $\frac{1}{2}BV$) precum BW către BV, sau $AO+OR$ către AO, adică (deoarece CA este proporţional cu CO, CO cu CR şi separînd AO cu OR) precum $CA + CO$ către CA, sau dacă se bisectează BV prin E, precum $2\ CE$ către CB. Deci (potrivit corolarului 1, propoziţia XLIX) lungimea părţii rectilinii a firului PT este totdeauna egală cu arcul PS al cicloidei, şi firul întreg APT este totdeauna egal cu jumătatea arcului APS al cicloidei, adică (potrivit corolarului 2, propoziţiei XLIX) cu lungimea AR. Şi de aceea la rîndul său dacă firul rămîne totdeauna egal cu lungimea AR, punctul T se va mişca pe cicloida dată QRS. Q.E.D.



COROLAR. Firul AR este egal cu semicicloida AS, şi deci are către semidiametrul AC al sferei exterioare acelaşi raport ca semicicloida asemenea SR către semidiametrul CO al sferei interioare.

PROPOZIŢIA LI. TEOREMA XVIII

Dacă o forţă centripetă tinzînd din toate părţile către centrul C al unei sfere este în diversele locuri precum distanţa unui loc oarecare de la centru, şi acţionînd numai această forţă corpul T va oscila (în felul deja descris) pe perimetrul cicloidei QRS: zic că oscilaţiile oricît de neegale vor fi efectuate în timpuri egale.

Căci să ducem pe tangenta prelungită la infinit TW a cicloidei perpendiculara CX şi să unim CT. Deoarece forţa centripetă cu care corpul T este împins spre C este precum distanţa CT, şi aceasta (potrivit corolarului II al legilor) se împarte în părţile CX, TX dintre care CX împingînd corpul direct din P întinde firul PT şi prin rezistenţa lui este total folosită fără să

producă nici un alt efect; iar partea cealaltă *TX*, împingînd corpul transversal sau spre *X*, accelerează direct mișcarea lui pe cicloidă; este evident că accelerația corpului, proporțională cu această forță acceleratoare, este în fiecare moment precum lungimea *TX*, adică fiind date *CV*, *WV* și *TX*, *TW* proporționale cu ele, precum lungimea *TW*, adică (potrivit corolarului I, propoziția XLIX) precum lungimea arcului cicloidei *TR*. Așadar îndepărtînd două pendule *APT*, *Apt* în mod neegal de perpendiculara *AR* și lăsîndu-le libere simultan, accelerațiile lor vor fi totdeauna precum arcele de descris *TR*, *tR*. Dar părțile descrise la început sînt precum accelerațiile, adică precum spațiile întregi ce trebuie descrise la început, și de aceea părțile care rămîn să fie descrise și accelerațiile ce urmează, proporționale cu aceste părți, sînt de asemenea ca întregii și așa mai departe. Prin urmare accelerațiile, și deci vitezele născute și părțile descrise cu aceste viteze și părțile ce trebuie descrise, sînt totdeauna precum întregii; și de aceea părțile ce trebuie descrise păstrînd între ele un raport dat, dispar împreună, adică două corpuri oscilînd ajung simultan la perpendiculara *AR*. Și fiindcă urcările perpendicularelor din locul cel mai de jos *R* făcute pe aceleași arii cicloidale cu o mișcare retrogradă, vor fi întîrziate în diversele locuri de aceleași forțe de care erau accelerate coborîrile, este evident că vitezele, urcările și coborîrile făcute pe aceleași arce vor fi egale, și deci au loc în timpuri egale; și de aceea, deoarece cele două părți ale cicloidei *RS* și *RQ* situate de cele două părți ale perpendicularei sînt asemenea și egale, cele două pendule își efectuează atît oscilațiile întregi cît și jumătățile totdeauna în aceleași timpuri. Q.E.D.

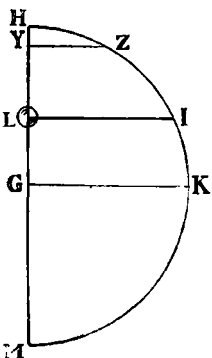
COROLAR. Forța cu care corpul *T* într-un loc oarecare *T* este accelerat sau întîrziat pe cicloidă, este către întreaga greutate a aceluiași corp în locul cel mai înalt *S* sau *Q*, precum arcul *TR* al cicloidei către arcul ei *SR* sau *QR*.

PROPOZIȚIA LII PROBLEMA XXXIV

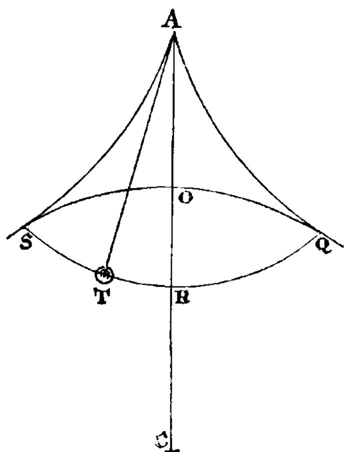
Să definim și vitezele pendulelor în diverse locuri și timpurile în care se efectuează atît oscilațiile întregi cît și diversele părți ale oscilațiilor.

Din centrul oarecare *G*, cu intervalul *GH* egal cu arcul *RS* al cicloidei, să descriem semicercul *HKM* bisectat de semidiametrul *GK*. Și dacă o forță centripetă, proporțională cu distanțele locurilor de la centru, tinde spre centrul *G*, și este egală în perimetrul *HIK* cu forța centripetă în perimetrul

sferei *QOS* tinzînd spre centrul ei; şi în acelaşi timp în care pendulul *T* este lăsat să cadă din locul cel mai înalt *S*, un corp oarecare *L* este lăsat să cadă din *H* pînă în *G*: deoarece forţele cu care corpurile sînt acţionate sînt la început egale şi totdeauna proporţionale cu spaţiile *TR* şi *LG* ce trebuie descrise, şi deci, dacă *TR* şi *LG* sînt egale, ele sînt egale în locurile *T* şi *L*; este evident că acele corpuri descriu spaţiile *ST*, *HL* egale la început, şi deci după aceea îşi continuă drumul fiind acţionate în mod egal şi descriu spaţii egale. Din care cauză (potrivit propoziţiei XXXVIII) timpul în care corpul descrie arcul *ST* este către timpul unei oscilaţii, precum arcul *HI*, timpul în care corpul *H* va ajunge în *L*, către semiperiferia *HKM*, timpul în care corpul *H* va ajunge în *M*. Şi viteza corpului pendular în locul *T* este către viteza lui în locul cel mai de jos *R* (adică viteza corpului *H* în locul *L* către viteza lui în locul *G*, sau creşterea momentană a liniei *HL* către creşterea momentană a liniei *HG*, arcele *HI*, *HK* crescînd cu un flux egal) precum ordonata *LI* către raza *GK*, sau precum $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ către *SR*. De unde fiindcă, în oscilaţii neegale, în timpuri egale se descriu arce proporţionale cu arcele întregi ale oscilaţiilor; se obţin, din timpurile date, şi vitezele şi arcele descrise în toate oscilaţiile. Care trebuiau aflate mai întîi.



Să presupunem acum că oarecare corpuri pendulare oscilează pe cicloide diverse descrise în sfere diverse, ale căror forţe absolute de asemenea sînt diferite: şi, dacă forţa absolută a unei sfere oarecare *QOS* se numeşte *V*, forţa acceleratoare cu care este acţionat pendulul pe circumferinţa acestei sfere, cînd începe să se mişte direct spre centrul ei va fi ca distanţa corpului pendular şi forţa absolută a sferei luate împreună, adică precum $CO \times V$. Aşadar linioara *HY*, care este ca această forţă acceleratoare $CO \times V$, va fi descrisă într-un timp dat; şi, dacă se ridică normala *YZ* întîlnind circumferinţa în *Z*, arcul născînd *HZ* va indica acel timp dat. Dar acest arc născînd *HZ* este precum rădăcina pătrată a dreptunghiului *GHY*, şi deci ca $\sqrt{GH \times CO \times V}$. De unde timpul unei oscilaţii întregi în cicloida *QRS* (deoarece este ca semiperiferia *HKM*, care înseamnă oscilaţia întreagă; şi în raport invers cu arcul *HZ* care înseamnă de asemenea timpul dat) va fi precum *GH* şi în raport invers cu $\sqrt{GH \times CO \times V}$, adică, deoarece *GH* şi *SR* sînt egale, precum $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$ sau (potrivit corolarului propoziţia *L*) precum $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. În consecinţă oscilaţiile în toate sferele şi cicloidele, făcute cu forţe absolute oarecare, sînt într-un raport care se compune dintr-unul direct



cu rădăcina pătrată a lungimii firului, și unul invers cu rădăcina pătrată a distanței dintre punctul de suspensiune și centrul sferei și în raport invers și cu rădăcina pătrată a forței absolute a sferei. Q.E.I.

COROLARUL 1. De aici se pot asemăna între ele și timpurile celor oscilante, căzătoare și rotitoare. Căci dacă diametrul roții, cu care se descrie cicloida în interiorul sferei, se ia egal cu semidiametrul sferei, cicloida va deveni o linie dreaptă trecînd prin centrul sferei, și oscilația va fi o coborîre și apoi o urcare pe această dreaptă. De unde se dă atît timpul de coborîre dintr-un loc oarecare la centru, cît și timpul egal cu acesta în care corpul rotindu-se în mod uniform în jurul centrului sferei la o distanță oarecare descrie un arc al unui cadran. Căci acest timp (potrivit cazului al doilea) este către timpul unei semioscilații pe o cicloidă oarecare QRS precum 1 către $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

COROLARUL 2. De aici mai urmează și cele aflate de Wren și Huygens despre cicloida ordinară. Căci dacă diametrul sferei crește la infinit, iar suprafața ei sferică se va schimba într-un plan, și forța centripetă va acționa în mod uniform în direcția unor linii perpendiculare pe acest plan, și cicloida noastră va trece într-o cicloidă ordinară. În acest caz însă lungimea arcului cicloidei între acel plan și punctul ce descrie, va deveni egală cu de patru ori sinus versus-ul jumătății arcului roții între același plan și punctul ce descrie, după cum a aflat Wren. Și pendulul între două astfel de cicloide va oscila pe o cicloidă asemenea și egală în timpuri egale, după cum a demonstrat Huygens. Dar și căderea corpurilor grele, în timpul unei oscilații va fi aceea pe care a expus-o Huygens.

Propozițiile demonstrate de noi se adaptează însă la constituția adevărată a Pămîntului, întrucît roțile mergînd pe cercurile lui maxime descriu prin mișcările cuielor, fixate în perimetrele lor, cicloide în afara sferei; și pendulele suspendate mai jos în minele și cavernele Pămîntului, trebuie să oscileze pe cicloide înlăuntrul sferelor, ca toate oscilațiile să devină izocrone. Căci greutatea (după cum se va arăta în Cartea a III-a) descrește prin îndepărtarea de suprafața Pămîntului, în sus în raportul pătratului distanțelor de la centrul lui, iar în jos într-un raport simplu.

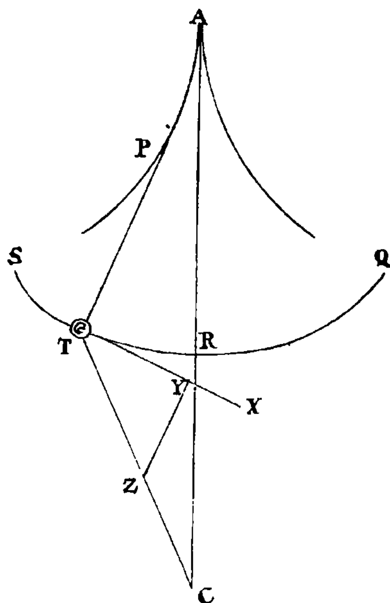
PROPOZIȚIA LIII. PROBLEMA XXXV

Admițînd cvadraturile figurilor curbilinii, să se afle forțele cu care corpurile efectuează în linii curbe date oscilații totdeauna izocrone.

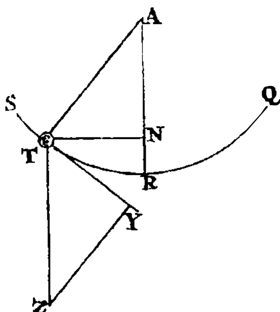
Să presupunem că corpul T oscilează pe o linie curbă oarecare $STRQ$, a cărei axă să fie AR trecînd prin centrul C al forțelor. Să ducem TX care să atingă acea curbă într-un loc oarecare T al corpului și pe această tangentă TX să luăm TY egal cu arcul TR. Căci lungimea acelui arc se cunoaște din cvadraturile figurilor, prin mijloace obișnuite. Din punctul Y să ducem dreapta YZ perpendiculară pe tangentă. Să ducem CT întîlnind perpendiculara în Z, și forța centripetă va fi proporțională cu dreapta TZ. Q.E.I.

Căci dacă forța, cu care corpul este atras din T spre C, se reprezintă prin dreapta TZ luată proporțional cu ea, aceasta se va descompune în forțele

TY, YZ; dintre care YZ trăgînd corpul în direcţia lungimii firului PT, nu schimbă de loc mişcarea lui, iar cealaltă forţă TY accelerează sau întîrzie direct mişcarea lui pe curba $STRQ$. Prin urmare deoarece aceasta este precum drumul TR ce trebuie descris, acceleraţiile sau întîrzierile corpului în părţile proporţionale ce trebuie descrise a două oscilaţii (una mai mare şi una mai mică) vor fi totdeauna precum acele părţi, şi de aceea vor face ca acele părţi să fie descrise simultan. Dar corpurile care descriu simultan părţi totdeauna proporţionale cu cele întregi, vor descrie simultan pe cele întregi. Q.E.D.



COROLARUL 1. De aici dacă corpul T, atîrnînd de un fir rectiliniu AT din centrul A, descrie arcul circular $STRQ$, şi între timp este acţionat după linii paralele în jos, de o forţă oarecare, care este către forţa uniformă a greutăţii, precum arcul TR către sinusul ei TN: timpurile diverselor oscilaţii vor fi egale. Căci TZ, AR fiind paralele, triunghiurile ATN, ZTY vor fi asemenea; şi de aceea TZ va fi către AT precum TY către TN; adică, dacă forţa uniformă a greutăţii se reprezintă prin lungimea dată AT; forţa TZ, prin care oscilaţiile devin izocrone va, fi către forţa greutăţii AT precum arcul TR egal cu TY către sinusul TN al acelui arc.



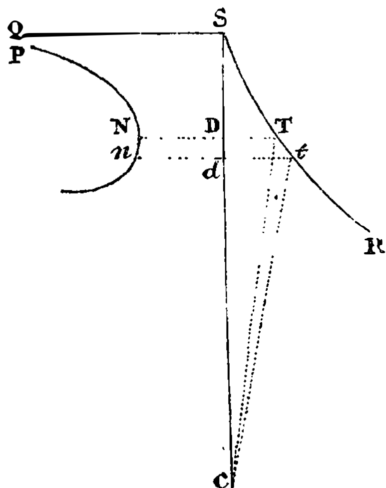
COROLARUL 2. Şi de aceea în orologii, dacă forţele imprimate de o maşină asupra pendulului pentru conservarea mişcării se pot compune în aşa fel cu forţa greutăţii, ca întreaga forţă în jos să fie totdeauna precum linia ce se naşte aplicînd dreptunghiul format de arcul TR şi raza AR către sinusul TN, toate oscilaţiile vor fi izocrone.

PROPOZIŢIA LIV. PROBLEMA XXXVI

Admiţînd cvadraturile figurilor curbilinii, să se afle timpurile în care corpurile se urcă şi se coboară acţionate de o forţă centripetă oarecare în linii curbe oarecare, descrise într-un plan ce trece prin centrul forţelor.

Să presupunem că corpul se coboară dintr-un loc oarecare S, pe o linie curbă oarecare $STtR$ dată într-un plan trecînd prin centrul C al forţelor. Să unim CS şi să o împărţim în nenumărate părţi egale, şi fie Dd una oare-

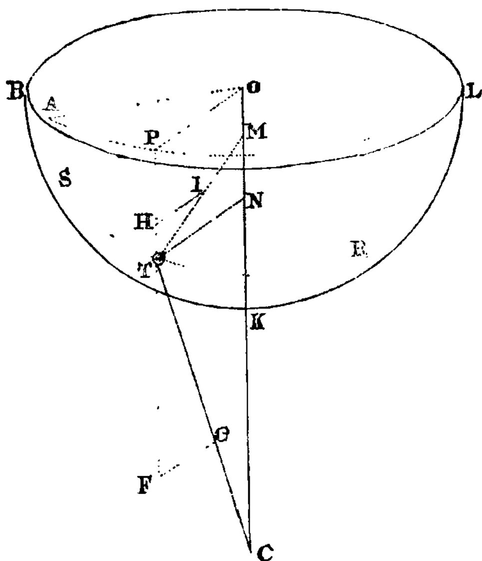
care din acele părţi. Din centrul *C* cu intervalele *CD*, *Cd* să descriem cercurile *DT*, *dt*, întîlnind curba *STtR* în *T* şi *t*. Şi fiind dată atît legea forţei centripete, cît şi înălţimea *CS* de la care a căzut corpul; va fi dată viteza corpului la o altă înălţime oarecare *CT* (potrivit propoziţiei XXXIX). Timpul însă, în care corpul descrie linioara *Tt*, este ca lungimea acestei linioare, adică proporţională cu secanta unghiului *tTC*; şi în raport invers cu viteza. Să presupunem că ordonata *DN* proporţională cu acest timp este perpendiculară pe dreapta *CS* în punctul *D*, şi fiind *Dd* dat, dreptunghiul *Dd* × *DN*, adică aria *DNnd*, va fi proporţională cu acelaşi timp. Prin urmare dacă *PNn* este linia curbă pe care se află punctul *N* incontinuu, şi asimptota ei este dreapta *SQ* stînd perpendicular pe dreapta *CS*: aria *SQPND* va fi proporţională cu timpul în care corpul coborînd a descris linia *ST*; şi deci fiind aflată acea arie timpul va fi dat. Q.E.I.



PROPOZIŢIA LV. TEOREMA XIX

Dacă un corp se mişcă pe o suprafaţă curbă oarecare, a cărei axă trece prin centrul forţelor, şi de la corp se duce o perpendiculară pe axă, şi se duce o paralelă cu ea şi egală dintr-un punct oarecare dat al axei: zic că acea paralelă va descrie o arie proporţională cu timpul.

Fie *BKL* suprafaţa curbă, *T* un corp ce se mişcă pe ea, *STR* traiectoria pe care o descrie corpul pe ea, *S* începutul traiectoriei, *OMK* axa suprafeţei curbe, *TN* dreapta dusă perpendicular de la corp pe axă, *OP* dreapta paralelă şi egală cu ea dusă din punctul *O*, care este dat pe axă; *AP* urma traiectoriei descrisă de punctul *P* în planul *AOP* al liniei mobile *OP*, *A* începutul urmei corespunzător punctului *S*; *TC* dreapta dusă de la corp la centru; *TG* partea ei proporţională cu forţa centripetă, cu care corpul



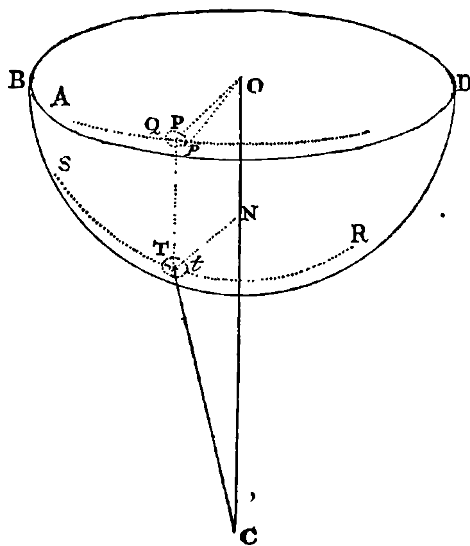
este împins spre centrul C; TM dreapta perpendiculară pe suprafaţa curbă; TI partea ei proporţională cu forţa presiunii, cu care corpul apasă suprafaţa şi la rîndul său este apăsat spre M de către suprafaţă; PTF dreapta paralelă cu axa trecînd prin corp, şi GF, IH drepte duse din G şi I perpendicular pe paralela $PHTF$. Zic acum că aria AOP, descrisă cu raza OP de la începutul mişcării, este proporţională cu timpul. Căci forţa TG (potrivit corolarului II al legilor) se descompune în forţele TF, FG şi forţa TI în forţele TH, HI: Dar forţele TF, TH acţionînd de-a lungul liniei PF perpendiculară pe planul AOP schimbă numai mişcarea corpului întrucît ea este perpendiculară pe acest plan. Şi deci mişcarea lui întrucît este făcută după poziţia planului; adică, mişcarea punctului P prin care se descrie urma AP a traiectoriei în acest plan, este aceeaşi ca şi cînd forţele TF, TH ar fi înlăturate şi corpul ar fi acţionat numai de forţele FG, HI; adică aceeaşi ca şi cînd corpul ar descrie curba AP în planul AOP, cu o forţă centripetă tinzînd spre centrul O, şi egală cu suma forţelor FG şi HI. Dar cu o astfel de forţă se va descrie aria AOP (potrivit propoziţiei 1) proporţională cu timpul. Q.E.D.

COROLAR. Prin acelaşi raţionament, dacă un corp acţionat de forţe ce tind spre două sau mai multe centre pe aceeaşi dreaptă oarecare dată CO, ar descrie într-un spaţiu liber o linie curbă oarecare ST; aria AOP va fi totdeauna proporţională cu timpul.

PROPOZIŢIA LVI. PROBLEMA XXXVII

Admiţînd cvadraturile figurilor curbilinii, şi fiind date atît legea forţei centripete tinzînd spre un centru dat, cît şi suprafaţa curbă a cărei axă trece prin acel centru; se cere să se afle traiectoria pe care o va descrie pe aceeaşi suprafaţă un corp ce porneşte dintr-un loc dat, cu o viteză dată, într-o direcţie dată pe acea suprafaţă.

Menţinînd cele construite în propoziţia de mai sus, să presupunem că corpul T porneşte din locul dat S în direcţia unei drepte de poziţie dată pe traiectoria ce trebuie aflată STR, a cărei urmă în planul BLO fie AB. Şi fiind dată viteza corpului la înălţimea SC, va fi dată viteza lui la orice altă înălţime TC. Să presupunem că cu acea viteză într-un timp dat cît se poate de scurt corpul descrie părticica Tt a traiectoriei sale, şi fie Pp urma ei descrisă în planul AOP. Să unim Op, şi fie elipsa PQ urma pe planul AOP a unui mic cerc descris pe suprafaţa curbă din centrul T cu intervalul Tt. Şi fiind dată mărimea micului cerc Tt, şi fiind dată dis-



tanța sa *TN* sau *PO* la axa *CO*, va fi dată elipsa *pQ* după gen și mărime, precum și după poziția față de dreapta *PO*. Și cum aria *POp* este proporțională cu timpul, și deci este dată fiind dat timpul, unghiul *POp* va fi dat. Și de aici va fi dată intersecția comună *p* a elipsei și a dreptei *Op*, împreună cu unghiul *OPp* în care urma *APp* a traiectoriei taie linia *OP*. De aici în adevăr (comparînd propoziția XLI cu corolarul său 2) felul determinării curbei *APp* apare ușor. Atunci din diversele puncte *T* ale urmei, ridicînd pe planul *AOP* perpendicularele *PT* întîlnind suprafața curbă în *T*, vor fi date diversele puncte *T* ale traiectoriei. Q.E.I.

SECŢIUNEA XI

Despre mişcarea corpurilor ce tind unul spre altul cu forţe centripete.

Pînă acum am expus mişcările corpurilor atrase spre un centru imobil, care totuşi abia există în natura lucrurilor. Căci atracţiunile obişnuiesc a fi între corpuri; şi acţiunile corpurilor atrăgătoare şi atrase sînt totdeauna reciproce şi egale, potrivit legii a treia; astfel că nici cel atrăgător nu poate fi în repaus nici cel atras, dacă sînt două corpuri, ci amîndouă (potrivit corolarului IV al legilor) se rotesc ca printr-o atracţie mutuală în jurul centrului comun de greutate; şi dacă sînt mai multe corpuri, care sau sînt atrase de unul singur, şi la rîndul lor ele îl atrag, sau toate se atrag reciproc, acestea se vor mişca între ele în aşa fel, ca centrul comun de greutate sau să fie în repaus sau să se mişte uniform în direcţie. Din care cauză trec la expunerea mişcării corpurilor ce se atrag mutual, considerînd forţele centripete ca atracţii, deşi poate dacă vorbim fiziceşte, se pot numi mai corect impulsuri. Căci acum ne aflăm în domeniul matematic şi de aceea lăsînd la o parte controversele fizice, ne folosim de un limbaj familiar, prin care ne putem face mai uşor înţeleşi de cititorii matematicieni.

PROPOZIŢIA LVII. TEOREMA XX

Două corpuri care se atrag reciproc descriu, atît în jurul centrului comun de greutate, cît şi unul în jurul celuilalt, figuri asemenea.

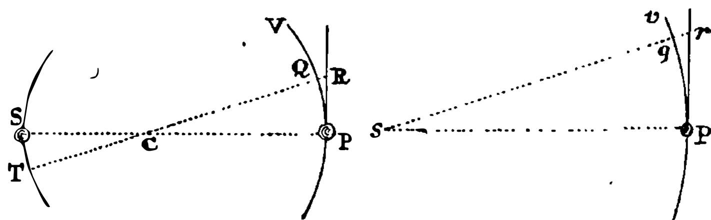
Căci distanţele corpurilor de la centrul comun de greutate sînt invers proporţionale cu corpurile; şi de aceea într-un raport dat între ele şi compunînd într-un raport dat către distanţa întreagă dintre corpuri. Însă aceste distanţe sînt purtate în jurul extremităţii lor comune cu o mişcare unghiulară egală, fiindcă aflîndu-se totdeauna în aceeaşi direcţie nu-şi schimbă înclinarea reciprocă. Liniile drepte însă, care sînt între ele într-un raport dat, şi sînt purtate în jurul extremităţilor lor cu o mişcare unghiulară egală, descriu figuri cu totul asemenea în jurul aceloraşi extremităţi în plane, care sau se află în repaus împreună cu aceste extremităţi, sau se mişcă cu o mişcare neunghiulară. Prin urmare figurile descrise cu aceste distanţe purtate împrejur sînt asemenea. Q.E.D.

PROPOZIŢIA LVIII. TEOREMA XXI

Dacă două corpuri se atrag reciproc cu forţe oarecare şi în acelaşi timp se învîrtesc în jurul centrului comun de greutate: zic că se poate descrie cu aceleaşi forţe în jurul unuia din cele două corpuri considerat ca imobil o figură asemenea şi egală cu figurile pe care le descriu corpurile astfel mişcate unul în jurul altuia.

Să presupunem că corpurile S, P se rotesc în jurul centrului comun de greutate C, mergînd de la S la T şi de la P la Q. Dintr-un punct dat s să ducem sp, sq totdeauna egale şi paralele cu SP, TQ; şi curba pqv pe

care o descrie punctul *p* învîrtindu-se în jurul punctului nemişcat *s*, va fi asemenea şi egală cu curbele, pe care le descriu corpurile *S*, *P* unul în jurul celuilalt: şi deci (potrivit teoremei XX) asemenea cu curbele *ST* şi



PQV, pe care le descriu aceleaşi în jurul centrului comun de greutate *C*: şi aceasta fiindcă sînt date proporţiile liniilor *SC*, *CP* şi *SP* sau *sp* între ele.

CAZUL 1. Centrul comun de greutate *C*, potrivit corolarului IV al legilor, sau este în repaus, sau se mişcă uniform în direcţie. Să presupunem mai întîi, că el este în repaus; şi în *s* şi *p* să aşezăm două corpuri, unul imobil în *s*, altul mobil în *p*, asemenea şi egale cu corpurile *S* şi *P*. Apoi să presupunem că dreptele *PR* şi *pr* ating curbele *PQ* şi *pq* în *P* şi *p*, şi să prelungim *CQ* şi *sq* pînă în *R* şi *r*. Şi din cauza asemănării figurilor *CPRQ*, *sprq* va fi *RQ* către *rq* precum *CP* către *sp*, şi deci într-un raport dat. Prin urmare dacă forţa cu care este atras corpul *P* spre corpul *S*, şi deci spre un centru intermediar *C*, este către forţa cu care corpul *p* este atras spre centrul *s* în acelaşi raport dat; aceste forţe în timpuri egale ar abate totdeauna corpurile de la tangentele *PR*, *pr* spre arcele *PQ*, *pq* prin intervale proporţionale cu ele *RQ*, *rq*, şi deci forţa din urmă ar face ca corpul să se învîrtească pe curba *pqv*, care ar fi asemenea cu curba *PQV*, în care forţa cea dintîi face să se rotească corpul *P*; şi revoluţiile s-ar împlini în aceleaşi timpuri. Dar fiindcă forţele nu sînt între ele în raportul lui *CP* către *sp*, ci (din cauza asemănării şi egalităţii corpurilor *S* şi *s*, *P* şi *p*, şi a egalităţii distanţelor *SP*, *sp*) sînt egale între ele; corpurile în timpuri egale vor fi abătute în mod egal de la tangente: şi de aceea, pentru ca corpul din urmă *p* să poată fi abătut pe un interval mai mare *rq*, se cere un timp mai mare, şi acesta în raportul rădăcinii pătrate a intervalelor; fiindcă (potrivit lemei X) spaţiile descrise chiar la începutul mişcării sînt ca pătratele timpurilor. Să presupunem aşadar că viteza corpului *p* este către viteza corpului *P* în raportul rădăcinii pătrate a distanţei *sp* către distanţa *CP*, în aşa fel că în timpurile, care sînt în acelaşi raport al rădăcinilor pătrate, se descriu arcele *pq*, *PQ*, care sînt într-un raport întreg: Şi corpurile *P*, *p* atrase totdeauna cu forţe egale vor descrie în jurul centrelor în repaus *C* şi *s* figurile asemenea *PQV*, *pqv*, dintre care cea din urmă *pqv* este asemenea şi egală cu figura pe care o descrie corpul *P* în jurul corpului mobil *S*. Q.E.D.

CAZUL 2. Să presupunem acum că centrul comun de greutate împreună cu spaţiul în care corpurile se mişcă între ele, se mişcă uniform în direcţie; şi (potrivit corolarului VI al legilor) toate mişcările în acest spaţiu se vor întîmpla ca mai înainte, şi astfel corpurile vor descrie unul în jurul celuilalt aceleaşi figuri ca mai sus, şi de aceea asemenea şi egale cu figura *pqv*. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici două corpuri atrăgîndu-se reciproc cu forţe proporţionale cu distanţele lor, descriu (potrivit propoziţiei X) atît în jurul

centrului comun de greutate, cît și unul în jurul celuilalt, elipse concentrice; și viceversa, dacă se descriu astfel de figuri, forțele sînt proporționale cu distanțele.

COROLARUL 2. Și două corpuri, atrăgîndu-se cu forțe invers proporționale cu pătratul distanței descriu (potrivit propoziției XI, XII, XIII) atît în jurul centrului comun de greutate, cît și unul în jurul celuilalt, secțiuni conice avînd focarul în centrul, în jurul căruia se descriu figurile. Și viceversa, dacă se descriu astfel de figuri, forțele centripete sînt invers proporționale cu pătratul distanței.

COROLARUL 3. Două corpuri oarecare rotindu-se în jurul centrului comun de greutate descriu cu razele duse la acel centru și la fiecare dintre ele arii proporționale cu timpurile.

PROPOZIŢIA LIX. TEOREMA XXII

Timpul periodic a două corpuri S și P, care se învîrtesc în jurul centrului comun de greutate C, este către timpul periodic al unuia din cele două corpuri P, care se învîrtește în jurul celuilalt S imobil și descriind o figură asemenea și egală cu figurile pe care le descriu corpurile unul în jurul celuilalt, precum rădăcina pătrată a celuilalt corp S către aceea a sumei corporilor S + P.

Căci, din demonstrația propoziției de mai sus, timpurile, în care se descriu arce oarecare *PQ* și *pq* asemenea, sînt ca rădăcinile pătrate ale distanțelor *CP* și *SP* sau *sp*, adică în raportul rădăcinii pătrate a corpului *S* către aceea a sumei corpurilor $S + P$. Și compunînd, sumele timpurilor în care se descriu toate arcele asemenea *PQ* și *pq*, adică, timpurile întregi, în care se descriu figurile întregi asemenea, sînt în același raport al rădăcinilor pătrate. Q.E.D.

PROPOZIŢIA LX. TEOREMA XXIII

Dacă două corpuri S și P, care se atrag reciproc cu forțe invers proporționale cu pătratul distanței lor, se învîrtesc în jurul centrului comun de greutate; zic că axa principală a elipsei pe care o descrie unul din cele două corpuri P în această mișcare în jurul celuilalt S, va fi către axa principală a elipsei, pe care același corp P ar putea-o descrie în jurul celuilalt în repaus S în același timp periodic, precum suma a două corpuri S + P către cea dintîi dintre cele două medii proporționale între această sumă și celălalt corp S.

Căci dacă elipsele descrise sînt egale între ele, timpurile periodice (potrivit teoremei de mai sus) vor fi în raportul rădăcinii pătrate a corpului *S* către aceea a sumei corpurilor $S + P$. Să micșorăm în acest raport timpul periodic în elipsa din urmă, și timpurile periodice vor deveni egale; axa principală a elipsei însă (potrivit propoziției XV) se va micșora într-un raport care este puterea $\frac{3}{2}$ a celui precedent, adică într-un raport care este cubul raportului lui *S* către $S + P$; și deci va fi către axa principală a celeilalte elipse, ca prima dintre cele două medii proporționale între $S + P$ și *S* către $S + P$. Și

invers, axa principală a elipsei descrisă în jurul corpului mobil va fi către axa principală descrisă în jurul celui imobil precum $S + P$ către cea dintîi dintre cele două medii proporţionale între $S + P$ şi S. Q.E.D.

PROPOZIŢIA LXI. TEOREMA XXIV

Dacă două corpuri atrăgîndu-se reciproc cu forţe oarecare, şi nefiind agitate sau împiedicate altfel, se mişcă într-un mod oarecare; mişcările lor vor fi aceleaşi ca şi cînd nu s-ar atrage reciproc, ci ambele ar fi atrase cu aceleaşi forţe de un al treilea corp situat în centrul comun de greutate: Şi legea forţelor de atracţie va fi aceeaşi cu privire la distanţele corpurilor de la centrul comun de greutate şi cu privire la distanţa întreagă dintre corpuri.

Căci acele forţe, cu care corpurile se atrag reciproc, tinzînd spre corpuri, tind spre centrul comun de *greutate* intermediar; şi deci sînt aceleaşi, ca şi cînd ar emana de la un corp intermediar. Q.E.D.

Şi fiindcă este dat raportul distanţei fiecărui corp de la centrul comun către distanţa dintre corpuri, se va da raportul oricărei puteri a distanţei unuia către aceeaşi putere a distanţei celuilalt; precum şi raportul unei cantităţi oarecare care derivă dintr-o distanţă şi cantităţile date într-un mod oarecare către o altă cantitate care derivă la fel din cealaltă distanţă şi tot atîtea cantităţi date şi avînd acel raport dat al distanţelor către cele de mai înainte. Prin urmare dacă forţa, cu care este atras un corp de către altul, este în acelaşi raport sau în raport invers cu distanţa corpurilor între ele; sau ca o putere oarecare a acestei distanţe; sau în sfîrşit ca o cantitate derivată într-un mod oarecare din această distanţă şi din cantităţile date: atunci aceeaşi forţă cu care acelaşi corp este atras spre centrul comun de greutate, va fi la fel în acelaşi raport sau în raport invers cu distanţa corpului atras de la centrul comun, sau precum aceeaşi putere a acestei distanţe, sau în sfîrşit precum cantitatea derivată în mod analog din această distanţă şi cantităţile analoge date. Adică, legea forţei de atracţie va fi aceeaşi cu privire la ambele distanţe. Q.E.D.

PROPOZIŢIA LXII. PROBLEMA XXXVIII

Să se determine mişcările a două corpuri, care se atrag reciproc cu forţe invers proporţionale cu pătratul distanţei lor, şi sînt lăsate libere din locuri date.

Corpurile (potrivit ultimei teoreme) se vor mişca la fel ca şi cînd ar fi atrase de un al treilea corp aşezat în centrul comun de greutate; şi prin ipoteză acel centru va fi în repaus chiar la începutul mişcării şi de aceea va fi (potrivit corolarului IV al legilor) totdeauna în repaus. Trebuie deci să determinăm mişcările corpurilor (potrivit problemei XXV) ca şi cînd ar fi acţionate de forţe tinzînd spre acel centru şi se vor obţine mişcările corpurilor care se atrag reciproc. Q.E.I.

PROPOZIŢIA LXIII. PROBLEMA XXXIX

Să se determine mişcările a două corpuri care se atrag reciproc cu forţe invers proporţionale cu pătratul distanţei lor şi pornesc din locuri date, după drepte date, cu viteze date.

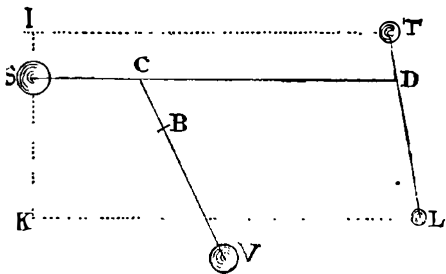
Fiind date mişcările corpurilor la început, se dă mişcarea uniformă a centrului comun de greutate, ca şi mişcarea spaţiului, care împreună cu acest centru se va mişca uniform în direcţie precum şi mişcările iniţiale ale corpurilor faţă de acest spaţiu. Mişcările următoare însă (potrivit corolarului V al legilor şi ultimei teoreme) vor avea loc în acest spaţiu, ca şi cînd spaţiul împreună cu centrul comun de greutate ar fi în repaus, şi corpurile nu s-ar atrage reciproc, ci ar fi atrase de un al treilea corp situat în acel centru. Aşadar mişcarea în acest spaţiu mobil a unuia din cele două corpuri ce porneşte dintr-un loc dat, după dreaptă dată, cu o viteză dată, şi acţionat de o forţă centripetă tinzînd spre acel centru, trebuie determinată prin problema a noua şi a douăzeci şi şasea: şi se va avea simultan mişcarea celuilalt corp în jurul aceluiaşi centru. Cu această mişcare trebuie compusă mişcarea progresivă uniformă aflată mai sus a sistemului spaţiului şi corpurilor ce se învîrtesc în el, şi se va avea mişcarea absolută a corpurilor în spaţiul imobil. Q.E.I.

PROPOZIŢIA LXIV. PROBLEMA XL

Presupunînd că forţele cu care corpurile se atrag reciproc cresc în raportul simplu al distanţelor de la centru: se caută mişcările mai multor corpuri între ele.

Să considerăm mai întîi două corpuri *T* şi *L* avînd centrul comun de greutate *D*. Acestea vor descrie (potrivit primului corolar al teoremei XXI) elipse avînd centrele în *D*, a căror mărime se cunoaşte din problema V.

Căci să presupunem acum că un al treilea corp *S* atrage pe cele două dinainte *T* şi *L* cu forţele acceleratoare *ST*, *SL*, şi că la rîndul său este atras de ele. Forţa *ST* (potrivit corolarului II al legilor) se descompune în forţele *SD*, *DT*; şi forţa *SL* în forţele *SD*, *DL*. Dar forţele *DT*, *DL*, care sînt ca suma lor *TL*, şi deci ca forţele acceleratoare cu care se atrag reciproc corpurile *T* şi *L*, adunate la aceste forţe ale corpurilor *T* şi *L*, cea dintîi la cea dintîi şi cea din urmă la cea din urmă, compun forţe proporţionale cu distanţele *DT* şi *DL*, ca mai sus, dar mai mari ca forţele de mai sus şi deci (potrivit corolarului 1, propoziţiei X şi corolarului 1 şi 8, propoziţiei IV) fac ca acele corpuri să descrie elipse ca mai sus, dar cu o mişcare mai rapidă. Forţele acceleratoare rămase *SD* şi *SD*, prin acţiunile motoare *SD*×*T* şi *SD*×*L*, care sînt precum corpurile atrăgînd acele corpuri în mod egal şi după liniile *TI*, *LK* paralele cu *DS*, nu schimbă întru nimic situaţia



lor una către alta, ci fac ca ele să se apropie în mod egal de linia *IK*; pe care trebuie să ne-o închipuim dusă prin mijlocul corpului *S* și perpendiculară pe linia *DS*. Dar această apropiere de linia *IK* va fi împiedicată făcînd ca sistemul corpurilor *T* și *L* pe de o parte, și corpul *S* pe de alta, să se rotească cu viteze potrivite în jurul centrului comun de greutate *C*. Printr-o astfel de mișcare corpul *S*, deoarece suma forțelor motoare $SD\times T$ și $SD\times L$ proporționale cu distanța *CS* tinde spre centrul *C*, descrie o elipsă în jurul aceluiași *C*; și punctul *D*, deoarece *CS*, *CD* sînt proporționale, va descrie o elipsă asemenea. Dar corpurile *T* și *L* atrase cu forțele motoare $SD\times T$ și $SD\times L$ cel dintîi de cea dintîi, cel din urmă de cea din urmă, în mod egal și după liniile paralele *TI* și *LK*, după cum s-a spus, continuă (potrivit corolarului V și VI al legilor) să descrie elipsele lor în jurul centrului mobil *D* ca mai înainte. Q.E.I.

Să adunăm acum corpul al patrulea *V* și printr-un raționament analog se va deduce că acesta și punctul *C* vor descrie elipse în jurul centrului comun de greutate *B*, menținînd mișcările corpurilor de mai sus *T*, *L* și *S* în jurul centrelor *D* și *C*, dar accelerate. Și prin aceeași metodă va fi permis să se adune mai multe corpuri. Q.E.I.

Acestea se comportă la fel și dacă corpurile *T* și *L* se atrag reciproc cu forțe acceleratoare mai mari sau mai mici decît cu care atrag corpurile rămase în raport cu distanțele.

Fie atracțiunile mutuale ale tuturora precum distanțele duse la corpurile atrăgătoare; din cele precedente se deduce ușor că toate corpurile descriu în timpuri periodice egale elipse diferite în jurul centrului comun de greutate *B*, într-un plan imobil. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXV. TEOREMA XXV

Mai multe corpuri ale căror forțe descresc ca pătratele distanțelor de la centrele or, se pot mișca între ele pe elipse; și cu razele duse la focare pot descrie arii foarte aproape proporționale cu timpurile.

În propoziția de mai sus s-a demonstrat cazul cînd mai multe mișcări au loc exact pe elipse. Cu cît se abate mai mult legea forțelor de la legea presupusă acolo, cu atît vor perturba mai mult corpurile mișcările reciproce și nu se poate ca corpurile, atrăgîndu-se după legea presupusă aici, să se miște exact pe elipse, decît dacă păstrează o anumită proporție a distanțelor între ele. În cazurile următoare însă nu se vor abate mult dela elipse.

Cazul 1. Să presupunem că mai multe corpuri mai mici se rotesc în jurul vreunuia mai mare la distanțe diferite de la acela și spre fiecare tind forțe absolute proporționale cu acele corpuri. Și fiindcă centrul comun de greutate al tuturora (potrivit corolarului IV al legilor) sau este în repaus sau se mișcă uniform în direcție să ne închipuim că corpurile mai mici sînt atît de mici, încît corpul cel mai mare nu va fi niciodată la o distanță sensibilă de acest centru: și cel mare sau va fi în repaus sau se va mișca uniform în direcție, fără abatere sensibilă; iar cele mai mici se vor învîrti în jurul acestuia mare pe elipse, și cu razele duse la el vor descrie arii proporționale

cu timpurile; dacă nu cumva se introduc erori, fie prin îndepărtarea celui mai mare de la centrul comun de greutate, fie prin acţiunile corpurilor mai mici între ele. Dar corpurile mai mici pot fi micşorate pînă ce această eroare şi acţiunile reciproce sînt mai mici decît oricare date; şi deci pînă ce orbitele cadrează cu elipsele şi ariile corespund timpurilor fără eroare care să nu fie mai mică decît una oarecare dată. Q.E.O.

CAZUL 2. Să ne închipuim acum un sistem de corpuri mai mici rotindu-se în felul deja descris în jurul unuia foarte mare sau un alt sistem oarecare de două corpuri rotindu-se unul în jurul altuia că progresează uniform în direcţie, şi în acelaşi timp este împins într-o parte prin forţa altuia cu mult mai mare şi situat la o mare distanţă. Şi fiindcă forţe acceleratoare egale prin care corpurile sînt acţionate după linii paralele, nu schimbă situaţia corpurilor între ele, ci fac ca întreg sistemul să se transforme simultan, păstrînd mişcările părţilor între ele: este evident că, prin atracţiunile spre corpul cel mai mare nu se va mai naşte nici o schimbare a mişcării corpurilor atrase între ele, decît sau prin neegalitatea atracţiilor acceleratoare sau prin înclinarea liniilor între ele după care se fac atracţiile. Să presupunem deci că toate atracţiunile acceleratoare spre corpul cel mai mare sînt între ele în raport invers cu pătratele distanţelor; şi mărind distanţa corpului celui mai mare, pînă ce diferenţele dreptelor duse de la acesta la celelalte faţă de lungimile lor şi înclinările lor reciproce sînt mai mici, decît oricare dată; mişcările părţilor sistemului între ele vor persevera fără erori care nu sînt mai mici decît oricare date. Şi fiindcă din cauza distanţei reciproce foarte mici a acelor părţi, sistemul întreg este atras la fel ca un singur corp, el va fi mişcat prin această atracţie ca un singur corp; adică centrul său de greutate va descrie în jurul corpului celui mare o secţiune conică oarecare (anume o iperbolă sau parabolă printr-o atracţiune slabă, elipsă în cazul uneia mai intense) şi cu raza dusă la corpul cel mai mare va descrie arii proporţionale cu timpul, fără erori, afară de acelea pe care sînt în stare să le producă distanţele părţilor, care fără îndoială sînt foarte mici şi se pot micşora după voie. Q.E.O.

Printr-un raţionament analog se poate proceda în cazuri mai complicate la infinit.

COROLARUL 1. În al doilea caz, cu cît se apropie mai mult corpul cel mai mare dintre toate de sisteme de două sau mai multe, cu atît mai mult vor fi perturbate mişcările părţilor sistemului între ele; fiindcă cu cît este mai mare înclinarea reciprocă a liniilor duse de la corpul cel mai mare la acestea, cu atît este mai mare inegalitatea proporţiei.

COROLARUL 2. Dar vor fi mai mult perturbate, presupunînd că atracţiile acceleratoare ale părţilor sistemului, spre corpul cel mai mare, nu sînt între ele în raport invers cu pătratele distanţelor de la corpul cel mai mare; mai ales dacă inegalitatea acestei proporţii este mai mare ca inegalitatea proporţiei distanţelor de la corpul cel mai mare. Căci dacă forţa acceleratoare, acţionînd în mod egal şi după linii paralele, nu perturbă de loc mişcările între ele, este necesar, ca din inegalitatea acţiunii să se nască o perturbaţie şi să fie mai mare sau mai mică după cum inegalitatea este mai mare sau mai mică. Excesele impulsurilor mai mari, acţionînd asupra unor corpuri şi neacţionînd asupra altora, îşi vor schimba în mod necesar poziţia între ele. Şi această perturbaţie adunată la perturbaţia, care se naşte din înclinarea şi neegalitatea liniilor, va face mai mare perturbaţia întreagă.

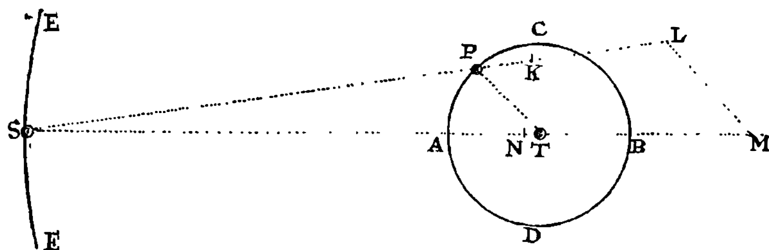
COROLARUL 3. De unde dacă părţile acestui sistem se mişcă pe elipse, sau pe cercuri fără perturbaţie importantă; este evident, că ele sau nu sînt acţionate decît foarte puţin de către forţe acceleratoare, ce tind spre alte corpuri sau sînt acţionate în mod aproape egal, şi după linii paralele.

PROPOZIŢIA LXVI. TEOREMA XXVI

Dacă trei corpuri, ale căror forţe descresc în raport cu pătratul distanţelor, se atrag reciproc; şi atracţiile acceleratoare a oricăror două dintre ele spre un al treilea sînt în raport invers cu pătratele distanţelor; iar cele mai mici se rotesc în jurul celui mai mare: zic că corpul interior va descrie în jurul celui mai dinlăuntru şi celui mai mare, cu razele duse la el arii mai proporţionale cu timpul şi o figură mai apropiată de forma elipsei avînd focarul la întîlnirea razelor, dacă corpul cel mai mare va fi agitat de aceste atracţii, decît dacă corpul cel mai mare sau nefiind atras de cele mai mici este în repaus, sau atras fiind cu mult mai puţin sau cu mult mai mult, va fi agitat cu mult mai puţin sau cu mult mai mult.

Aceasta este aproape evident din demonstraţia corolarului al doilea al propoziţiei precedente; dar se poate arăta printr-un raţionament cu mult mai distinct şi mai convingător astfel.

CAZUL 1. Să presupunem că în acelaşi plan în jurul corpului mai mare *T* se rotesc corpurile mai mici *P* şi *S*, dintre care *P* descrie orbita interioară *PAB* şi *S* cea exterioară *ESE*. Fie *SK* distanţa medie a corpurilor *P* şi *S*; şi atracţia acceleratoare a corpului *P* spre *S*, la distanţa medie să se exprime prin aceeaşi. Să luăm *SL* către *SK* precum pătratul lui *SK* către *SP* şi *SL* va fi atracţia acceleratoare a corpului *P* spre *S* la o distanţă oarecare *SP*. Să unim *PT* şi să ducem *LM* paralelă cu ea întîlnind pe *ST* în



M; şi să descompunem atracţiunea *SL* (potrivit corolarului II al legilor) în atracţiunile *SM*, *LM*. Şi astfel corpul *P* va fi acţionat de o forţă acceleratoare triplă. Una din forţe tinde către *T*, şi se naşte din atracţiunea mutuală a corpurilor *T* şi *P*. Sub influenţa numai a acestei forţe corpul *P* ar trebui să descrie în jurul corpului *T*, fie nemişcat, fie agitat de această atracţie, cu raza *PT* şi arii proporţionale cu timpurile şi o elipsă al cărei centru este în centrul corpului *T*. Aceasta este evident din propoziţia XI şi corolarele 2 şi 3, teorema XXI. Cealaltă forţă este cea de atracţie *LM*, care fiindcă

este îndreptată de la *P* spre *T* suprapusă la forța cea dintîi va coincide cu ea și astfel va face ca să se descrie și acum arii proporționale cu timpurile potrivit corolarului 3 teorema XXI. Dar fiindcă nu este invers proporțională cu pătratul distanței *PT*, ea va alcătui cu forța precedentă o forță ce deviază de la această proporție, și anume cu atît mai mult, cu cît proporția acestei forțe către forța precedentă este mai mare, celelalte mărimi fiind identice. Prin urmare cum (potrivit propoziției XI și corolarului 2, teorema XXI) forța, cu care se descrie elipsa în jurul focarului *T*, ar trebui să tindă spre acel focar, și să fie invers proporțională cu pătratul distanței *PT*; acea forță compusă, deviind de la această proporție, va face ca orbita *PAB* să devieze de la forma unei elipse avînd focarul în *T*; și anume cu atît mai mult, cu cît este mai mare deviația de la această proporție; și de aceea cu cît este mai mare proporția forței a doua *LM* către forța dintîi, celelalte mărimi fiind egale. Dar acum forța a treia *SM*, atrăgînd corpul *P* într-o direcție paralelă cu *ST*, va compune cu forțele dintîi o forță, care nu mai este dirijată de la *P* spre *T*; și care se abate cu atît mai mult de la această determinare cu cît este mai mare proporția acestei a treia forțe către primele forțe, celelalte mărimi fiind egale: și de aceea care va face ca corpul *P* cu raza *TP*, să nu mai descrie arii proporționale cu timpurile, și ca deviația de la această proporționalitate să fie cu atît mai mare, cu cît este mai mare proporția forței a treia către celelalte forțe. Această a treia forță însă va mări aberația orbitei *PAB* de la forma eliptică menționată dintr-un motiv dublu, atît fiindcă nu este dirijată de la *P* la *T*, cît și fiindcă nu este invers proporțională cu pătratul distanței *PT*. Ceea ce fiind înțeles, este evident, că ariile atunci sînt mai proporționale cu timpurile, cînd forța a treia, menținînd forțele celelalte, este minimă și că orbita *PAB* atunci se apropie mai mult de forma eliptică menționată, cînd atît forța a doua cît și a treia, dar îndeosebi forța a treia este minimă, prima forță fiind menținută.

Să exprimăm atracția acceleratoare a corpului *T* spre *S* prin linia *SN*; și dacă atracțiunile acceleratoare *SM*, *SN* sînt egale; acestea atrăgînd corpurile *T* și *P* în mod egal și după linii paralele, nu vor schimba situația lor reciprocă. Căci mișcările corpurilor între ele vor fi aceleași (potrivit corolarului VI al legilor) ca și cînd aceste atracțiuni ar fi înlăturate. Și printr-un raționament analog dacă atracția *SN* este mai mică decît atracțiunea *SM*, ea va suprima partea *SN* a atracțiunii *SM*, și va rămîne numai partea *MN*, prin care s-ar perturba proporționalitatea timpurilor și ariilor și forma eliptică a orbitei. Și la fel dacă atracția *SN* este mai mare ca atracțiunea *SM*, se va naște din diferența singură *MN* perturbația proporționalității și a orbitei. Astfel prin atracția *SN* se reduce totdeauna atracția a treia de mai sus *SM* la atracția *MN*, atracțiunea întîi și a doua rămînînd complet neschimbate: și de aceea ariile și timpurile se apropie de proporționalitate, și orbita *PAB* de forma eliptică menționată cu atît mai mult, cu cît atracția *MN* este sau nulă sau cît se poate de mică; adică, cînd atracțiunile acceleratoare ale corpurilor *P* și *T*, spre corpul *S* se apropie cît se poate de egalitate; adică cînd atracția *SN* nu este nulă, nici mai mică decît cea mai mică dintre toate atracțiile *SM*, ci aproape media între cea mai mare și cea mai mică dintre toate atracțiunile *SM*, adică nu este cu mult mai mare nici cu mult mai mică decît atracția *SK*. Q.E.D.

Cazul 2. Căci să presupunem că corpurile mai mici *P*, *S* se rotesc în jurul celui mai mare *T* în plane diferite și forța *LM*, acționînd după linia

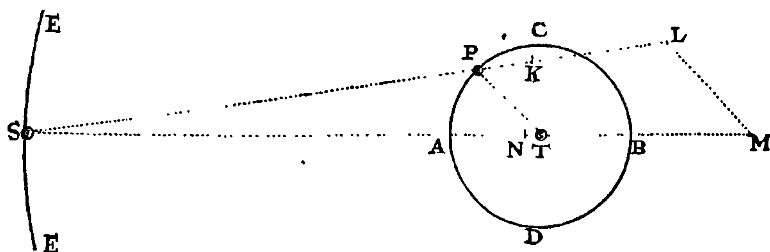
PT situată în planul orbitei *PAB*, va avea același efect ca mai înainte, și nici nu va scoate corpul *P* din planul orbitei sale. Dar forța cealaltă *NM*, acționînd după o linie paralelă cu *ST* (și deci cînd corpul *S* se află în afara liniei nodurilor, se înclină spre planul orbitei *PAB*) în afară de perturbarea mișcării în lungime expusă mai sus, va induce perturbarea mișcării în lățime trăgînd corpul *P* din planul orbitei sale. Și această perturbare într-o poziție oarecare dată a corpurilor *P* și *T* între ele, va fi ca forța generatoare *MN* și deci va deveni minimă cînd *MN* este minimă, adică (după cum am expus-o deja) cînd atracția *SN* nu este cu mult mai mare, nici cu mult mai mică decît atracția *SK*. Q.E.D.

COROLARUL 1. Din acestea se deduce ușor, că, dacă, mai multe corpuri mai mici *P*, *S*, *R* etc. se învîrtesc în jurul unuia mare *T*, mișcarea corpului celui mai dinlăuntru *P* va fi mai puțin perturbată prin atracțiunile celor exterioare, cînd corpul cel mare *T* este la fel atras și agitat de celelalte, în raportul forțelor acceleratoare, ca și celelalte de către acesta.

COROLARUL 2. Într-un sistem de trei corpuri *T*, *P*, *S*, dacă atracțiunile acceleratoare a două oarecare către al treilea sînt între ele invers proporționale cu pătratele distanțelor; corpul *P*, cu raza *PT*, va descrie o arie în jurul corpului *T* mai repede în apropierea conjuncțiunii *A* și a opoziției *B*, decît în apropierea cvadraturilor *C*, *D*. Căci orice forță cu care corpul *P* este acționat și corpul *T* nu este acționat, și care nu lucrează după linia *PT* accelerează sau întîrzie descrierea ariei, după cum este dirijată în același sens sau în sens opus cu ea. Aceasta în trecerea corpului *P* de la *C* la *A* tinde în sensul mișcării, și accelerează mișcarea; apoi pînă la *D* în sens contrar, și întîrzie mișcarea; apoi în același sens pînă la *B*, și în sfîrșit în sens contrar trecînd de la *B* la *C*.

COROLARUL 3. Și prin același raționament apare că corpul *P*, celelalte mărimi fiind egale se mișcă mai repede în conjuncțiune și opoziție decît în cvadraturi.

COROLARUL 4. Orbita corpului *P*, celelalte mărimi fiind egale, este mai curbă în cvadraturi decît în conjuncțiune și opoziție. Căci corpurile mai repezi se abat mai puțin de la drumul drept. Și afară de aceasta forța *KL* sau *NM*, în conjuncțiune și opoziție este contrară forței cu care corpul *T* atrage corpul *P*; și deci micșorează forța; corpul *P* însă se va abate mai puțin de la drumul drept, cînd este mai puțin acționat spre corpul *T*.

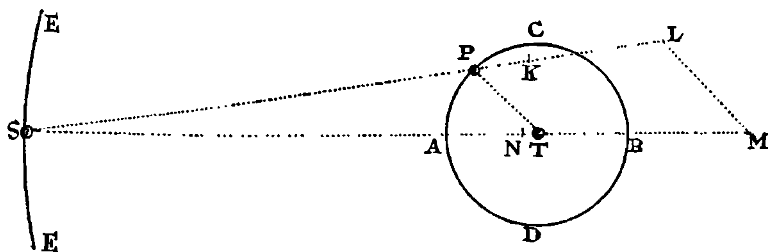


COROLARUL 5. De unde corpul *P*, celelalte mărimi rămînînd egale, se îndepărtează mai mult de corpul *T* în cvadraturi, decît în conjuncțiune și opoziție. Acestea se întîmplă astfel dacă se exclude mișcarea excentrici-

tăţii. Căci dacă orbita corpului *P* este excentrică, excentricitatea ei (după cum se va arăta îndată în corolarul 9 al acesteia) va deveni maximă cînd apsidele sînt în syzigii; şi deci se poate întîmpla ca corpul *P*, apropiindu-se de apsida cea mai depărtată, se îndepărtează mai mult de corpul *T* în syzigii decît în cvadraturi.

COROLARUL 6. Deoarece forţa centripetă a corpului central *T*, cu care corpul *P* este reţinut pe orbita sa, este mărită în cvadraturi prin adunarea forţei *LM*, şi micşorată în syzigii prin scăderea forţei *KL*, şi din cauza mărimii forţei *KL*, este mai mult micşorată decît mărită; iar forţa centripetă (potrivit corolarului 2 propoziţia IV) este proporţională cu raza *TP* şi invers proporţională că pătratul timpului periodic: este evident că acest raport compus se micşorează prin acţiunea forţei *KL*; şi deci timpul periodic, dacă raza *TP* a orbitei ar rămîne aceeaşi, s-ar mări şi anume ca rădăcina pătrată a raportului în care se micşorează forţa centripetă: şi deci această rază mărindu-se sau micşorîndu-se, timpul periodic va creşte mai mult sau se va micşora mai puţin decît în puterea $\frac{3}{2}$ a razei (potrivit corolarului 6, propoziţia IV). Dacă forţa corpului central ar scădea încetul cu încetul corpul *P* totdeauna mai mic şi mai puţin atras incontinuu se va îndepărta mai mult de centrul *T*, şi invers, dacă forţa ar creşte, s-ar apropia mai mult. Aşadar dacă acţiunea corpului foarte îndepărtat *S*, prin care acea forţă se micşorează se va mări şi micşora alternativ: raza *PT* de asemenea se va mări şi se va micşora alternativ; şi timpul periodic se va mări şi micşora într-un raport compus din puterea $\frac{3}{2}$ a razei şi rădăcina pătrată a raportului în care forţa centripetă a corpului central *T* creşte sau descreşte prin creşterea sau descreşterea acţiunii corpului foarte îndepărtat *S*.

COROLARUL 7. Din cele de mai sus mai urmează, că axa elipsei descrisă de corpul *P*, sau linia apsidelor, în ce priveşte mişcarea unghiulară progresează şi regresează alternativ, dar totuşi mai mult progresează, şi prin excesul progresului este dusă înainte. Căci forţa cu care corpul *P* este împins spre



corpul *T* în cvadraturi, unde forţa *MN* dispare, se compune din forţa *LM* şi din forţa centripetă cu care corpul *T* atrage corpul *P*. Prima forţă *LM* dacă distanţa *PT* creşte, se măreşte aproape în acelaşi raport cu această distanţă, şi forţa din urmă descreşte în raport cu pătratul ei, şi deci suma acestor forţe descreşte mai puţin decît în raportul pătratului distanţei *PT*, şi de aceea (potrivit corolarului 1, propoziţia XLV) face ca afeliul sau apsida cea mai de sus să meargă înapoi. Dar în conjuncţie şi opoziţie, forţa

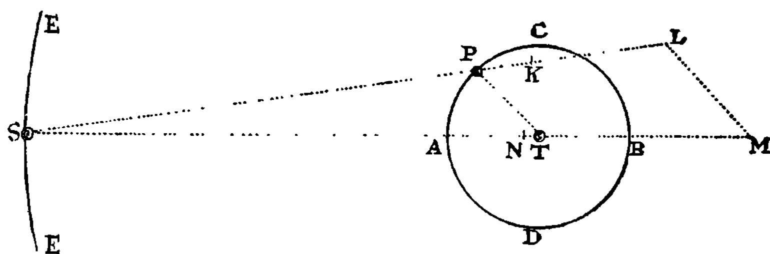
cu care corpul *P* este împins spre corpul *T* este diferența între forța cu care corpul *T* atrage corpul *P*, și forța *KL*; și acea diferență, deoarece forța *KL* crește aproximativ în raportul distanței *PT* descrește într-un raport mai mare decît pătratul distanței *PT* și deci (potrivit corolarului 1, propoziția XLV) face ca afeliul să progreseze. În locurile dintre syzigii și cvadraturi, mișcarea afeliului depinde de ambele cauze luate împreună, astfel că din cauza excesului uneia sau alteia el progresează sau regresează. De unde cum forța *KL* în syzigii este aproape de două ori mai mare ca forța *LM* în cvadraturi, excesul va fi de partea forței *KL*, și va duce afeliul înainte. Adevărul corolarului acestuia și al celui precedent se va înțelege mai ușor concepînd sistemul celor două corpuri înconjurat din toate părțile de mai multe corpuri *S*, *S*, *S* etc. situate pe orbita *ESE*. Căci prin acțiunile acestora acțiunea lui *P* se va micșora în toate părțile, și va descrește după un raport mai mare decît pătratul distanțelor.

COROLARUL 8. Dar fiindcă mișcarea progresivă sau retrogradă a apsidelor depinde de descreșterea forței centripete într-un raport mai mare sau mai mic decît pătratul raportului distanței *TP*, în trecerea corpului de la apsida cea mai de jos la apsida cea mai de sus; precum și de creșterea analogă în întoarcerea la apsida cea mai de jos; și de aceea este mai mare cînd raportul forței în apsida cea mai de sus către forța în apsida cea mai de jos se îndepărtează mai mult de inversul pătratului raportului distanțelor: este evident că apsidele în syzigiile lor, din cauza forței scăzute *KL* sau $NM-LM$, vor progresa mai repede, și în cvadraturile lor vor retrograda mai încet din cauza forței aditive *LM*. Dar din cauza lungimii timpului în care se continuă viteza progresării sau încetinirea regresării, această inegalitate devine foarte mare.

COROLARUL 9. Dacă un corp oarecare, sub influența unei forțe invers proporționale cu pătratul distanței sale de la centru, se va roti în jurul acestui centru pe o elipsă; și apoi, în coborîrea de la apsida cea mai de sus sau de la afeliu la apsida cea mai de jos, acea forță prin adunarea continuă a unei forțe noi va crește într-un raport mai mare decît al pătratului distanței micșorate: este evident că corpul, împins prin creșterea acelei forțe noi totdeauna spre centru, se va apropia de acesta mai mult decît dacă ar fi acționat de o singură forță crescînd în raportul pătratului distanței micșorate; și deci va descrie o orbită interioară orbitei eliptice, și în apsida cea mai de jos se va apropia de centru mai mult ca mai înainte. Prin urmare orbita, prin creșterea acestei forțe noi, va deveni mai excentrică. Dacă acum forța, la întoarcerea corpului de la apsida cea mai de jos la apsida cea mai de sus, ar descrește cu aceleași grade cu care crescuse mai înainte, corpul se va întoarce la distanța dintîi, și deci dacă forța descrește într-un raport mai mare, corpul acum mai puțin atras se va ridica la o distanță mai mare și astfel excentricitatea orbitei se va mări și mai mult. De aceea dacă raportul creșterii și descreșterii forței centripete se mărește prin diversele revoluții, excentricitatea va crește totdeauna; și invers ea va scădea dacă raportul descrește. Acum în adevăr în sistemul corpurilor *TPS*, cînd apsidele orbitei *PAB* sînt în cvadraturi, raportul creșterii și descreșterii este minim, și este maxim cînd apsidele sînt în syzigii. Dacă apsidele se află în cvadraturi, raportul în apropierea apsidelor este mai mic și în apropierea syzigiilor este mai mare decît pătratul raportului distanțelor și din acel raport mai mare se

naşte mişcarea directă a afeliului, după cum s-a spus deja. Dar dacă se consideră raportul întregii creşteri sau descreşteri în progresul dintre apside, acesta este mai mic decît pătratul raportului distanţelor. Forţa în apsida cea mai de jos este către forţa în apsida cea mai de sus într-un raport mai mic decît pătratul raportului distanţei apsidei celei mai de sus de la focarul elipsei către distanţa apsidei celei mai de jos de la acelaşi focar: şi invers, cînd apsidele se află în syzigii, forţa în apsida cea mai de jos este către forţa în apsida cea mai de sus într-un raport mai mare decît pătratul raportului distanţelor. Căci forţele *LM* în cvadraturi adunate la forţele corpului *T* compun forţe într-un raport mai mic, şi forţele *KL* în syzigii scăzute din forţele corpului *T* rămîn forţe într-un raport mai mare. Prin urmare raportul întregei descreşteri şi creşteri în trecerea dintre apside, este minim în cvadraturi, maxim în syzigii: şi de aceea în trecerea apsidelor de la cvadraturi la syzigii creşte incontinuu şi măreşte excentricitatea elipsei; şi în trecerea de la syzigii la cvadraturi descreşte incontinuu, şi micşorează excentricitatea.

COROLARUL 10. Pentru a expune cauza erorilor în latitudine să ne închipuim că planul orbitei *EST* rămîne imobil; şi din cauza expusă a erorilor este evident, că din forţele *NM*, *ML*, care sînt singura şi întreaga cauză, forţa *ML* lucrînd totdeauna după planul orbitei *PAB*, niciodată nu perturbă mişcarea în latitudine; şi că forţa *NM*, cînd nodurile sînt în syzigii, acţionînd de asemenea în acelaşi plan al orbitei, nu perturbă aceste mişcări; cînd însă sînt în cvadraturi, le perturbă foarte mult şi atrăgînd incontinuu corpul *P* din planul orbitei sale micşorează înclinarea planului în trecerea corpului de la cvadraturi la syzigii, şi la rîndul său o măreşte în trecerea de la syzigii la cvadraturi. De unde urmează că dacă corpul se află în syzigii înclinarea devine cea mai mică dintre toate, şi revine aproape la



mărimea întîi cînd corpul se apropie de nodul proxim. Dar dacă nodurile sînt situate în octanţii de după cvadraturi, adică, între *C* şi *A*, *D* şi *B*, din felul celor expuse se va înţelege, că, în trecerea corpului *P* de la unul din cele două noduri la gradul al 90-lea, înclinarea planului se micşorează încontinuu; apoi în trecerea prin proximele 45 grade, pînă la cvadratura proximă, înclinarea creşte şi apoi din nou în trecerea prin alte 45 grade, pînă la nodul proxim, scade. Aşadar înclinarea se micşorează mai mult decît creşte şi de aceea este totdeauna mai mică în nodul următor decît în cel precedent. Şi printr-un raţionament asemănător, înclinarea se măreşte mai mult decît se micşorează, cînd nodurile sînt în ceilalţi octanţi între *A* şi *D*, *B* şi *C*. Prin urmare înclinarea este cea mai mare dintre toate cînd nodurile sînt în syzigii. În trecerea lor de la syzigii la cvadraturi, se micşo-

rează la apropierea diverselor corpuri de noduri; și sînt cele mai mici dintre toate cînd nodurile sînt în cvadraturi și corpul în syzigii: apoi crește cu aceleași grade, cu care descreștea mai înainte; și cînd nodurile ating syzigiile proxime, revine la prima mărime.

COROLARUL 11. Deoarece corpul *P*, cînd nodurile sînt în cvadraturi, încontinuu este atras din planul orbitei sale, și anume în partea spre *S* în trecerea sa de la nodul *C* prin conjuncția *A* spre nodul *D*; și în partea contrară în trecerea de la nodul *D* prin opoziția *B* spre nodul *C*: este evident, că în mișcarea sa de la nodul *C* corpul se depărtează încontinuu de la primul plan *CD* al orbitei sale pînă ce a ajuns la nodul proxim; și deci în acest nod, foarte îndepărtat de primul plan *CD*, trece prin planul orbitei *EST* nu în celălalt nod *D* al acelui plan, ci într-un punct ce tinde spre părțile corpului *S*, și care deci devine un nou loc al nodului tinzînd spre pozițiile anterioare. Și printr-un raționament analog nodurile tind să se îndepărteze în trecerea corpului din acest nod la nodul proxim. Prin urmare nodurile situate în cvadraturi se îndepărtează încontinuu; în syzigii, unde mișcarea nu este de loc perturbată în latitudine, — sînt în repaus; în locurile intermediare, participînd la ambele condițiuni, se îndepărtează mai încet: și astfel, fiind totdeauna fie retrograde fie staționare în diversele revoluții sînt duse înapoi.

COROLARUL 12. Toate erorile descrise în aceste corolare sînt cu ceva mai mari în conjuncția corpurilor *P*, *S*, decît în opoziția lor; și anume din cauză că forțele generatoare *NM* și *ML* sînt mai mari.

COROLARUL 13. Și cum împrejurările acestor corolare nu depinde de mărimea corpului *S*, cele de mai sus sînt valabile, cînd corpul *S* este atît de mare, încît sistemul celor două corpuri *T* și *P* se învîrtește în jurul lui. Și din creșterea corpului *S*, și deci din creșterea forței sale centripete, din care iau naștere erorile corpului *P*, toate erorile devin la distanțe egale mai mari în acest caz decît în altul, cînd corpul *S* se rotește în jurul sistemului corpurilor *P* și *T*.

COROLARUL 14. Cum însă forțele *NM*, *ML*, cînd corpul *S* este foarte îndepărtat, sînt aproximativ ca forța *SK* și raportul *PT* către *ST* luate împreună, adică, dacă se dă atît distanța *PT*, cît și forța absolută a corpului *S*, în raport invers cu ST^3; dar forțele *NM*, *ML* sînt cauzele erorilor și a tuturor efectelor, despre care s-a tratat în corolarele precedente: este evident, că toate efectele dacă se menține sistemul corpurilor *T* și *P*, și se schimbă numai distanța *ST* și forța absolută a corpului *S*, sînt aproape într-un raport compus din raportul direct al forței absolute a corpului *S*, și din raportul invers al cubului distanței *ST*. De unde dacă sistemul corpurilor *T* și *P* se rotește în jurul corpului foarte îndepărtat *S*; forțele *NM*, *ML*, — și efectele lor vor fi (potrivit corolarului 2 și 6 al propoziției IV) în raport invers cu pătratul timpului periodic. Și de aici iarăși, dacă mărimea corpului *S* este proporțională cu forța lui absolută, forțele *NM*, *ML* și efectele lor vor fi precum cubul diametrului aparent al corpului foarte îndepărtat *S* privit din corpul *T*, și invers. Căci aceste rapoarte sînt aceleași, ca raportul compus de mai sus.

COROLARUL 15. Și fiindcă dacă, menținînd forma, proporțiile și înclinația reciprocă a orbitelor *ESE* și *PAB*, se va schimba mărimea lor și dacă forțele corpurilor *S* și *T* sau se mențin, sau se schimbă într-un raport oare-

care dat aceste forţe (adică, forţa corpului *T*, cu care corpul *P* este silit să să se abată de la drumul drept pe orbita *PAB*, şi forţa corpului *S*, cu care acelaşi corp *P* este constrîns să devieze din acea orbită) acţionează totdeauna în acelaşi fel, şi în aceeaşi proporţie: este necesar ca toate efectele să fie asemenea şi proporţionale, şi proporţionale timpurilor efectelor; adică, ca toate erorile lineare să fie ca diametrele orbitelor iar cele unghiulare aceleaşi, ca mai înainte, şi timpurile erorilor lineare analoge, sau ale celor unghiulare egale ca timpurile periodice ale orbitelor.

COROLARUL 16. De unde, dacă se dau formele şi inclinaţia reciprocă ale orbitelor, şi într-un mod oarecare se schimbă mărimile corpurilor, forţele şi distanţele; fiind date erorile şi timpurile erorilor într-un caz, se pot afla în mod apropiat erorile şi timpurile erorilor într-un altul oarecare: dar mai repede prin această metodă. Forţele *NM*, *ML*, menţinînd pe celelalte, sînt precum raza *TP*; şi efectele periodice ale acestora (potrivit

corolarului 2, lema X), precum forţele şi pătratul timpului periodic al corpului *P* împreună. Acestea sînt erorile liniare ale corpului *P*; şi de aici erorile unghiulare privite din centrul *T* (adică, atît mişcarea afeliului şi a nodurilor cît şi toate erorile aparente în longitudine şi latitudine) sînt, în oricare revoluţie a corpului *P*, foarte apropiate de pătratul timpului de revoluţie. Să unim aceste rapoarte cu rapoartele corolarului 14 şi în orice sistem al corpurilor *T*, *P*, *S*, cînd *P* se roteşte în jurul lui *T* foarte apropiat de el, şi *T* în jurul lui *S* foarte îndepărtat, erorile unghiulare ale corpului *P*, privite din centrul *T*, vor fi, în diversele revoluţii ale corpului *P*, precum pătratul timpului periodic al corpului *P* şi în raport invers cu pătratul timpului periodic al corpului *T*. Şi de aici mişcarea medie a afeliului va fi într-un raport dat către mişcarea medie a nodurilor; şi ambele mişcări vor fi precum timpul periodic al corpului *P* şi în raport invers cu pătratul timpului periodic al corpului *T*. Mărind sau micşorînd excentricitatea şi inclinarea orbitei *PAB* nu se schimbă în mod sensibil mişcările afeliului şi a nodurilor, decît dacă acelea sînt foarte mari.

COROLARUL 17. Cum însă linia *LM* este cînd mai mare cînd mai mică decît raza *PT*, forţa medie *LM* se exprimă prin acea rază *PT*; şi aceasta va fi către forţa medie *SK* sau *SN* (care se poate exprima prin *ST*) ca lungimea *PT* către lungimea *ST*. Dar forţa medie *SN* sau *ST*, cu care corpul *T* este reţinut pe orbita sa în jurul lui *S* către forţa cu care corpul *P* este reţinut pe orbita sa în jurul lui *T*, într-un raport compus din raportul razei *ST* către raza *PT*, şi din pătratul raportului timpului periodic al corpului *P* în jurul lui *T* către timpul periodic al corpului *T* în jurul lui *S*. Şi prin egali-

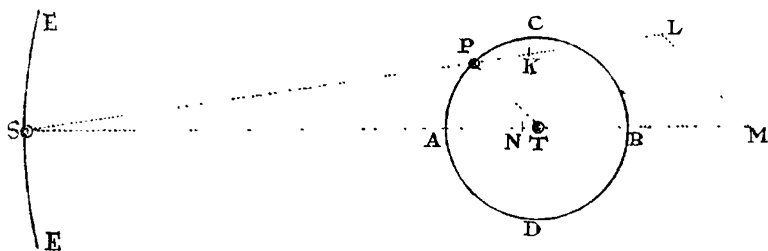
tate, forța medie *LM* către forța cu care corpul *P* este reținut pe orbita sa în jurul lui *T* (cu care același corp *P*, se poate roti în același timp periodic în jurul unui punct imobil oarecare *T* la distanța *PT*) este în același raport al pătratelor timpurilor periodice. Fiind deci date timpurile periodice împreună cu distanța *PT*, se dă forța mijlocie *LM*; și aceasta fiind dată, se dă cu bună aproximație și forța *MN* prin analogia liniilor *PT*, *MN*.

COROLARUL 18. După aceleași legi, prin care corpul *P* se rotește în jurul corpului *T*, să ne închipuim că mai multe corpuri fluide se rotesc în jurul aceluiași *T* la distanțe egale de el; apoi acestea apropiindu-se pînă la atingere formează un inel fluid rotund și concentric cu corpul *T*; și diversele părți ale inelului, efectuînd toate mișcările lor după legea corpului *P*, se apropie mai mult de corpul *T* și se vor mișca mai repede în conjuncția și în opoziția lor și a corpului *S*, decît în cvadraturi. Și nodurile acestui inel, sau intersecțiile lui cu planul orbitei corpului *S* sau *T*, vor fi în repaus în syzigii; în afară de syzigii însă se vor mișca retrograd și anume mai repede în cvadraturi, mai încet în celelalte locuri. Înclinarea inelului de asemenea va varia, și axa lui va oscila în diversele revoluții și după o revoluție completă va reveni la poziția de mai înainte dacă nu cumva este dusă împrejur prin precesiunea nodurilor.

COROLARUL 19. Să ne închipuim acum sfera corpului *T*, constînd dintr-o materie nefluidă, că se mărește și se extinde pînă la acest inel, și că un canal tăiat în circuit conține apă, și se mișcă în mod uniform cu aceeași mișcare periodică în jurul axei sale. Acest lichid alternativ accelerat și întîrziat (ca în corolarul de mai sus) în syzigii va fi mai repede, în cvadraturi mai încet ca suprafața sferei, și astfel va curge în canal și se va retrage la fel ca marea. Apa rotindu-se în jurul centrului în repaus al sferei, dacă se înlătură atracțiunea corpului *S*, nu va cîștiga nici o mișcare de flux și reflux. La fel este cazul sferei ce progresează uniform în direcție, și în același timp se învîrtește în jurul centrului său (potrivit corolarului V al legilor) ca și al sferei atrase în mod uniform din cursul rectiliniu (potrivit corolarului VI al legilor). Dar dacă corpul *S* se apropie din atracția inegală a lui apa va fi imediat perturbată. Căci va fi mai mare atracțiunea apei mai apropiate, mai mică a celei mai îndepărtate. Dar forța *LM* va atrage apa în jos în cvadraturi, și va face ca ea să descindă pînă la syzigii; și forța *KL* o va atrage în sus în syzigii, și va opri coborîrea ei, și va face ca ea să se urce pînă la cvadraturi: afară doar dacă mișcarea de flux și reflux nu va fi dirijată de canal și întrucîtva întîrziată prin frecare.

COROLARUL 20. Dacă acum inelul devine rigid, și sfera se micșorează mișcarea de flux și reflux va înceta; dar mișcarea aceea oscilatorie de înclinație și precesiunea nodurilor vor rămîne. Să presupunem că sfera are aceeași axă cu inelul, și efectuează rotațiile în aceleași timpuri, și cu suprafața ei îl atinge în interior, și se lipește de el; și participînd la mișcarea lui, ansamblul va oscila, și nodurile vor regresa. Căci sfera, după cum se va arăta îndată, este indiferentă la primirea tuturor impresiilor. Unghiul de înclinare al inelului lipsit de sferă este maxim, cînd nodurile sînt în syzigii. De aici în progresul nodurilor la cvadraturi el tinde să-și micșoreze înclinarea și prin această tendință imprimă o mișcare sferei întregi. Sfera reține mișcarea imprimată, pînă ce inelul printr-o tendință contrară nimicește această mișcare și imprimă o mișcare nouă în sens contrar. Și din această cauză miș-

carea maximă a inclinării descrescătoare are loc în cvadraturile nodurilor, şi unghiul cel mai mic de înclinare în octanţii de după cvadraturi; apoi mişcarea maximă de declinaţie în syzigii şi unghiul maxim în octanţii următori.



Aceeaşi relaţie este şi în cazul sferei lipsite de inel, care în regiunile ecuatorului sau este cu ceva mai înaltă decît lîngă poli, sau constă dintr-o materie cu ceva mai densă. Căci acest exces de materie în regiunile ecuatoriale ţine locul inelului. Şi cu toate că, mărind într-un mod oarecare forţa centripetă a acestei sfere, presupunem că toate părţile ei tind în jos, la fel cu părţile corpurilor grele ale pămîntului, totuşi fenomenele acestui corolar şi ale celui precedent abia se vor schimba; afară doar dacă locurile înălţimilor maxime şi minime ale apei vor fi diverse. Căci apa acum nu mai este susţinută şi nu rămîne în orbita sa prin forţa sa centrifugă, ci prin canalul în care curge. Şi afară de aceea forţa *LM* atrage apa în jos mai mult în cvadraturi, şi forţa *KL* sau *NM—LM* o atrage în sus mai mult în sygizii. Şi aceste forţe împreunate încetează să atragă apa în jos şi încep să o atragă în sus în octanţii dinaintea syzigiilor şi încetează să o atragă în sus şi încep să o atragă în jos în octanţii dinapoia syzigiilor. Şi de aici înălţimea apei poate ajunge maximă în octanţii dinapoia syzigiilor, şi minimă aproximativ în octanţii dinapoia cvadraturilor; dacă nu cumva mişcarea de urcare sau de coborîre imprimată de aceste forţe sau persevereazā prin forţa de inerţie a materiei ceva mai mult, sau este oprită prin piedicele canalului ceva mai devreme.

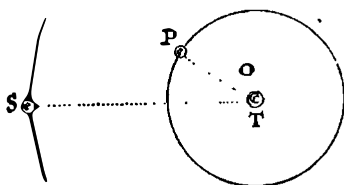
COROLARUL 21. Din aceeaşi cauză, din care materia sferei abundînd lîngă ecuator face ca nodurile să regreseze, şi deci prin creşterea ei se măreşte acest regres iar prin micşorare se micşorează şi prin îndepărtare se nimiceşte; dacă materia mai mult decît abundentă este îndepărtată, adică, dacă sfera lîngă ecuator devine sau mai comprimată sau mai rară decît lîngă poli, se va naşte o mişcare a nodurilor în acelaşi sens.

COROLARUL 22. Şi de aici la rîndul său, din mişcarea nodurilor se cunoaşte constituţia sferei. Anume dacă sfera păstrează în mod constant aceeaşi poli, şi mişcarea este retrogradă, materia abundă lîngă ecuator; dacă este progresivă, este în lipsă. Să presupunem că o sferă uniformă şi perfect rotunjită în spaţii libere mai întîi este în repaus apoi este împinsă înainte printr-un impuls oblic asupra suprafeţei sale, şi deci primeşte o mişcare parte circulară, parte rectilinie. Deoarece această sferă se comportă indiferent faţă de toate axele ce trec prin centrul ei, şi nici nu este mai înclinată către vreo axă, sau către o poziţie a axei, decît către vreo alta; este evident, că ea niciodată nu-şi va schimba axa şi înclinarea axei prin

forța proprie. Căci fie împinsă sfera în mod oblic, în aceeași parte a suprafeței, ca mai sus, printr-un impuls oarecare nou; și cum un impuls mai repede sau mai încet nu schimbă efectul, este evident că aceste două impulsuri imprimate succesiv produc aceeași mișcare, ca și cînd ar fi fost imprimate simultan, adică, aceeași ca și cînd sfera ar fi fost împinsă cu o forță simplă compusă (potrivit corolarului II al legilor) din amîndouă, și deci simplă în jurul unei axe de înclinație dată. Și la fel este cazul impulsului al doilea făcut într-un alt loc oarecare în ecuatorul primei mișcări; precum și al primului impuls făcut într-un loc oarecare în ecuatorul mișcării, pe care ar genera-o al doilea impuls fără cel dintîi; și deci al ambelor impulsuri făcute în locuri oarecare: acestea vor naște aceeași mișcare circulară ca și cînd ar fi fost imprimate împreună și o dată în locul de intersecție al ecuatorilor acelor mișcări pe care le-ar naște separat. Prin urmare o sferă omogenă și perfectă nu reține mai multe mișcări deosebite, ci toate cele imprimate le compune și le reduce la una, și întrucît depinde de ea, se învîrte într-una cu o mișcare simplă și uniformă în jurul unei axe unice, dată cu o înclinare totdeauna invariabilă. Dar nici forța centripetă nu poate schimba înclinarea axei sau vitezei de rotație. Dacă ne închipuim sfera tăiată în două emisfere cu un plan oarecare ce trece prin centrul său și centrul spre care este îndreptată forța; acea forță va acționa totdeauna fiecare emisferă în mod egal, și de aceea sfera, în ce privește mișcarea de rotație nu se va înclina în nici o parte. Dacă presupunem că se adună undeva între pol și ecuator o materie nouă acumulată sub forma unui munte, aceasta printr-o tendință perpetuă de îndepărtare de la centrul mișcării sale va perturba mișcarea sferei și va face ca polii ei să rătăcească pe suprafața ei, și să descrie incontinuu cercuri în jurul său și al punctului opus lui. Și nici nu se poate corecta această enormitate de rătăcire decît așezînd acel munte sau într-unul din poli, în care caz (potrivit corolarului 21) nodurile ecuatorului vor înainta; sau în ecuator, în care caz (potrivit corolarului 20) nodurile vor regresa; sau în sfîrșit adunînd din celaltă parte a axei materie nouă, prin care muntele va oscila în mișcarea sa și în acest caz nodurile sau vor progresa, sau vor regresa, după cum muntele și această materie nouă sînt mai aproape de pol sau de ecuator.

PROPOZIȚIA LXVII. TEOREMA XXVII

Admițînd aceleași legi ale atracțiilor, zic că corpul exterior S, descrie în jurul centrului comun de greutate O al celor interioare P, T, cu razele duse la acel centru, arii mai proporționale cu timpurile și o orbită mai apropiată de forma unei elipse avînd focarul în același centru, decît pe care o poate descrie în jurul corpului mai interior și mai mare T, cu razele duse la el.



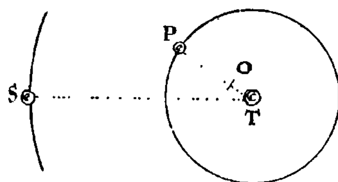
Căci atracțiunile corpului S spre T și P compun atracțiunea lui absolută, care este îndreptată mai mult spre centrul comun de greutate O al corpurilor T

și *P* decît spre corpul maxim *T*, și care este mai aproape de raportul invers al pătratului distanței *SO*, decît al pătratului distanței *ST*: după cum ușor va constata cine aprofundează chestiunea.

PROPOZIȚIA LXVIII. TEOREMA XXVIII

Admițînd aceleași legi ale atracțiilor, zic că corpul exterior S, descrie în jurul centrului comun de greutate O al celor interioare P și T, cu razele duse la acel centru, arii mai proporționale cu timpurile, și o orbită mai apropiată de forma unei elipse avînd focarul în același centru, dacă corpul interior și mai mare este agitat prin aceste atracții ca și celelalte, decît dacă nefiind atras este în repaus, sau fiind atras cu mult mai mult sau cu mult mai puțin sau este agitat cu mult mai mult sau cu mult mai puțin.

Se demonstrează aproape în același fel ca propoziția LXVI dar printr-un raționament mai prolix pe care de aceea îl las la o parte. Fie de ajuns a considera lucrul astfel. Din demonstrația propoziției precedente este evident că centrul, spre care este împins corpul *S* prin forțele împreunate, este foarte apropiat de centrul comun de greutate al celor două. Dacă acest centru ar coincide cu centrul comun, și centrul comun de greutate al celor trei corpuri ar fi în repaus; pe de o parte corpul *S*, și de altă parte centrul comun al celorlalte două ar descrie elipse precise în jurul centrului comun al tuturora ce este în repaus. Este evident aceasta din corolarul 2 al propoziției LVIII combinat cu cele demonstrate în propoziția LXIV și LXV. Această mișcare eliptică se perturbă întrucîtva prin distanța centrului celor două de la centrul spre care este atras al treilea *S*. Afară de aceasta fie dată o mișcare a centrului comun al celor trei, și perturbația va crește. Prin urmare perturbația este minimă, cînd centrul comun al celor trei este în repaus; adică, cînd corpul interior și mai mare *T* este atras prin legea celorlalte: și devine totdeauna mai mare cînd centrul comun al celor trei micșorînd mișcarea corpului *T*, începe să se miște, și apoi este agitat din ce în ce mai mult.



COROLAR. Și de aici, dacă mai multe corpuri mai mici se învîrtesc în jurul unuia mai mare, se poate deduce că orbitele descrise se apropie mai mult de elipse, și descrierile ariilor devin mai egale, dacă toate corpurile se atrag și se agită cu forțe acceleratoare care sînt precum forțele lor absolute și în raport invers cu pătratele distanțelor, și focarul unei orbite oarecare este așezat în centrul comun de greutate al tuturor corpurilor interioare (anume focarul orbitei prime și interioare în centrul de greutate al corpului celui mare și interior; cel al orbitei a doua, în centrul comun de greutate al celor două corpuri interioare; al celei de-a treia, în centrul comun de greutate al celor trei interioare; și așa mai departe) ca și cînd corpul interior ar fi în repaus și s-ar lua ca focar comun al tuturor orbitelor.

PROPOZIŢIA LXIX. TEOREMA XXIX

Într-un sistem de mai multe corpuri A, B, C, D etc., dacă un corp oarecare A atrage pe toate celelalte B, C, D etc. cu forţe acceleratoare care sînt în raport invers cu pătratele distanţelor de la cel atrăgător; şi un alt corp B atrage de asemenea pe celelalte A, C, D etc. cu forţe care sînt în raport invers cu pătratele distanţelor de la cel atrăgător: forţele absolute ale corpurilor atrăgătoare A, B, vor fi între ele precum sînt înseşi corpurile A, B cărora aparţin forţele.

Căci atracţiunile acceleratoare ale tuturor corpurilor *B*, *C*, *D* spre *A* la distanţe egale, sînt prin ipoteză egale între ele; şi la fel atracţiunile acceleratoare ale tuturor corpurilor spre *B*, la distanţe egale, sînt egale între ele. Dar forţa atractivă absolută a corpului *A* este către forţa atractivă absolută a corpului *B*, precum atracţiunea acceleratoare a tuturor corpurilor spre *A* către atracţiunea acceleratoare a tuturor corpurilor spre *B*, la distanţe egale; şi aşa este atracţiunea acceleratoare a corpului *B* spre *A*, către atracţiunea acceleratoare a corpului *A* spre *B*. Dar atracţiunea acceleratoare a corpului *B* spre *A* este către atracţiunea acceleratoare a corpului *B*, precum masa corpului *A* către masa corpului *B*; fiindcă forţele motoare, care (potrivit definiţiei a doua, a şaptea şi a opta) sînt ca forţele acceleratoare şi corpurile atrase împreună sînt aici (potrivit legii III a mişcării) egale între ele. Aşadar forţa absolută atractivă a corpului *A* este către forţa absolută atractivă a corpului *B*, precum masa corpului *A* către masa corpului *B*. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă diversele corpuri ale unui sistem *A*, *B*, *C*, *D* etc. considerate separat atrag pe toate celelalte cu forţe acceleratoare care sînt în raport invers cu pătratele distanţelor de la cel atrăgător; forţele absolute ale tuturor acelor corpuri vor fi între ele precum sînt înseşi corpurile.

COROLARUL 2. Prin acelaşi raţionament, dacă diversele corpuri ale unui sistem *A*, *B*, *C*, *D* etc. considerate separat atrag pe toate celelalte cu forţe acceleratoare, care sînt sau invers sau direct în raportul unei puteri oarecare a distanţelor de la cel atrăgător, şi care se definesc după o lege oarecare comună din distanţele de la unul oarecare atrăgător; este evident că forţele absolute ale acelor corpuri sînt precum corpurile.

COROLARUL 3. Într-un sistem de corpuri, a căror forţe descresc cu pătratul distanţelor, dacă cele mai mici se rotesc în jurul celui mai mare pe elipse cît se poate de precise, avînd focarul comun în centrul celui mai mare; şi cu razele duse la corpul cel mare vor descrie arii cît mai proporţionale cu timpurile: forţele absolute ale acelor corpuri vor fi între ele, sau precis sau aproximativ în raportul corpurilor; şi invers. Aceasta este evident din corolarul propoziţiei LXVIII combinat cu corolarul 1 al acesteia.

SCOLIE

Prin aceste propoziţii sîntem conduşi la analogia dintre forţele centripete şi corpurile centrale spre care de obicei se îndreaptă acele forţe. Căci este conform cu raţiunea, că forţele, care sînt îndreptate spre corpuri, să depindă de natura şi cantitatea lor, ca în fenomenele magnetice. Şi de cîte

ori avem cazuri de acest fel, vor trebui apreciate atracţiunile corpurilor, atribuind diverselor particule ale acestora forţe proprii, şi luînd sumele forţelor. Cuvîntul de atracţie îl folosesc aici în general pentru o tendinţă oarecare a corpurilor de a se apropia unul de celălalt: fie că această tendinţă are loc sub acţiunea corpurilor, sau tinzînd unul spre altul, sau prin spiritele emise agitîndu-se reciproc, fie că se naşte din acţiunea eterului sau a aerului sau a unui mediu oarecare corporal sau necorporal împingînd corpurile ce înoată în el într-un mod oarecare unul spre altul. În acelaşi sens general folosesc cuvîntul de impuls, definind în acest tratat nu speciile forţelor şi calităţile fizice, ci cantităţi şi proporţii matematice după cum am explicat în definiţii. În matematici trebuie corectate cantităţile forţelor şi rapoartele care urmează din condiţii oarecare presupuse: apoi, cînd pătrundem în fizică, aceste rapoarte trebuie comparate cu fenomenele; ca să cunoaştem care condiţii ale forţelor răspund la diversele genuri ale corpurilor atractive. Şi atunci în sfîrşit se va putea discuta mai sigur asupra speciilor cauzelor şi rapoartelor fizice ale forţelor. Să vedem deci cu ce forţe trebuie să se acţioneze reciproc corpurile sferice, constînd din particule atractive în felul expus mai sus, şi ce mişcări rezultă de aici.

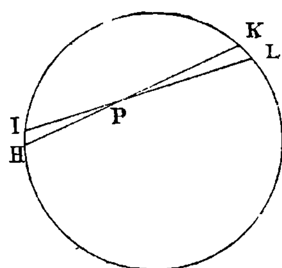
SECȚIUNEA XII

Despre forțele atractive ale corpurilor sferice

PROPOZIȚIA LXX. TEOREMA XXX

Dacă spre diversele puncte ale unei suprafețe sferice tind forțe centripete egale descrescînd în raportul pătratului distanțelor de la puncte: zic că un corpuscul situat în interiorul suprafeții nu este atras de aceste forțe în nici o parte.

Fie *HIKL* acea suprafață sferică și *P* un corpuscul situat în interior. Prin *P* să ducem la această suprafață două linii *HK*, *IL*, interceptînd arcele cît se poate de mici *HI*, *KL*; și, deoarece triunghiurile *HPI*, *LPK* (potrivit corolarului 3, lema VII) sînt asemenea, arcele vor fi proporționale cu distanțele *HP*, *LP*; și particulele oarecare din *HI* și *KL* ale suprafeței sferice determinate prin drepte trecînd din toate părțile prin punctul *P*, vor fi în raportul pătratului distanțelor. Prin urmare forțele acestor particule exercitate asupra corpului *P* sînt egale între ele. Căci sînt precum particulele, și în raport invers cu pătratele distanțelor. Și aceste două rapoarte compun un raport de egalitate. Deci atracțiunile, efectuate în mod egal în sensuri opuse se distrug reciproc. Și printr-un raționament analog, toate atracțiunile pe întreaga suprafață sferică se distrug prin atracțiunile contrare. Prin urmare corpul *P* nu este împins în nici o parte prin aceste atracțiuni. Q.E.D.

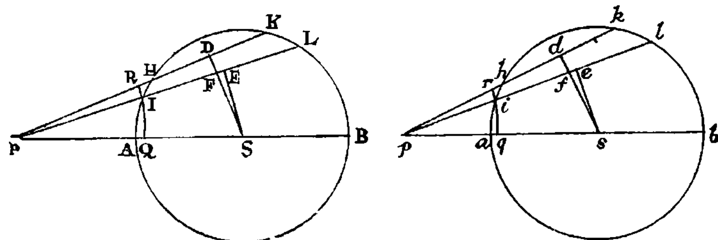


PROPOZIȚIA LXXI. TEOREMA XXXI

În aceleași condițiuni zic că un corpuscul situat în afara suprafeței sferice este atras spre centrul sferei, cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței sale de la acel centru.

Fie *AHKB*, *ahkb*, două suprafețe sferice egale, descrise cu centrele *S*, *s* cu diametrele *AB*, *ab*, și *P*, *p* corpuscule situate în afară pe prelungirea diametrelor. Să ducem de la corpuscule liniile *PHK*, *PIL*, *phk*, *pil*, tăind din cercurile mari *AHB*, *ahb*, arcele egale *HK*, *hk* și *IL*, *il*. Și să coborîm pe ele perpendicularele *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; dintre care *SD*, *sd* să taie *PL*, *pl* în *F* și *f*. Să coborîm de asemenea pe diametre perpendicularele *IQ*, *iq*. Să presupunem că unghiurile *DPE*, *dpe* dispar și din cauză că sînt egale, *DS* și *ds*, *ES* și *es*, liniile *PE*, *PF* și *pe*, *pf* și linioarele *DF*, *df* se pot considera ca egale; fiindcă ultimul raport al acestora, unghiurile *DPE*, *dpe* dispărînd simultan, este un raport de egalitate. Acestea fiind astfel stabilite, *PI*, va fi către *PF* precum *RI* către *DF*, și *pf* către *pi* precum *df* sau *DF* către *ri*; și prin egalitate $PI \times pf$ către $PF \times pi$ precum *RI* către *ri*, adică (potrivit corolarului 3, lema VII) precum arcul *IH* către arcul *ih*. Iară *PI* către *PS* precum *IQ* către *SE*, și *ps* către *pi* precum *se* sau *SE* către *iq*; și prin egalitate $PI \times ps$

către $PS \times pi$ precum IQ către iq. Şi împreunînd rapoartele $PI^2 \times pf \times ps$ către $pi^2 \times PF \times PS$, precum $IH \times IQ$ către $ih \times iq$; adică, precum suprafaţa circulară, pe care o va descrie arcul IH cînd semicercul AKB se roteşte în jurul diametrului AKB, către suprafaţa circulară, pe care o va descrie ih în învîrtirea semicercului akb în jurul diametrului ab. Şi forţele, cu care



aceste suprafeţe atrag corpusculele P şi p după linii ce tind spre ele sînt (prin ipoteză) precum suprafeţele şi în raport invers cu pătratele distanţelor suprafeţelor de la corpuri, adică, precum $pf \times ps$ către $PF \times PS$. Şi aceste forţe iarăşi sînt către părţile lor oblice care (făcîndu-se rezoluţia forţelor potrivit corolarului II al legilor) tind spre centre după liniile PS, ps, precum PI către PQ, şi pi către pq; adică (din cauza asemănării triunghiurilor PIQ şi PSF, piq şi psf) precum PS către PF şi ps către pf. De unde prin egalitate, atracţiunea corpusculului P spre S este către atracţiunea corpusculului p spre s, precum $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ către $\frac{pf \times PF \times PS}{sp}$, adică precum ps^2 către PS^2. Şi printr-un raţionament analog, forţele cu care suprafeţele descrise prin rotaţia arcelor KL, kl atrag corpusculele, vor fi precum ps^2 către PS^2 şi în acelaşi raport vor fi forţele tuturor suprafeţelor circulare în care se poate împărţi fiecare suprafaţă sferică, luînd totdeauna sd egal cu SD şi se egal cu SE. Şi, prin compunere, forţele tuturor suprafeţelor sferice, exercitate asupra corpusculelor vor fi în acelaşi raport. Q.E.D.

PROPOZIŢIA LXXII. TEOREMA XXXII

Dacă spre diversele puncte ale unei sfere oarecare tind forţe centripete egale descrescînd cu pătratul distanţelor de la puncte; şi se dă atît densitatea sferei cît şi raportul diametrului sferei către distanţa corpusculului de la centrul ei: zic că forţa cu care este atras corpusculul, va fi proporţională cu semidiametrul sferei.

Căci să ne închipuim două corpuscule atrase separat de două sfere, unul de una şi celălalt de cealaltă, şi că distanţele lor sînt respectiv proporţionale cu diametrele sferelor, iar sferele se descompun în particule asemenea şi situate asemenea faţă de corpuscule. Şi atracţiile unui corpuscul, efectuate spre diversele particule ale unei sfere, vor fi către atracţiile celuilalt spre tot atîtea particule analoge ale celeilalte sfere, într-un raport compus din raportul direct al particulelor şi raportul invers al pătratului distanţelor. Dar particulele sînt precum sferele, adică, în raportul cubului diametrelor, şi distan-

țele sînt precum diametrele; și primul raport direct împreună cu ultimul raport luat de două ori invers este raportul diametrului către diametru. Q.E.D.

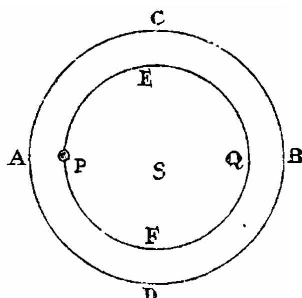
COROLARUL 1. De aici dacă corpusculele se învîrtesc pe cercuri, în jurul unor sfere constînd dintr-o materie uniform atractivă; și distanțele de la centrele sferelor sînt proporționale cu diametrele lor: timpurile periodice vor fi egale.

COROLARUL 2. Și viceversa, dacă timpurile periodice sînt egale; distanțele vor fi proporționale cu diametrele. Acestea două provin din corolarul 3, propoziția IV.

COROLARUL 3. Dacă spre diversele puncte a două solide oarecare, asemenea și la fel de dense, tind forțe centripete egale, descrescînd cu pătratul distanțelor de la puncte; forțele, cu care corpusculele situate în mod simetric față de cele două solide vor fi atrase de ele, vor fi între ele ca diametrele solidelor.

PROPOZIȚIA LXXIII. TEOREMA XXXIII

Dacă spre diversele puncte ale unei sfere oarecare date tind forțe centripete egale descrescînd în raportul pătratului distanțelor de la puncte: zic că un corpuscul situat în interiorul sferei este atras cu o forță proporțională cu distanța sa de la centrul ei.



În sfera *ABCD*, descrisă cu centrul *S*, să plasăm corpusculul *P*; și din același centru *S*, cu intervalul *AP*, să ne închipuim descrisă sfera interioară *PEQF*. Este evident (din propoziția LXX) că suprafețele sferice concentrice, din care se compune diferența *AEBF* a sferelor, atracțiunile lor fiind distruse de atracțiunile contrare, nu acționează de loc asupra corpului *P*. Rămîne numai atracțiunea sferei interioare *PEQF*. Și (din propoziția LXXII) aceasta este precum distanța *PS*. Q.E.D.

SCOLIE

Suprafețele din care se compun solidele, aici nu sînt pur matematice, ci orbite atît de subțiri, încît grosimea lor este aproape nulă; anume orbitele disparente, din care constă în definitiv sfera cînd numărul orbitelor crește și grosimea scade la infinit. La fel prin punctele, din care zicem că se compun liniile, suprafețele și solidele, trebuie să înțelegem particule egale de mărime neglijabilă.

PROPOZIȚIA LXXIV. TEOREMA XXXIV

Aceleași fiind admise, zic că un corpuscul situat în afara sferei este atras cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței sale de la centrul ei.

Căci să împărțim sfera în nenumărate suprafațe sferice concentrice, și atracțiunile corpusculului născute din diversele suprafețe vor fi invers pro-

porţionale cu pătratul distanţei corpusculului de la centru (din propoziţia LXXI). Şi prin compunere, suma atracţiunilor, adică atracţiunea corpusculului spre sfera întreagă, va fi în acelaşi raport. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici la distanţe egale de la centrele sferelor omogene atracţiile sînt precum sferele. Căci (potrivit propoziţiei LXXII) dacă distanţele sînt proporţionale cu diametrele sferelor, forţele vor fi ca diametrele. Să se micşoreze distanţa mai mare în acel raport; şi, făcînd acum distanţele egale, atracţiunea se va mări ca pătratul acelui raport; şi deci va fi către cealaltă atracţie precum cubul acelui raport adică în raportul sferelor.

COROLARUL 2. La distanţe oarecare atracţiunile sînt precum sferele aplicate la pătratele distanţelor.

COROLARUL 3. Dacă un corpuscul, situat în afara unei sfere omogene, este atras cu o forţă invers proporţională cu pătratul distanţei sale de la centrul ei, iar sfera constă din particule atrăgătoare; forţa unei particule oarecare va descreşte în raportul pătratului distanţei de la particulă.

PROPOZIŢIA LXXV. TEOREMA XXXV

Dacă spre diversele puncte ale unei sfere date tind forţe centripete egale, descrescînd în raportul pătratului distanţelor de la puncte, zic că o altă sferă oarecare asemenea este atrasă de ea cu o forţă invers proporţională cu pătratul distanţei centrelor.

Căci atracţia unei particule oarecare este în raport invers cu pătratul distanţei sale de la centrul sferei atrăgătoare, (potrivit propoziţiei LXXIV) şi de aceea este aceeaşi ca şi cînd întreaga forţă atractivă ar emana dintr-un singur corpuscul situat în centrul acestei sfere. Dar această atracţie este atît de mare, cît ar fi la rîndul său atracţia aceluiaşi corpuscul dacă el ar fi atras de diversele particule ale sferei atrase, cu aceeaşi forţă cu care le atrage. Dar acea atracţie a corpusculului (potrivit propoziţiei LXXIV) ar fi invers proporţională cu pătratul distanţei sale de la centrul sferei; şi deci atracţia egală cu ea a sferei este în acelaşi raport. Q.E.D.

COROLARUL 1. Atracţiile sferelor, spre alte sfere omogene, sînt ca sferele atrăgătoare aplicate la pătratele distanţelor centrelor lor de la centrele acelora, pe care le atrag.

COROLARUL 2. Acelaşi lucru este valabil, cînd sfera atrasă de asemenea atrage. Căci diversele puncte ale acesteia atrag diversele puncte ale celeilalte cu aceeaşi forţă, cu care la rîndul său sînt atrase de acestea; şi deci cum în fiecare atracţie este acţionat (potrivit legii III) atît punctul atrăgător, cît şi punctul atras, se va dubla forţa atracţiei mutuale, păstrînd proporţiile.

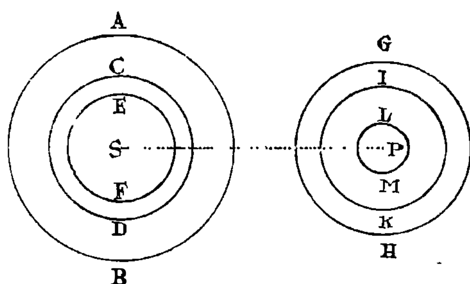
COROLARUL 3. Toate cele ce au fost demonstrate mai sus asupra mişcării corpurilor în jurul focarului secţiunilor conice, au loc cînd o sferă atrăgătoare se plasează în focar şi corpurile se mişcă în afara sferei.

COROLARUL 4. Acelea însă, care se demonstrează despre mişcarea corpurilor în jurul centrului secţiunilor conice, au loc cînd mişcările se întîmplă în interiorul sferei.

PROPOZIŢIA LXXVI. TEOREMA XXXVI

Dacă sferele sînt într-un fel oarecare neasemenea (în ceea ce priveşte densitatea materiei şi forţa atractivă) înaintînd de la centru spre circumferinţă, iar la orice distanţă dată de la centru sînt în toate direcţiile asemenea; şi forţa atractivă a unui punct oarecare descreşte cu pătratul distanţei corpului atras: zic că forţa întreagă cu care o sferă de acest fel atrage pe alta, este invers proporţională cu pătratul distanţei centrelor.

Fie *AB*, *CD*, *EF* etc. oricîte sfere concentrice asemenea, dintre care cele interioare adaose la cele exterioare compun o materie mai densă spre centru, sau scăzute lasă una mai rară şi acestea (potrivit propoziţiei LXXV), atrag oricîte alte sfere concentrice asemenea *GH*, *IK*, *LM* etc. fiecare pe fiecare, cu forţe invers proporţionale cu pătratul distanţei *SP*. Şi compunînd sau separînd, suma tuturor acelor forţe, sau excesul unora asupra altora; adică forţa, cu care sfera întreagă *AB*, compusă din sfere concentrice oarecare sau din diferenţele celor concentrice, atrage întreaga sferă *GH* compusă din oarecare sfere concentrice sau din diferenţele celor concentrice; va fi în acelaşi raport. Să mărim numărul sferelor concentrice la infinit astfel, ca densitatea materiei împreună cu forţa atractivă, înaintînd de la circumferinţă spre centru, să crească sau să descrească după o lege oarecare; şi, adunînd o materie neatractivă, să se întregească în orice loc densitatea deficientă, astfel ca sferele să ia o formă oarecare dorită; şi forţa, cu care una din ele atrage pe cealaltă, şi acum va fi, prin raţionamentul de mai sus, în acelaşi raport invers al pătratului distanţei. Q.E.D.



COROLARUL 1. De aici, dacă mai multe sfere de acelaşi fel, întru toate asemenea între ele, se atrag reciproc, atracţiunile acceleratoare ale fiecăreia asupra fiecăreia, vor fi la distanţe oarecare egale ale centrelor, precum sferele atrăgătoare.

COROLARUL 2. Şi la distanţe oarecare neegale, precum sferele atrăgătoare aplicate la pătratele distanţelor dintre centre.

COROLARUL 3. Dar atracţiile motoare, sau greutăţile sferelor în sfere, vor fi, la distanţe egale ale centrelor, ca sferele atrăgătoare şi atrase împreună, adică precum cele cuprinse de sfere obţinute prin înmulţire.

COROLARUL 4. Şi la distanţe neegale, în acelaşi raport ca cele cuprinse şi în raport invers cu pătratele distanţelor dintre centre.

COROLARUL 5. Aceleaşi sînt valabile, cînd atracţia se naşte din virtutea atractivă a oricăreia dintre cele două sfere exercitată reciproc asupra celeilalte sfere. Căci prin ambele forţe atracţia se dublează, păstrînd proporţia.

COROLARUL 6. Dacă oarecare sfere de acest fel se rotesc în jurul altora care sînt în repaus, fiecare în jurul fiecăreia; şi distanţele dintre centrele celor

ce se învîrtesc şi ale celor în repaus sînt proporţionale cu diametrele celor ce sînt în repaus; timpurile periodice vor fi egale.

COROLARUL 7. Şi iarăşi, dacă timpurile periodice sînt egale, distanţele vor fi proporţionale cu diametrele.

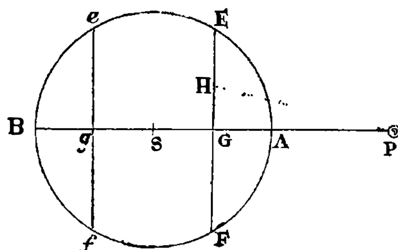
COROLARUL 8. Toate acelea, ce au fost demonstrate mai sus asupra mişcării corpurilor în jurul focarelor secţiunilor conice, sînt valabile: cînd sfera atrăgătoare, de o forţă şi condiţie oarecare deja descrisă, este situată în focar.

COROLARUL 9. De asemenea şi cînd cele rotitoare sînt şi sfere rotitoare de o condiţie oarecare deja descrisă.

PROPOZIŢIA LXXVII. TEOREMA XXXVII

Dacă spre diversele puncte ale sferelor tind forţe centripete proporţionale cu distanţele punctelor de la corpurile atrase: zic că forţa compusă, cu care două sfere se atrag reciproc este precum distanţa dintre centrele sferelor.

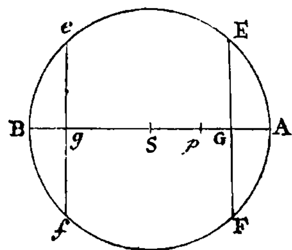
CAZUL 1. Fie *AEBF* o sferă, *S* centrul ei, *P* un corpuscul atras, *PASB* axa sferei trecînd prin centrul corpusculului; *EF*, *ef* două plane, cu care se taie sfera, perpendiculare pe axă şi la distanţe egale de centrul sferei; *G*, *g* intersecţiile planelor şi ale axei; şi *H* un punct oarecare în planul *EF*. Forţa centripetă a punctului *H* asupra corpusculului *P*, exercitată după linia *PH*, este precum distanţa *PH*; şi (potrivit corolarului II al legilor) după linia *PG*, sau spre centrul *S*, precum lungimea *PG*. Prin urmare forţa tuturor punctelor în planul *EF*, adică a întregului plan, cu care corpusculul *P* este atras spre centrul *S*, este precum distanţa *PG* înmulţită cu numărul punctelor, adică, precum solidul cuprins de planul *EF* şi distanţa *PG*. Şi la fel forţa planului *ef*, cu care corpusculul *P* este atras spre centrul *S*, este precum planul înmulţit cu distanţa sa *Pg*, sau precum planul *EF* egal cu *ef* înmulţit cu distanţa *Pg*, şi suma forţelor ambelor plane către planul *EF* înmulţit cu suma distanţelor $PG + Pg$, adică, precum planul înmulţit cu dublul distanţei *PS* dintre centru şi corpuscul, adică precum planul dublu *EF* înmulţit cu distanţa *PS*, sau precum suma planelor egale $EF + ef$ înmulţit cu aceeaşi distanţă. Şi printr-un raţionament analog, forţele tuturor planelor asupra sferei întregi la distanţă egală de ambele părţi de la centrul sferei, sînt ca suma planelor înmulţită cu distanţa *PS*, adică, precum sfera întreagă şi distanţa *PS* împreună. Q.E.D.



CAZUL 2. Să atragă acum corpusculul *P* sfera *AEBF*. Şi prin acelaşi raţionament se demonstrează că forţa, cu care este atrasă acea sferă va fi precum distanţa *PS*. Q.E.D.

CAZUL 3. Căci să presupunem că o altă sferă se compune din corpuscule nenumărate *P*; şi fiindcă forţa, cu care este atras un corpuscul oarecare, este precum distanţa corpusculului de la centrul primei sfere şi acea sferă

luate împreună, și deci este aceeași, ca și cînd toată ar proveni dintr-un corpuscul unic din centrul sferei; forța întreagă, cu care se atrag toate corpusculele în sfera a doua, adică, cu care este atrasă întreaga sferă, va fi aceeași, ca și cînd sfera aceea ar fi atrasă cu o forță ieșind dintr-un corpuscul unic din centrul primei sfere, și de aceea este proporțională cu distanța dintre centrele sferelor. Q.E.D.



CAZUL 4. Să presupunem că sferele se atrag reciproc, și forța dublată va păstra proporția de mai înainte. Q.E.D.

CAZUL 5. Să plasăm corpusculul *p* în interiorul sferei *AEBF*; și fiindcă forța planului *ef* asupra corpusculului este precum solidul cuprins de acel plan și distanța *pg*; și forța contrară planului *EF* precum solidul cuprins de acel plan și distanța *pG*; forța compusă din amîndouă va fi precum diferența solidelor, adică precum suma planelor egale înmulțită cu jumătatea diferenței distanțelor, adică, precum suma înmulțită cu distanța *pS* a corpusculului de la centrul sferei. Și printr-un raționament analog, atracția tuturor planelor *EF*, *ef* asupra sferei întregi, adică, atracția sferei întregi, este împreună precum suma tuturor planelor, sau sfera întreagă, și distanța *pS* a corpusculului de la centrul sferei. Q.E.D.

CAZUL 6. Și dacă din corpuscule nenumărate *p* se compune o sferă nouă, situată în interiorul primei sfere *AEBF*; se probează ca mai sus că atracția fie simplă a unei sfere asupra alteia, fie mutuală a fiecăreia asupra alteia, va fi precum distanța centrelor *pS*. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXXVIII. TEOREMA XXXVIII

Dacă sfere înaintînd de la centru spre circumferință sînt într-un mod oarecare neasemenea și neegale dar în circuit la orice distanță dată de la centru sînt din orice parte asemenea și forța atractivă a fiecărui punct este precum distanța corpului atras: zic că forța întreagă cu care două sfere de acest fel se atrag mutual este proporțională cu distanța dintre centrele sferelor.

Se demonstrează din propoziția precedentă în același fel, în care s-a demonstrat propoziția LXXVI din propoziția LXXV.

COROLAR. Cele ce s-au demonstrat mai sus în propozițiile X și LXIV despre mișcarea corpurilor în jurul centrelor secțiunilor conice, sînt valabile cînd toate atracțiile se fac cu o forță a corpurilor sferice de condiția deja descrisă și corpurile atrase sînt sfere de aceeași condiție.

SCOLIE

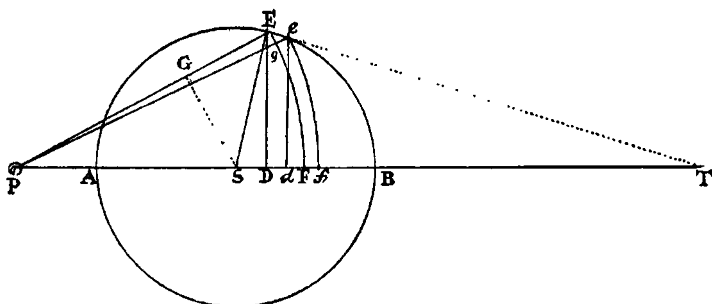
Am expus acum două cazuri mai importante de atracții; anume cînd forțele centripete descresc în raportul pătratului distanțelor sau cresc în raportul simplu al distanțelor; făcînd în ambele cazuri ca corpurile să se

rotească pe secţiuni conice şi compunînd forţele centripete ale corpurilor sferice după aceeaşi lege, în îndepărtarea de la centru, descrescînd sau crescînd cu ele: ceea ce este demn de notat. Ar fi lung să parcurg în mod izolat celelalte cazuri, care prezintă concluzii mai puţin elegante. Prefer să le cuprind şi să le determin pe toate împreună cu o metodă generală după cum urmează.

LEMA XXIX

Dacă din centrul S se descrie un cerc oarecare AEB, şi din centrul P două cercuri EF, ef, tăind pe cel dintîi în E, e, şi linia PS în F, f; şi pe PS se coboară perpendicularele ED, ed: zic că, dacă presupunem că distanţa arcelor EF, ef descreşte la infinit raportul ultim al liniei disparente Dd către linia disparentă este acelaşi ca al liniei PE către linia PS.

Căci dacă linia *Pe* taie arcul *EF* în *q*; şi dreapta *Ee*, care coincide cu arcul disparent *Ee*, prelungită întîlneşte dreapta *PS* în *T*; şi din *S* se coboară pe *PE* normala *SG*: din cauza asemănării triunghiurilor *DTE*, *dTe*, *DES*; va fi *Dd* către *Ee*, precum *DT* către *TE*, sau *DE* către *ES*; şi din asemă-



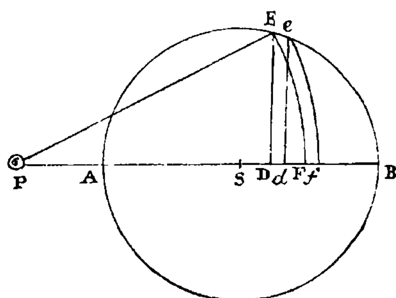
narea triunghiurilor *Eeq*, *ESG* (potrivit lemei VIII şi corolarului 3, lema VII), va fi *Ee* către *eq* sau *Ff* precum *ES* către *SG*; şi prin egalitate, *Dd* către *Ff* precum *DE* către *SG*; adică (din asemănarea triunghiurilor *PDE*, *PGS*) precum *PE* către *PS*. Q.E.D.

PROPOZIŢIA LXXIX. TEOREMA XXXIX

Dacă o suprafaţă EFfe aproape disparentă din cauza lăţimii micşorate la infinit, prin rotirea ei în jurul axei PS, descrie un solid sferic concavo-convex spre ale cărei particule diverse tind forţe centripete egale: zic că forţa, cu care solidul atrage un corpuscul situat în P, este într-un raport compus din raportul solidului $DEq \times Ff$, *şi raportul forţei cu care particula dată în locul Ff ar atrage acelaşi corpuscul.*

Căci dacă mai întîi considerăm forţa suprafeţei sferice *FE*, ce se naşte prin rotaţia arcului *FE*, şi este tăiată undeva în *r* de linia *de*; partea inelară

a suprafeței născută de rotația arcului rE, va fi ca linioara Dd, menținînd raza sferei PE (după cum a demonstrat Arhimede în cartea *De Sphaera et Cylindro*). Şi forța acesteia, exercitată după liniile PE sau Pr situate în toate părțile pe suprafața conică, precum partea inelară a suprafeței; adică, precum linioara Dd, sau, ceea ce este același lucru, ca dreptunghiul format de raza dată PE a sferei și linioara Dd: dar de-a-lungul liniei PS tinzînd spre centrul S este mai mică în raportul PD către PE și deci precum $PD \times Dd$. Să presupunem acum linia DF împărțită în nenumărate particule egale, care fiecare să se numească Dd; și să împărțim suprafața FE în tot atîtea inele egale, ale căror forțe vor fi ca suma tuturora $PD \times Dd$

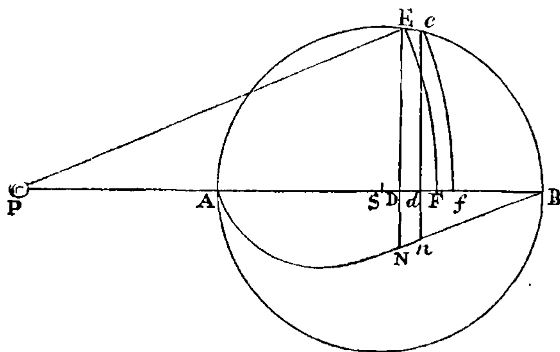


adică precum $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$, și deci precum DE^2. Să înmulțim acum suprafața FE cu înălțimea Ff; și fie forța solidului $EFfe$ exercitată asupra corpusculului P precum $DE^2 \times Ff$: anume dacă se dă forța pe care o particulă oarecare dată Ff o exercită la distanța PF asupra corpusculului P. Dar dacă forța nu este dată, forța solidului $EFfe$ va fi precum solidul $DE^2 \times Ff$ și forța nedată luate împreună. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXXX. TEOREMA XL

Dacă la diversele particule egale ale unei sfere ABE descrisă din centrul S, tind forțe centripete egale, și pe axa AB a sferei, în care se află un corpuscul oarecare P, se ridică din diversele puncte D perpendiculare DE întîlnind sfera în E, și pe ele se iau lungimi DN, care sînt precum cantitatea $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ și forța, pe care o particulă a sferei situată pe axă la distanța PE o exercită asupra corpusculului P luate împreună: zic că forța întreagă, cu care este atras corpusculul spre sferă, este precum aria ANB cuprinsă sub axa sferei AB, și linia curbă ANB, pe care se află incontinuu punctul N.

Căci menținînd construcțiile din lema și teorema ultimă, să ne închipuim axa AB a sferei împărțită în nenumărate particule egale Dd, și sfera întreagă împărțită în tot atîtea straturi sferice concavo-convexe $EFfe$ și să



ridicăm perpendiculara *dn*. Potrivit teoremei de mai sus forţa cu care stratul *EFfe* atrage corpusculul *P*, este precum $DE^2 \times Ff$ şi forţa unei particule exercitată la distanţa *PE* sau *PF* luate împreună. Dar (potrivit lemei din urmă) *Dd* este către *Ff* precum *PE* către *PS*, şi de aici *Ff* este egal cu $\frac{PS \times Dd}{PE}$ şi $DE^2 \times Ff$ egală cu *Dd* înmulţit cu $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ şi de aceea forţa stratului *EFfe* este precum *Dd* înmulţit cu $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ şi forţa particulei exercitată la distanţa *PF* luate împreună, adică (prin ipoteză), precum $DN \times Dd$, sau ca aria disparentă *DNnd*. Aşadar forţele tuturor straturilor exercitate asupra corpului *P*, sînt precum toate ariile *DNnd*, adică, forţa întreagă a sferei ca aria întreagă *ANB*. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici, dacă forţa centripetă, tinzînd spre diversele particule, rămîne totdeauna aceeaşi la toate distanţele, şi *DN* se ia precum $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$; forţa întreagă cu care corpusculul *P* este atras de sferă va fi ca aria *ANB*.

COROLARUL 2. Dacă forţa centripetă a particulelor este în raport invers cu distanţa corpusculului atras de ea, şi *DN* este precum $\frac{DN^2 \times PS}{PE^2}$; forţa cu care corpusculul este atras de sfera întreagă va fi precum aria *ANB*.

COROLARUL 3. Dacă forţa centripetă a particulelor este în raport invers proporţional cu cubul distanţei corpusculului atras de ea, şi *DN* se ia precum $\frac{DE^2 \times PS}{PE^4}$; forţa cu care corpusculul este atras de sfera întreagă, va fi precum aria *ANB*.

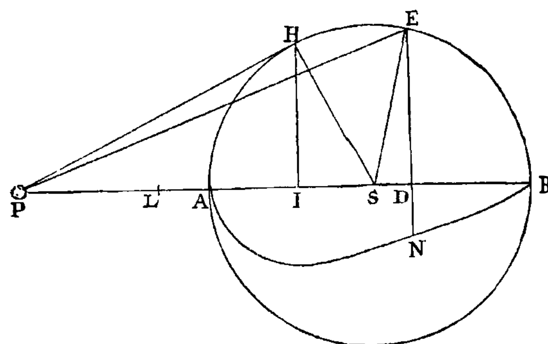
COROLARUL 4. Şi în general dacă presupunem că forţa centripetă tinzînd spre diversele particule ale sferei este în raport invers cu cantitatea *V*, dar se ia *DN* precum $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$; forţa cu care corpusculul este atras de sfera întreagă va fi precum aria *ANB*.

PROPOZIŢIA LXXXI. TEOREMA XLI

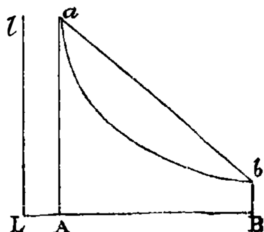
Menţinînd cele deja stabilite să măsurăm aria ANB.

Din punctul *P* să ducem dreapta *PH* atingînd sfera în *H*, şi coborînd pe axa *PAB* normala *HI* să bisectăm *PI* în *L*; şi va fi (potrivit propoziţiei XII, Cartea a II-a a *Elementelor*) PE^2 egal cu $PS^2 + SE^2 + 2PSD$. Dar SE^2 sau SH^2 (din cauza asemănării triunghiurilor *SPH*, *SHI*) este egal cu dreptunghiul *PSI*. Deci PE^2 este egal cu cel cuprins de *PS* şi $PS + SI + 2SD$, adică, de *PS* şi $2LS + 2SD$, adică de *PS* şi $2LD$. Apoi DE^2 este egal cu $SE^2 - SD^2$, sau $SE^2 - LS^2 + 2SLD - LD^2$, adică, $2SLD - LD^2 - ALB$. Căci $LS^2 - SE^2$ sau $LS^2 - SA^2$ (potrivit propoziţiei VI, Cartea a II-a a *Elementelor*) este egal cu dreptunghiul *ALB*. Să scriem deci $2SLD - LD^2 - ALB$ în loc de DE^2; şi cantitatea $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, care conform corolarului al patrulea al propoziţiei precedente este precum

lungimea ordonatei DN, se descompune în trei părţi $\frac{2SLD\times PS}{PE\times V}-\frac{LD^2\times PS}{PE\times V}-\frac{ALB\times PS}{PE\times V}$: unde dacă în loc de V se scrie raportul invers al forţei centripete, şi în loc de PE media proporţională între PS şi $2LD$; cele trei părţi devin ordonatele a tot atîtor linii curbe, ale căror arii se află prin metodele comune. Q.E.F.

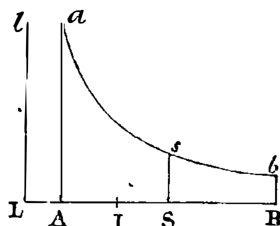


EXEMPLUL 1. Dacă forţa centripetă tinzînd spre diversele particule ale sferei este în raport invers cu distanţa; să scriem în loc de V distanţa PE; apoi $2PS\times LD$ în loc de PE^2, şi va fi DN precum $SL-\frac{1}{2}LD-\frac{ALB}{2LD}$. Să presupunem că DN este egal cu dublul aceleia $2SL-LD-\frac{ALB}{LD}$ şi $2SL$ partea dată a ordonatei dusă în lungimea AB va descrie aria dreptunghiulară $2SL\times AB$; şi partea nedefinită LD dusă normal în aceeaşi lungime prin mişcare continuă, în aşa fel ca trebuind să se mişte crescînd sau descrescînd să fie egală totdeauna cu lungimea LD, să descrie aria $\frac{LB^2-LA^2}{2}$, adică aria $SL\times AB$; care scăzută din aria de mai înainte $2SL\times AB$ rămîne aria $SL\times AB$. Dar partea a treia $\frac{ALB}{LD}$, dusă la fel printr-o mişcare locală normal pe aceeaşi lungime, va descrie o arie hiperbolică; care scăzută din aria $SL\times AB$ va rămîne aria căutată ANB. De unde provine următoarea construcţie a problemei. În punctele L, A, B să ridicăm perpendicularele Ll, Aa, Bb, dintre care Aa să fie egală cu LB şi Bb cu LA. La asimptotele Ll, LB, prin punctele ab să descriem hiperbola ab. Şi coarda dusă ba va închide aria aba egală cu aria căutată ANB.

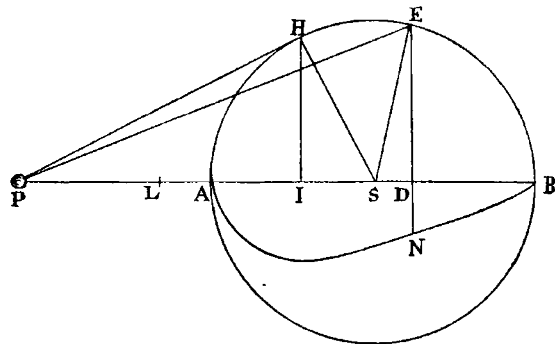


EXEMPLUL 2. Dacă forţa centripetă tinzînd spre diversele particule ale sferei este în raport invers cu cubul distanţei, sau (ceea ce este acelaşi lucru) precum cubul aplicat la un plan oarecare dat; să scriem $\frac{PE^3}{2AS^2}$ în loc de V, apoi $2PS\times LD$ în loc de PE^2; şi va fi DN precum $\frac{SL\times AS^2}{PS\times LD}-\frac{AS^2}{2PS}-\frac{ALB\times AS^2}{2PS\times LD^2}$ adică (deoarece PS, AS, SI sînt continuu proporţionale) precum $\frac{LSI}{LD}-\frac{1}{2}SI-\frac{ALB\times SI}{2LD^2}$. Dacă ducem cele trei părţi ale acesteia în lungimea AB, cea dintîi $\frac{LSI}{LD}$ va naşte o arie hiperbolică; cea de-a doua $\frac{1}{2}SI$ aria $\frac{1}{2}AB\times SI$; a treia $\frac{ALB\times SI}{2LD^2}$

aria $\frac{ALB\times SI}{2LA}-\frac{ALB\times SI}{2LB}$, adică $\frac{1}{2}AB\times SI$. Să se scadă din cea dintîi suma celei de a doua și a treia, și va rămîne aria căutată ANB. De unde rezultă următoarea construcție a problemei. În punctele L, A, S, B să ridicăm perpendicularele Ll, Aa, Ss, Bb, dintre care Ss să fie egal cu SI, și prin punctul s la asimptotele Ll, LB să descriem hiperbola asb întîlnind perpendicularele Aa, Bb în a și b; și scăzînd dreptunghiul $2ASI$ din aria hiperbolică $AasbB$ va rămîne aria căutată ANB.



EXEMPLUL 3. Dacă forța centripetă, tinzînd spre diversele particule ale sferei descrește ca puterea a patra a distanței de la particule; să scriem $\frac{PE^4}{2AS^3}$ în loc de V, apoi $\sqrt{2PS\times LD}$ în loc de PE, și va fi DN precum $\frac{SI^2\times SL^2}{\sqrt{2SI}}\times\frac{1}{\sqrt{LD^3}}-\frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}}\times\frac{1}{\sqrt{LD}}-\frac{SI^2\times ALB}{2\sqrt{2SI}}\times\frac{1}{\sqrt{LD^5}}$ ale cărei trei părți duse în lungimea AB, produc tot atîtea arii anume $\frac{2SI^2\times SL}{\sqrt{2SI}}$ înmulțită cu $\frac{1}{\sqrt{LA}}-\frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$ înmulțit cu $\sqrt{LB}-\sqrt{LA}$; și $\frac{SI^2\times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ înmulțit cu $\frac{1}{\sqrt{LA^3}}-\frac{1}{\sqrt{LB^3}}$. Și acestea după reducerea necesară devin $\frac{2SI^2\times SL}{LI}$, SI^2 și $SI^2+\frac{2SI^3}{3LI}$. Dar acestea scăzînd pe cele din urmă din cea dintîi, devin $\frac{4SI^3}{3LI}$. Prin urmare forța întreagă, cu care este atras corpusculul P spre centru, este precum $\frac{SI^3}{PI}$, adică, în raport invers cu $PS^3\times PI$. Q.E.I.



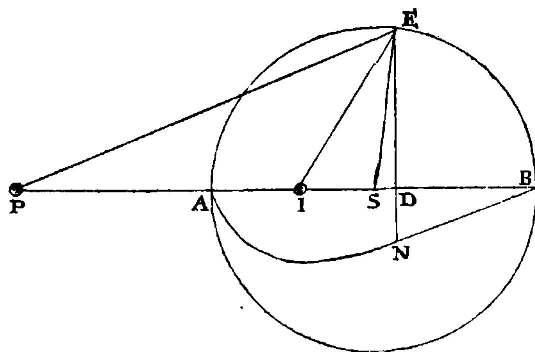
Prin aceeași metodă se poate determina atracția corpusculului situat în interiorul sferei, dar mai repede prin teorema următoare.

PROPOZIȚIA LXXXII. TEOREMA XLI

Într-o sferă descrisă din centrul S cu intervalul SA, dacă luăm SI, SA, SP continuu proporționale: zic că atracția unui corpuscul în interiorul sferei într-un loc oarecare I, este către atracția aceluiași în afara sferei, în locul P, într-un raport compus din rădăcina pătrată a raportului distanțelor de la centrul IS, PS, și rădăcina pătrată a raportului forțelor centripete, tinzînd spre centru în acele locuri P și I.

Astfel dacă forțele centripete ale particulelor sferei sînt în raport invers ca distanțele corpusculului atras de el; forța cu care corpusculul situat în

I este atras de sfera întreagă, va fi către forţa, cu care este atras în P într-un raport compus din rădăcina pătrată a raportului distanţei SI către distanţa SP, şi rădăcina pătrată a raportului forţei centripete în locul I, născută dintr-o particulă oarecare în centru, către forţa centripetă în locul P născută de aceeaşi particulă în centru, adică, în raportul invers al rădăcinii pătrate a distanţelor SI, SP una către alta. Aceste două rădăcini pătrate ale rapoartelor compun un raport de egalitate, şi de aceea atracţiile efectuate în I şi P de sfera întreagă sînt egale. Printr-un calcul analog, dacă forţele particulelor sferei sînt în raport invers cu pătratul distanţelor, se va afla că atracţia în I este către atracţia în P, precum distanţa SP către semidiametrul SA al sferei: Dacă forţele sînt în raport invers cu cubul distanţelor, atracţiile în I şi P vor fi între ele ca SP^2 către SA^2: Dacă sînt cu puterea a patra, precum SP^3 către SA^3. De unde cum s-a aflat că atracţia în P în acest din urmă caz este în raport invers cu $PS^3 \times PI$, atracţiunea în I va fi în raport invers cu $SA^3 \times PI$, adică (SA^3 fiind dat) în raport invers cu PI. Şi la fel este progresia la infinit. Iar teorema se demonstrează astfel.

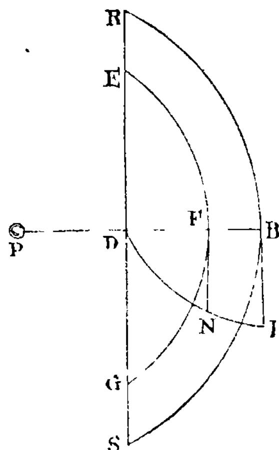


Menţinînd cele construite deja mai înainte, şi aflîndu-se un corpuscul într-un loc oarecare P, ordonata DN s-a aflat a fi precum $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$. Prin urmare dacă ducem IE, ordonata pentru un alt loc oarecare al corpusculului I, schimbînd acelea ce trebuie schimbate, va deveni ca $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times V}$. Să presupunem că forţele centripete, emanînd dintr-un punct oarecare E al sferei, sînt între ele la distanţele IE, PE, precum PE^n către IE^n (unde numărul n însemnează indicele puterilor lui PE şi IE) şi ordonatele vor deveni ca $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times PE^n}$ şi $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times IE^n}$, al căror raport reciproc este ca $PS \times IE \times IE^n$ către $IS \times PE \times PE^n$. Deoarece SI, SE, SP sînt continuu proporţionale, triunghiurile SPE, SEI sînt asemenea, şi deci IE către PE precum IS către SE sau SA; în locul raportului lui IE către PE să scriem raportul IS către SA; şi raportul ordonatelor va deveni $PS \times IE^n$ către $SA \times PE^n$. Dar PS către SA este raportul rădăcinilor pătrate ale distanţelor PS, SI; şi IE^n către PE^n (din cauza că IE este proporţional cu PE precum IS către SA) este raportul rădăcinii pătrate a forţelor la distanţele PS, IS. Aşadar ordonatele, şi de aceea ariile pe care le descriu ordonatele, şi atracţiile proporţionale cu ele sînt într-un raport compus din rădăcina pătrată a acelor rapoarte. Q.E.D.

PROPOZIŢIA LXXXIII. PROBLEMA XLII

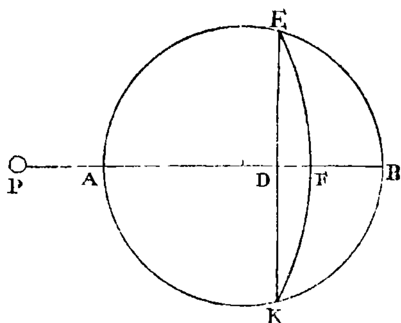
Să aflăm forţa cu care un corpuscul situat în centrul sferei este atras spre un segment oarecare al ei.

Fie *P* un corp în centrul sferei, şi *RBSD* un segment al ei cuprins între planul *RDS* şi suprafaţa sferică *RBS*. Fie *DB* tăiat în *F* de către suprafaţa sferică *EFG* descrisă din centrul *P*, şi să împărţim segmentul în părţile *BREFGS*, *FEDG*. Fie însă acea suprafaţă nu pur matematică, ci fizică, avînd o grosime cît de mică. Să numim acea grosime *O*, şi va fi această suprafaţă (potrivit demonstraţiilor lui Arhimede) precum $PF \times DF \times O$. Să presupunem afară de aceea că forţele atractive ale particulelor sferei sînt în raport invers cu acea putere a distanţelor al cărei indice este *n*; şi forţa cu care suprafaţa *EFG* atrage corpul *P*, va fi (potrivit propoziţiei LXXIX) precum $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$, adică precum $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$. Fie perpendiculara *FN* înmulţită cu *O* perpendiculară pe aceasta; şi aria curbilinie *BDI*, pe care o descrie ordonata *FN* dusă de-a lungul lungimii *DB* printr-o mişcare continuă, va fi precum forţa întreagă cu care segmentul întreg *RBSD* atrage corpul *P*. Q.E.I.



PROPOZIŢIA LXXXIV. PROBLEMA XLIII

Să aflăm forţa, cu care un corpuscul, situat în afara centrului sferei pe axa unui segment oarecare, este atras de acel segment.



Fie atras de către segmentul *EBK* corpul *P* situat pe axa *ADB*. Din centrul *P* cu intervalul *PE* să descriem suprafaţa sferică *EFK*, prin care segmentul se împarte în două părţi *EBKFE* şi *EFKDE*. Să aflăm forţa primei părţi cu ajutorul propoziţiei LXXXI şi forţa părţii din urmă cu ajutorul propoziţiei LXXXIII.; şi suma forţelor va fi forţa segmentului întreg *EBKDE*. Q.E.I.

SCOLIE

După ce am explicat atracţiunile corpurilor sferice, putem trece la legile atracţiilor altor corpuri oarecare constînd la fel din particule atractive; dar a trata acestea în mod particular nu intră în intenţia mea. Va fi deajuns să adaug cîteva propoziţii mai generale despre forţele acestor feluri de corpuri, şi despre mişcările ce nasc de aci, avînd oarecare întrebuinţare în chestiunile filozofice.

SECŢIUNEA XIII

Despre forţele atractive ale corpurilor nesferice

PROPOZIŢIA LXXXV. TEOREMA XLII

Dacă atracţia unui corp atras, este cu mult mai intensă cînd este în contact cu cel atrăgător, decît cînd sînt separate unul de celălalt printr-un interval cît se poate de mic: forţele particulelor celui atrăgător, cînd cel atras se îndepărtează, descresc într-un raport mai mare ca pătratul distanţelor de la particule.

Căci dacă forţele descresc în raportul pătratului distanţelor de la particule, atracţia spre corpul sferic, deoarece (potrivit propoziţiei LXXIV) este în raport invers cu pătratul distanţei corpului atras de la centrul sferei, nu va creşte în mod sensibil prin contact; şi de aceea va creşte şi mai puţin prin contact, dacă atracţia, cînd corpul atras se îndepărtează, descreşte într-un raport mai mic. Prin urmare propoziţia este evidentă în cazul sferelor atractive. Şi la fel este cazul orbitelor sferice concave ce atrag corpuri externe. Şi cu mult mai clar este lucrul în cazul orbitelor care atrag corpuri situate în interior, fiindcă atracţiunile împrăştiate prin cavităţile orbitelor sînt distruse de atracţiile contrare (potrivit propoziţiei LXX), şi deci chiar la întîlnire sînt nule. Căci dacă din aceste sfere şi din orbitele sferice se înlătură oarecare părţi îndepărtate de la locul de contact, şi se adaugă într-un loc oarecare părţi noi: figurile acestor corpuri atractive se pot schimba după voie, iar părţile adunate sau scăzute, fiind îndepărtate de la locul de contact, nu vor mări în mod remarcabil excesul atracţiei ce se naşte din contact. Propoziţia este deci valabilă pentru corpuri de orice figură. Q.E.D.

PROPOZIŢIA LXXXVI. TEOREMA XLIII

Dacă forţele particulelor din care se compune un corp atractiv cu îndepărtarea corpului atras descresc ca cubul sau mai mult decît cubul distanţelor de la particule: atracţia va fi cu mult mai intensă în contact decît dacă corpul atrăgător şi cel atras sînt separate unul de celălalt printr-un interval cît de mic.

Că atracţia în apropierea corpusculului atras de o sferă atrăgătoare de acest fel creşte la infinit, este evident din soluţia problemei XLI arătată în exemplul al doilea şi al treilea. Acelaşi lucru se vede uşor comparînd între ele acele exemple şi teorema XLI despre atracţiile corpurilor spre orbite concavo-convexe, fie că corpurile atrase sînt situate în afara orbitelor, fie în cavităţile lor. Dar şi adăugînd sau înlăturînd din aceste sfere şi din orbite o materie atractivă oarecare oriunde în afară de locul de contact, în aşa fel ca corpurile atractive să ia o figură oarecare dată, propoziţia va fi evidentă despre toate corpurile. Q.E.D

PROPOZIȚIA LXXXVII. TEOREMA XLIV

Dacă două corpuri asemenea între ele, și constînd dintr-o materie la fel de atractivă atrag separat corpuscule proporționale și situate asemenea cu ele; atracțiile acceleratoare ale corpusculelor asupra corpurilor întregi vor fi precum atracțiile acceleratoare ale corpusculelor asupra particulelor proporționale și situate asemenea cu cele întregi.

Căci dacă corpurile se împart în particule, care sînt proporționale cu cele întregi, și situate asemenea cu cele întregi va fi, precum atracția asupra unei particule oarecare a unui corp către atracția asupra particulei corespunzătoare a celuilalt corp, tot așa atracțiile asupra diverselor particule ale primului corp către atracțiile asupra diverselor particule corespunzătoare ale celuilalt; și compunînd, tot așa atracția asupra primului corp întreg către atracția asupra celui de-al doilea corp întreg. Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare dacă forțele atractive ale particulelor, mărind distanțele corpusculelor atrase, descresc în raportul unei puteri oarecare a distanțelor; atracțiile acceleratoare asupra corpurilor întregi vor fi precum corpurile, și în raport invers cu acele puteri ale distanțelor. Astfel dacă forțele particulelor descresc în raportul pătratului distanțelor de la corpurile atrase, corpurile însă sînt precum A^3 și B^3 și deci atît laturile cubice ale corpurilor cît și distanțele corpusculelor atrase de la corpuri, precum A și B: atracțiile acceleratoare asupra corpurilor vor fi precum $\frac{A^3}{A^2}$ și $\frac{B^3}{B^2}$, adică, precum laturile cubice A și B ale corpurilor. Dacă forțele particulelor descresc în raportul cubului distanțelor de la corpusculele atrase; atracțiunile acceleratoare asupra corpurilor întregi vor fi precum $\frac{A^3}{A^3}$ și $\frac{B^3}{B^3}$, adică, egale. Dacă forțele descresc ca puterea a patra; atracțiile asupra corpurilor vor fi ca $\frac{A^3}{A^4}$ și $\frac{B^3}{B^4}$ adică în raport invers cu laturile cubice A și B. Și așa în celelalte cazuri.

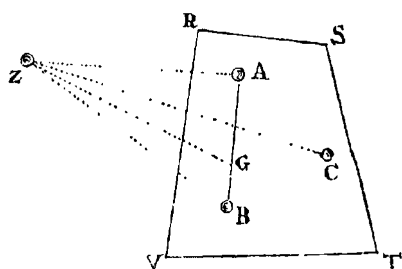
COROLARUL 2. De unde la rîndul său, din forțele cu care corpuri asemenea atrag corpuscule situate asemenea cu ele se poate obține raportul descreșterii forțelor particulelor atractive cînd corpusculul atras se îndepărtează; dacă numai descreșterea este direct sau invers proporțională cu un raport oarecare al distanțelor.

PROPOZIȚIA LXXXVIII. TEOREMA XLV

Dacă forțele atractive ale particulelor egale ale unui corp oarecare sînt ca distanțele locurilor de la particule: forța corpului întreg va tinde spre centrul lui de greutate; și va fi aceeași cu forța unei sfere constînd dintr-o materie asemenea și egală, și avînd centrul în centrul lui de greutate.

Să presupunem că particulele A, B ale corpului $RSTV$ atrag un corpuscul oarecare Z cu forțe, care, dacă particulele sînt egale între ele, sînt precum distanțele AZ, BZ; dacă însă admitem particule neegale, sînt ca aceste

particule și distanțele lor AZ, BZ luate împreună sau (dacă pot vorbi așa) ca aceste particule înmulțite respectiv cu distanțele lor AZ BZ. Și să exprimăm aceste forțe prin cele cuprinse de $A \times AZ$ și $B \times BZ$. Să unim AB, și să o tăiem în G în așa fel ca să fie AG către BG precum particula B către particula A; și G va fi centrul comun de greutate al particulelor A și B. Forța $A \times AZ$ (potrivit corolarului II al legilor) se descompune în forțele $A \times GZ$ și $A \times AG$ și forța $B \times BZ$ în forțele $B \times GZ$ și $B \times BG$. Dar forțele $A \times AG$ și $B \times BG$, din cauza că A este proporțional cu B și BG cu AG, sînt egale; și deci fiindcă sînt îndreptate în părți contrarii, se distrug reciproc. Rămîn forțele $A \times GZ$ și $B \times GZ$. Acestea tind de la Z spre centrul G, și compun forța $(A + B) \times GZ$; adică aceeași forță ca și cînd particulele atractive A și B ar fi situate în centrul lor comun de greutate C, compunînd acolo o sferă.



Prin același raționament, dacă se adună o a treia particulă C, și se compune forța ei cu forța $(A + B) \times GZ$ tinzînd spre centrul G; forța născută de acolo va tinde spre centrul comun de greutate al acelei sfere în G și al particulei C; adică, spre centrul comun de greutate al celor trei particule A, B, C; și va fi aceeași, ca și cînd sfera și particula C ar fi situate în centrul comun, compunînd acolo o sferă mai mare. Și așa se poate continua la infinit. Deci forța întreagă a tuturor particulelor ale unui corp oarecare $RSTV$ este aceeași, ca și cînd corpul păstrînd centrul de greutate, ar lua figura unei sfere. Q.E.D.

COROLAR. De aici mișcarea corpului atras Z va fi aceeași, ca și cînd corpul atrăgător $RSTV$ ar fi o sferă: și de accea corpul atrăgător sau este în repaus sau înaintează uniform în direcție; corpul atras se va mișca pe o elipsă avînd centrul în centrul de greutate al celui care atrage.

PROPOZIȚIA LXXXIX. TEOREMA XLVI

Fiind date mai multe corpuri constînd din particule egale, ale căror forțe sînt precum distanțele locurilor de la fiecare: forța compusă din forțele tuturora cu care este atras un corpuscul oarecare, va tinde spre centrul comun de greutate al celor atrăgătoare; și va fi același lucru ca și cînd cele atrăgătoare, păstrînd centrul comun de greutate, s-ar uni și ar forma o sferă.

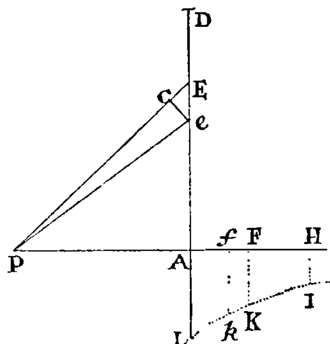
Se demonstrează în același fel, ca propoziția de mai sus.

COROLAR. Așadar mișcarea corpului atras va fi aceeași, ca și cînd corpurile atrăgătoare, păstrînd centrul comun de greutate, s-ar uni și ar forma o sferă. Și deci dacă centrul comun de greutate al corpurilor atrăgătoare sau este în repaus, sau înaintează uniform în linie dreaptă; corpul atras se va mișca pe o elipsă, avînd centrul în acel centru comun de greutate al celor atrăgătoare.

PROPOZIŢIA XC. PROBLEMA XLIV

Dacă spre diversele puncte ale unui cerc oarecare tind forţe centripete egale, crescînd sau descrescînd între un raport oarecare al distanţelor: să aflăm forţa, cu care este atras un corpuscul situat undeva pe o dreaptă, care stă perpendicular pe planul cercului în centrul lui.

Din centrul A cu un interval oarecare AD, într-un plan pe care dreapta AP este perpendiculară, să ne închipuim descris un cerc; şi trebuie să aflăm forţa, cu care este atras spre el un corpuscul oarecare P. Dintr-un punct oarecare E al cercului să ducem la corpusculul atras P dreapta PE. Pe dreapta PA să luăm PF egal cu PE, şi să ridicăm normala FK, care este precum forţa cu care punctul E atrage corpusculul P. Şi fie IKL linia curbă pe care se află incontinuu punctul K. Să întîlnească planul cercului în L. Pe PA să luăm PH egal cu PD, şi să ridicăm perpendiculara HI întîlnind curba menţionată în I; şi va fi atracţia corpusculului P spre cerc precum aria $AHIL$ înmulţită cu înălţimea AP. Q.E.I.



Căci să luăm pe AE linia cît se poate de mică Ee. Să unim Pe, şi pe PE, PA să luăm PC, Pf egale cu Pe. Şi fiindcă forţa, cu care un punct oarecare E al inelului descris din centrul A cu intervalul AE în planul menţionat atrage la sine corpul P, presupunem a fi precum FK, şi deci forţa, cu care acel punct atrage corpul P spre A, este precum $\frac{AP \times FK}{PE}$, şi forţa cu care inelul întreg atrage corpul P spre A, precum inelul şi $\frac{AP \times FK}{PE}$ luate împreună; dar inelul este precum dreptunghiul format de raza AE şi lăţimea Ee, şi acest dreptunghi (deoarece PE şi AE, Ee şi CE sînt proporţionale) este egal cu dreptunghiul $PE \times CE$ sau $PE \times Ff$; forţa cu care inelul atrage corpul P spre A, va fi precum $PE \times Ff$ şi $\frac{AP \times FK}{PE}$ luate împreună, adică, precum cel cuprins de $Ff \times FK \times AP$, sau precum aria $FKkf$ înmulţită cu AP. Şi de aceea suma forţelor, cu care toate inelele în cercul descris din centrul A şi cu intervalul AD, atrag corpul P spre A, este precum aria întreagă $AHIKL$ înmulţită cu AP. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă forţele punctelor descresc ca pătratul distanţelor, adică, dacă FK este precum $\frac{1}{PF^2}$ şi de aceea aria $AHIKL$ precum $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$, atracţia corpusculului spre cerc va fi precum $1 - \frac{PA}{PH}$, adică precum $\frac{AH}{PH}$.

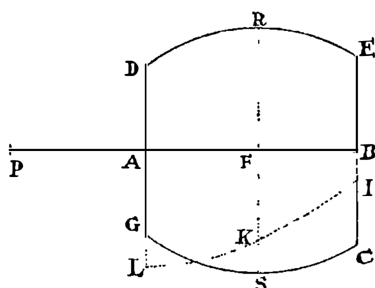
COROLARUL 2. Şi în general, dacă forţele punctelor la distanţele D sînt în raport invers cu o putere oarecare D^n a distanţelor, adică dacă FK este precum $\frac{1}{D^n}$, şi deci aria $AHIKL$ precum $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; atracţia corpusculului P spre cerc va fi precum $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

COROLARUL 3. Şi dacă diametrul cercului creşte la infinit, şi numărul n este mai mare ca unitatea; atracţia corpusculului P spre planul întreg infinit va fi în raport invers cu PA^{n-2}, fiindcă celălalt termen $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ dispare.

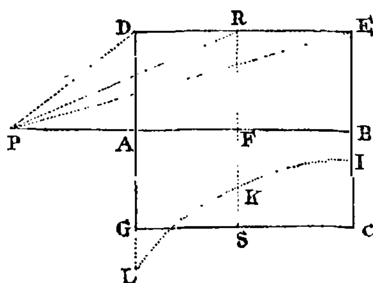
PROPOZIŢIA XCI. PROBLEMA XLV

Să aflăm atracţia unui corpuscul situat pe axa unui solid rotund, spre ale cărei diverse puncte tind forţe centripete egale descrescînd după un raport oarecare al distanţelor.

Spre solidul $DECG$ fie atras corpusculul P, situat pe axa AB a lui. Cu un cerc oarecare RFS perpendicular pe această axă să tăiem solidul, şi pe semidiametrul său FS, într-un plan oarecare $PALKB$ trecînd prin axă, să luăm (potrivit propoziţiei XC) lungimea FK proporţională cu forţa, cu care corpusculul P este atras spre cerc. Dar să atingă punctul K linia curbă LKI, întîlnind planele cercurilor celor mai îndepărtate AL şi BL în L şi I; şi atracţia corpusculului P spre solid va fi precum aria $LABI$. Q.E.I.

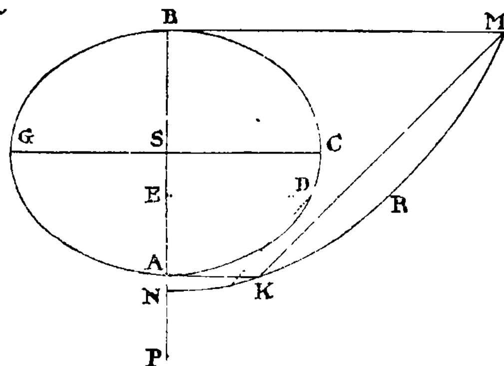


COROLARUL 1. De unde dacă solidul este un cilindru descris de paralelogramul $ADEB$ învîrtit în jurul axei AB, şi forţele centripete tinzînd spre diversele puncte sînt în raport invers cu pătratele distanţelor de la puncte: atracţia corpusculului P spre acest cilindru va fi precum $AB - PE + PD$. Căci ordonata FK (potrivit corolarului 1, propoziţia XC) va fi precum $1 - \frac{PF}{PR}$. Partea 1 a acestuia înmulţită cu lungimea AB, va descrie aria $1 \times AB$: şi partea cealaltă $\frac{PF}{PR}$ înmulţită cu lungimea PB, va descrie aria 1 înmulţită cu $(PE - AD)$, ceea ce se poate arăta uşor din cvadratura curbei LKI; şi la fel aceeaşi parte înmulţită cu lungimea PA va descrie aria 1 înmulţită cu $(PD - AD)$, şi înmulţită cu diferenţa AB a lui PB, PA va descrie diferenţa ariilor 1 înmulţit cu $PE - PD$. Din primul cuprins $1 \times AB$ să scădem cuprinsul al doilea 1 înmulţit cu $(PE - PD)$, şi va rămîne aria $LABI$ egală cu 1 înmulţit cu $(AB - PE + PD)$. Aşadar forţa, proporţională cu această arie, este precum $AB - PE + PD$.

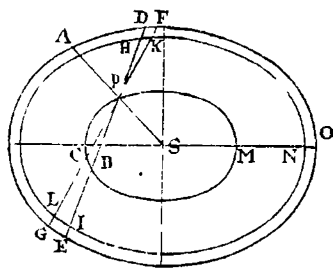


COROLARUL 2. De aici se cunoaşte şi forţa, cu care sferoidul $AGBC$ atrage un corp oarecare P, situat în afară pe axa lui. Fie $NKRM$ secţiunea conică a cărei ordonată ER, perpendiculară pe PE, să fie totdeauna egală

cu lungimea *PD*, dusă la punctul *D*, în care aceastǎ ordonată taie sferoidul. Din vîrfurile *A*, *B* ale sferoidului pe axa *AB* a aceluia să ridicăm perpendicularele *AK*, *BM* egale respectiv cu *AP*, *BP*, și de aceea întîlnind secțiunea conică în *K* și *M*; și să unim *KM* tăind din ea segmentul *KMRK*. Fie însă centrul *S* al sferoidului și semidiametrul maxim *SC*: și forța, cu care sferoidul atrage corpul *P*, va fi către forța, cu care sfera descrisă cu diametrul *AB* atrage același corp *P* precum $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ către $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Și printr-un calcul analog se pot afla forțele segmentelor sferoidului.



COROLARUL 3. Căci dacă corpusculul se plasează în interiorul sferoidului pe axă; atracția va fi precum distanța lui de la centru. Ceea ce se demonstrează mai ușor prin următorul raționament, fie că particula se află pe axă sau pe alt diametru oarecare dat. Fie *AGOF* sferoidul atrăgător, *S* centrul lui, și *P* corpul atras. Prin corpul *P* să ducem atît semidiametrul *SPA*, cît și două drepte oarecare *DE*, *FG* întîlnind sferoidul în *D* și *E*, *F* și *G*; și fie *PCM*, *HLN* suprafețele a doi sferoizi interiori, asemenea și concentrici cu cel exterior, dintre care cel dintîi să treacă prin corpul *P*, și să taie dreptele *DE* și *FG* în *B* și *C*, cel din urmă să taie aceleași drepte în *H*, *I* și *K*, *L*. Să aibă însă toți sferoizii o axă comună, și vor fi părțile dreptelor interceptate *DP* și *BE*, *FP* și *CG*, *DH* și *IE*, *FK* și *LG* egale între ele; fiindcă dreptele *DE*, *PB* și *HI* se bisectează în același punct, ca și dreptele *FG*, *PC* și *KL*. Să ne închipuim că *DPF*, *EPG* înseamnă conuri opuse, descrise cu unghiurile verticale *DPF*, *EPG* infinit de mici, și că liniile *DH*, *EI* de asemenea sînt infinit de mici; și particulele *DHKF GLIE* ale conurilor tăiate din suprafețele sferoizilor, din cauza egalității liniilor *DH*, *EI*, vor fi una față de alta precum pătratele distanțelor lor de la corpusculul *P*, și de aceea vor atrage corpusculul în mod egal. Și printr-un raționament analog, dacă spațiile *DPF*, *EGCB* se împart în particule de către suprafețele sferoizilor nenumărați asemenea concentrici și avînd o axă comună, acestea atrag din toate părțile corpul *P* în părți contrarii. Prin urmare forțele conului *DPF* și ale segmentului conic *EGCB* sînt egale, și prin opoziție se nimicesc reciproc. Și la fel este cazul forțelor întregii materii în afara sferoidului celui mai dinlăuntru *PCBM*. Așadar corpul *P* este atras numai de sferoidul cel mai dinlăuntru *PCBM*, și de aceea (potrivit corolarului 3, propoziția LXXII) atracția lui este către forța, cu care corpul *A* este atras de sferoidul întreg *AGOD*, precum distanța *PS* către distanța *AS*. Q.E.D.



PROPOZIŢIA XCII. PROBLEMA XLVI

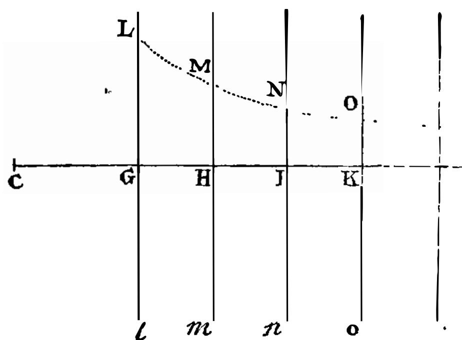
Fiind dat un corp atractiv, să aflăm raportul descreşterii forţelor centripete tinzînd spre diversele lui puncte.

Din corpul dat trebuie să formăm o sferă sau un cilindru sau o altă figură regulată, a cărei lege de atracţie, corespunzînd raportului unei descreşteri oarecare (potrivit propoziţiilor LXXX, LXXXI şi XCI) se poate afla. Apoi prin experienţe trebuie aflată forţa de atracţie la diverse distanţe şi legea atracţiei întregului aflată de aici va da raportul descreşterii forţelor diverselor părţi, pe care trebuia să-l aflăm.

PROPOZIŢIA XCIII. TEOREMA XLVII

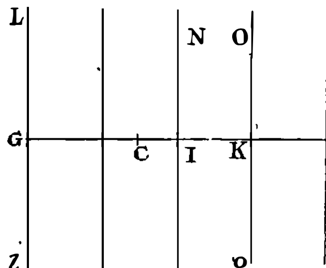
Dacă un solid plan într-o parte plan, de celelalte părţi însă infinit, constă din particule egale la fel de atractive, ale căror forţe la îndepărtarea de la solid descresc în raportul unei distanţe oarecare mai mult decît pătratic, şi un corpuscul situat pe una din cele două părţi ale planului este atras cu forţa întregului solid: zic că forţa atractivă a solidului, în îndepărtarea de la suprafaţa lui plană, va descreşte în raportul unei puteri, a cărei latură este distanţa corpusculului de la plan, şi indicele este cu trei mai mic decît indicele puterii distanţelor.

CAZUL 1. Fie *LGl* planul în care se termină solidul. Să presupunem însă că solidul este situat de partea acestui plan spre *I* şi că se descompune în nenumărate plane *mHM*, *nIN*, *oKO* etc. paralele cu *GL*. Şi mai întîi fie aşezat corpul atras *C* în afara solidului. Să ducem însă *CGHI* perpendicular pe acele plane nenumărate, şi forţele atractive ale punctelor solidului să descrească în raportul puterii distanţelor al cărui indice fie numărul *n* nu mai mic decît 3. Deci (potrivit corolarului 3, propoziţia XC) forţa, cu care un plan oarecare *mHM* atrage punctul *C* este în raport invers cu CH^{n-2}. În planul *mHM* să luăm lungimea *HM* invers proporţională cu CH^{n-2}, şi forţa va fi precum *HM*. La fel în diversele plane *lGL*, *nIN*, *oKO* etc. să luăm lungimile *GL*, *IN*, *KO* etc. invers proporţionale cu CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2} etc; şi forţele acelor plane vor fi precum lungimile luate, şi deci suma forţelor precum suma lungimilor, adică forţa întregului solid precum aria *GLOK* prelungită la infinit spre *OK*. Dar aria (potrivit metodelor cunoscute ale cvadraturilor) este în raport invers cu CG^{n-3}, şi de aceea forţa întregului solid este în raport invers cu CG^{n-3}. Q.E.D.



CAZUL 2. Să aşezăm acum corpusculul *C* de partea planului *lGL* în interiorul solidului, şi să luăm distanţa *CK* egală cu distanţa *CG*. Şi partea

LGloKO a solidului terminată de planele paralele *lGL*, *oKO*, nu atrage corpusculul *C* situat în mijloc în nici o parte, acţiunile contrarii ale punctelor opuse distrugîndu-se reciproc din cauza egalităţii. Prin urmare corpusculul *C* este atras numai prin forţa solidului situat dincolo de planul *OK*. Dar această forţă (potrivit primului caz) este în raport invers cu CK^{n-3} adică (deoarece *CG*, *CK* sînt egale) invers cu CG^{n-3}. Q.E.D.



COROLARUL 1. De aici dacă solidul *LGIN* se termină de toate părţile prin două plane infinite paralele *LG*, *IN*, forţa lui atractivă se cunoaşte, scăzînd din forţa atractivă a solidului întreg infinit *LGKO* forţa atractivă a părţii din urmă *NIKO*, prelungită la infinit spre *KO*.

COROLARUL 2. Dacă partea din urmă a acestui solid infinit, se înlătură, pentru că atracţia lui comparată cu atracţia părţii apropiate este fără importanţă: atracţia acelei părţi apropiate mărind distanţa va descreşte aproape în raportul puterii CG^{n-3}.

COROLARUL 3. Şi de aici dacă un corp oarecare finit şi plan de o parte atrage un corpuscul din regiunea mijlocie a acelui plan, şi distanţa dintre corpuscul şi plan comparată cu dimensiunile corpului atrăgător este extrem de mică, dar corpul atrăgător constă din particule omogene ale căror forţe atractive descresc după un raport oarecare mai mare ca puterea a patra a distanţelor; forţa atractivă a întregului corp va descreşte aproape în raportul puterii, a cărei latură este acea distanţă foarte mică şi indicele cu trei mai mic decît indicele puterii de mai înainte. Această afirmaţie nu este valabilă pentru un corp constînd din particule ale căror forţe atractive descresc în raportul puterii a treia a distanţelor; fiindcă, în acest caz atracţia părţii din urmă a corpului infinit în corolarul 2 este totdeauna infinit mai mare ca atracţia părţii dinainte.

SCOLIE

Dacă un corp oarecare este atras perpendicular spre un plan dat, şi din legea dată a atracţiei se caută mişcarea corpului: problema se va rezolva căutînd (potrivit propoziţiei XXXIX) mişcarea corpului descinzînd pe o dreaptă pe acest plan, şi (potrivit corolarului II al legilor) compunînd această mişcare cu mişcarea uniformă, efectuată după linii paralele cu acel plan. Şi invers, dacă se caută legea atracţiei tinzînd spre un plan după linii perpendiculare cu condiţia ca corpul atras să se mişte pe o linie curbă oarecare dată, problema se va rezolva operînd după modelul problemei III.

Dar operaţiunile se pot contrage rezolvînd ordonatele în serii convergente. Astfel dacă la baza *A* într-un unghi oarecare dat se aplică lungimea *B* ca ordonată care este ca o putere oarecare $A^{\frac{m}{n}}$ a bazei; şi se caută forţa cu care un corp atras spre bază sau respins de la bază după direcţia poziţiei ordonatei, se poate mişca pe o linie curbă, pe care ordonata totdeauna o descrie cu capătul ei superior: presupun că baza se măreşte cu o parte cît se poate de mică *O*, şi rezolv ordonata $(A + O)^{\frac{m}{n}}$ într-o serie infinită

$A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m^2 - mn}{2n^2} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$ etc. și presupun că forța este proporțională cu termenul acesteia în care O este de două dimensiuni, adică cu termenul $\frac{m^2 - mn}{2n^2} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$. Prin urmare forța căutată este precum $\frac{m^2 - mn}{n^2} A^{\frac{m-2n}{n}}$, sau, ceea ce este același lucru, precum $\frac{m^2 - mn}{n^2} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Astfel dacă ordonata descrie parabola, fiind $m = 2$, și $n = 1$: forța va fi precum cantitatea dată $2B^{\circ}$, și deci va fi cunoscută. Așadar dată fiind forța, corpul se va mișca pe o parabolă, după cum a demonstrat G a l i l e u. Căci dacă ordonata descrie o hiperbolă, fiindcă $m = 0 - 1$ și $n = 1$; forța va fi precum $2A^{-3}$ sau $2B^{3}$: și astfel, corpul se va mișca cu forță care este precum cubul ordonatei pe o hiperbolă. Dar lăsînd de o parte propozițiile de acest fel trec la altele referitoare la mișcare, pe care nu le-am tratat încă.

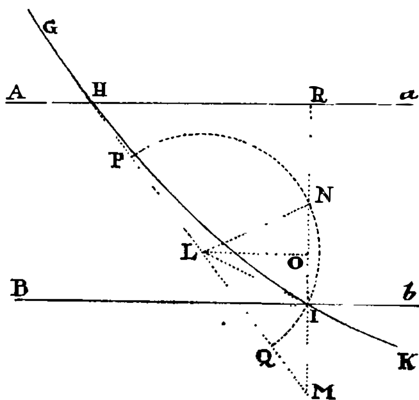
SECŢIUNEA XIV

Despre mişcarea corpurilor foarte mici care sînt agitate de forţe centripete tinzînd spre diverse părţi ale unui corp oarecare mare

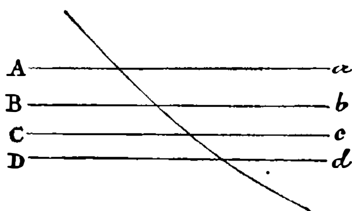
PROPOZIŢIA XCIV. TEOREMA XLVIII

Dacă două medii asemenea sînt separate unul de altul printr-un spaţiu terminat de toate părţile prin plane paralele, şi corpul în trecerea prin acest spaţiu este atras sau împins perpendicular spre unul din cele două medii, şi nici nu este agitat sau împiedicat de vreo altă forţă, însă atracţia, la distanţe egale de fiecare plan luate de aceeaşi parte, este pretutindenea aceeaşi: zic că sinusul de incidenţă într-unul din cele două plane va fi către sinusul de emergenţă din celălalt plan într-un raport dat.

CAZUL 1. Fie *Aa*, *Bb* două plane paralele. Să presupunem că corpul cade în primul plan *Aa* după linia *GH*, şi în trecerea lui întreagă prin spaţiul intermediar este atras sau respins spre mediul de incidenţă, şi prin acea acţiune să descrie linia curbă *HI*, şi să iasă după linia *IK*. Pe planul de emergenţă *Bb* să ridicăm perpendiculara *IM*, întîlnind atît linia de incidenţă *GH* prelungită în *M*, cît şi planul de incidenţă *Aa* în *R*; şi linia de emergenţă *KI* prelungită să întîlnească *HM* în *L*. Din centrul *L* cu intervalul *LI* să descriem un cerc, tăind atît pe *HM* în *P* şi *Q*, cît şi pe *MI* prelungită în *N*; şi mai întîi dacă presupunem că atracţia sau impulsul sînt uniforme, curba *HI* (din demonstraţiile lui Galileu) va fi o parabolă, care are proprietatea, că dreptunghiul format de parametrul şi linia *IM* este egal cu pătratul lui *HM*; dar şi linia *HM* va fi bisectată în *L*. De unde dacă pe *MI* se coboară perpendiculara *LO*, *MO*, *OR* vor fi egale; şi adunînd pe cele egale *ON*, *OI*, întregii *MN*, *IR* vor fi egali. Deci cum *IR* este dat, *MN* de asemenea este dat; şi dreptunghiul *NMI* este către dreptunghiul format de parametru şi de *IM*, adică, către HM^2, într-un raport dat. Dar dreptunghiul *NMI* este egal cu dreptunghiul *PMQ*, adică, cu diferenţa pătratelor ML^2, şi PL^2 sau LI^2; şi HM^2 are un raport dat către a patra parte a sa ML^2: aşadar se dă raportul $ML^2 - LI^2$ către ML^2, şi convertind raportul LI^2 către ML^2, şi raportul rădăcinii pătrate *LI* către *ML*. Dar în orice triunghi *LMI*, sinusurile unghiurilor sînt proporţionale cu laturile opuse. Prin urmare este dat raportul sinusului unghiului de incidenţă *LMR* către sinusul unghiului de emergenţă *LIR*. Q.E.D.



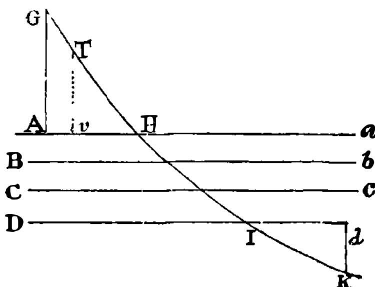
CAZUL 2. Să presupunem acum că corpul trece succesiv prin mai multe spaţii terminate de plane paralele *AabB*, *BbcC* etc. şi fie acţionat de o forţă care este separat uniformă în fiecare din ele, dar în diverse este diversă; şi potrivit celor demonstrate sinusul de incidenţă în primul plan *Aa* va fi către sinusul de emergenţă din al doilea *Bb*, într-un raport dat; şi acest sinus, care este sinusul de incidenţă în planul al doilea *Bb*, va fi către sinusul de emergenţă din planul al treilea *Cc*, într-un raport dat; şi acest sinus către sinusul de emergenţă din planul al patrulea *Dd*, într-un raport dat; şi aşa la infinit: şi prin egalitate, sinusul de incidenţă din primul plan către sinusul de emergenţă din planul ultim într-un raport dat. Să micşorăm acum intervalele planelor şi să mărim numărul la infinit, în aşa fel ca acţiunea atracţiei sau impulsului, după o lege oarecare dată, să devină continuă, şi raporturile sinsului de incidenţă din primul plan către sinusul de emergenţă din planul ultim, fiind totdeauna dat, de asemenea va fi dat. Q.E.D.



PROPOZIŢIA XCV. TEOREMA XLIX

Fiind presupuse aceleaşi: zic că viteza corpului înainte de incidenţă este către viteza lui după emergenţă, precum sinusul de emergenţă către sinusul de incidenţă.

Să luăm *AH*, *Id* egale şi să ridicăm perpendicularele *AG*, *dK* întîlnind liniile de incidenţă şi emergenţă *GH*, *IK*, în *G* şi *K*. Pe *GH* să luăm *TH* egal cu *IK*, şi să coborîm pe planul *Aa* normal pe *Tv*. Şi (potrivit corolarului II al legilor) să descompunem mişcarea corpului în două, una perpendiculară pe planele *Aa*, *Bb*, *Cc* etc. cealaltă paralelă cu ele. Forţa de atracţie sau de respingere, acţionînd după linii perpendiculare, nu schimbă întru nimic mişcarea în direcţia paralelelor şi de aceea corpul prin această mişcare va parcurge în timpuri egale în direcţia paralelelor intervale egale, care sînt între linia *AG* şi punctul *H*, şi între punctul *I* şi linia *dK* adică, în timpuri egale va descrie liniile *GH*, *IK*. Aşadar viteza înainte de incidenţă este către viteza după emergenţă, precum *GH* către *IK* sau *TH*, adică precum *AH* sau *Id* către *vH*, adică (considerînd ca rază *TH* sau *IK*) precum sinusul de emergenţă către sinusul de incidenţă. Q.E.D.

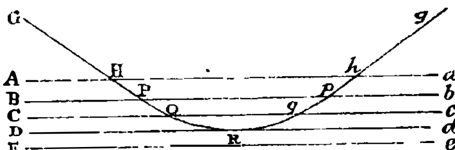


PROPOZIŢIA XCVI. TEOREMA L

Fiind presupuse aceleaşi, şi că mişcarea înainte de incidenţă este mai repede decît după aceea: zic că corpul înclinînd linia de incidenţă în sfîrşit se reflectă, şi unghiul de reflexie va fi egal cu unghiul de incidenţă.

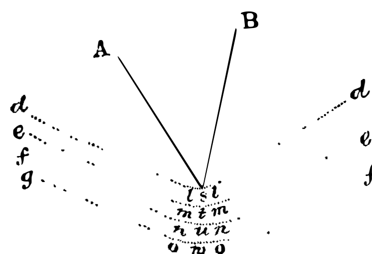
Căci să ne închipuim că un corp între planele paralele *Aa*, *Bb*, *Cc* etc., descrie arce parabolice, ca mai sus; şi fie arcele *HP*, *PQ*, *QR* etc. Şi fie

oblicitatea liniei de incidență *GH* către primul plan *Aa*, precum sinusul de incidență către raza cercului, al cărui sinus este, în raportul pe care-l are același sinus de incidență către sinusul de emergență din planul *Dd*, în spațiul *DdeE*: și deoarece sinusul de emergență acum este făcut egal cu raza, unghiul de emergență va fi drept și deci linia de emergență va coincide cu planul *Dd*. Să ajungă corpul la acest plan în punctul *R*; și fiindcă linia de emergență coincide cu planul este evident că corpul nu poate merge mai departe spre planul *Ee*. Dar el nu poate înainta nici pe linia de emergență *Rd*, fiindcă incontinuu este atras sau respins spre mediul de incidență. De aceea se întoarce între planele *Cc*, *Dd*, descriind arcul parabolei *QRq*, al cărei vîrf principal (potrivit celor demonstrate de Galileu) este în *R*; va tăia planul *Cc* după același unghi în *q* ca mai înainte în *Q*; apoi mergînd pe arcele parabolice *qp*, *ph* etc. asemenea și egale cu arcele de mai înainte *QP*, *PH*, va tăia planele rămase după aceleași unghiuri în *p*, *h*, etc. ca și mai înainte în *P*, *H* etc. și în sfîrșit va ieși cu aceeași oblicitate în *h*, cu care a intrat în *H*. Să ne închipuim acum că intervalele planelor *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* etc. se micșorează la infinit și numărul crește, în așa fel că acțiunea de atracție sau de respingere exercitată după o lege oarecare devine continuă; și unghiul de emergență rămînînd totdeauna egal cu unghiul de incidență va rămînea și acum egal cu el. Q.E.D.

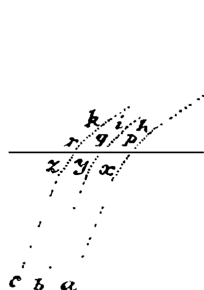


SCOLIE

Cu aceste atracții sînt foarte asemănătoare reflexiile și refracțiile luminii făcute după un raport dat al secantelor, după cum a aflat Snellius, și în consecință după un raport dat al sinusurilor, după cum a expus-o Descartes. Căci acum s-a verificat prin fenomenele sateliților lui *Jupiter* confirmate prin observațiile diverșilor astronomi că lumina se propagă succesiv și vine de la Soare la Pămînt în timp de șapte sau opt minute. Dar razele care sînt în aer (după cum de mult a aflat Grimaldi lăsînd să intre lumina printr-o deschidere într-o cameră întunecoasă, și eu însumi am experimentat-o în trecerea lor pe lîngă unghiurile corpurilor fie opace fie transparente cum sînt marginile dreptunghiulare circulare ale banilor bătuți din aur, argint și cupru și tăișul cuțitelor pietrilor sau al sticlelor sparte) se îndoiesc în jurul corpurilor, ca și cum ar fi atrase spre ele; și dintre aceste raze acele care în trecerea lor se apropie mai mult de corpuri se îndoiesc mai mult, ca și cînd ar fi atrase mai mult, după cum și eu am observat cu diligință. Și cele care trec la distanțe mai mari se îndoiesc mai puțin; și la distanțe și mai mari se îndoiesc întru cîtva de părți contrare, și formează trei fascicule de culori. Pe figură să însemne *s* tăișul unui cuțit sau pene oarecare *AsB* și *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* sînt raze îndoite spre cuțit cu arcele



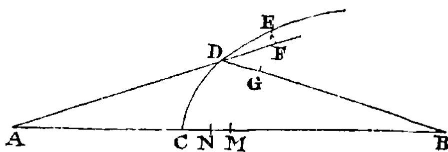
owo, *nun*, *mtm*, *lsl*; și anume mai mult sau mai puțin după distanța lor de la cuțit. Cum însă o astfel de îndoire a razelor are loc în aer în afara cuțitului, vor trebui și razele care cad pe cuțit să se îndoiască în aer înainte de a atinge cuțitul. Și la fel este cazul celor ce cad pe sticlă. Deci refracția nu se întîmplă în punctul de incidență, ci pe încetul prin curbura continuă a razelor, făcută parte în aer înainte de a atinge sticla, parte (dacă nu mă înșel) în sticlă după ce au intrat în ea: așa cum s-a schițat prin razele *ckzc*, *biyb*, *ahxa*, căzînd pe *r*, *q*, *p* și îndoite între *k* și *z*, *i* și *y*, *h* și *x*. Prin urmare din cauza analogiei care este între propagarea razelor de lumină și înaintarea corpurilor, mi s-a părut potrivit să adaug următoarele propoziții în folosul opticei; fără a discuta natura razelor (dacă sînt corpuri sau nu), ci determinînd numai traiectoriile corpurilor foarte asemănătoare cu traiectoriile razelor.



PROPOZIȚIA XCVII PROBLEMA XLVII

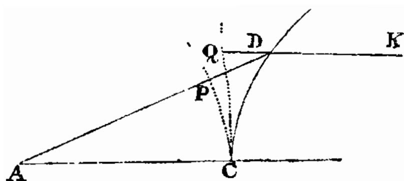
Presupunînd că sinusul de incidență pe o suprafață oarecare este către sinusul de emergență după un raport dat; și că îndoirea traiectoriei corpurilor lîngă acea suprafață are loc într-un spațiu foarte scurt, care poate fi considerat ca un punct: să determinăm suprafața care poate face ca toate corpusculele emanînd succesiv dintr-un loc dat să converge spre un alt loc dat.

Fie *A* locul dinspre care diverg corpusculele, *B* locul spre care trebuie să converge; *CDE* linia curbă care rotită în jurul axei *AB* va descrie suprafața căutată; *D*, *E* două puncte oarecare ale curbei; și *EF*, *EG* perpendicularele coborîte pe traiectoriile *AD*, *DB* ale corpului. Să se apropie punctul *D* de punctul *E*; și raportul ultim al liniei *DF*, cu care *AD* se mărește, către linia *DG*, cu care *DB* se micșorează, va fi același ca cel al sinusului de incidență către sinusul de emergență. Prin urmare se dă raportul creșterii liniei *AD* către descreșterea liniei *DB*; și de aceea dacă pe axa *AB* se ia undeva punctul *C*, prin care trebuie să treacă curba *CDE*, și se ia creșterea *CM* al lui *AC* către descreșterea *CN* al lui *BC* în acel raport dat, și din centrele *A*, *B*, și cu intervalele *AM*, *BN* se descriu două cercuri tăindu-se reciproc în *D*; punctul *D* va atinge curba căutată *CDE* și întîlnind-o undeva o va determina. Q.E.I.



COROLARUL 1. Făcînd însă ca punctul *A* sau *B* cînd să se îndepărteze la infinit cînd să treacă de celelalte părți ale punctului *C*, se vor avea toate figurile pe care le-a expus Descartes în optică și geometrie la refracții. A căror aflare Descartes ascunzînd-o a fost necesar să o expun în această propoziție.

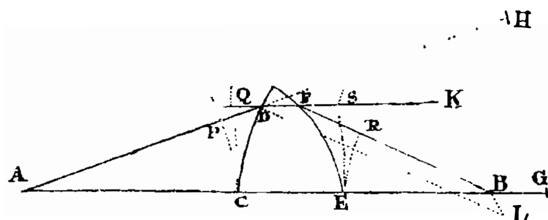
COROLARUL 2. Dacă un corp căzînd pe o suprafaţă oarecare *CD*, după linia dreaptă *AD*, dusă după o lege oarecare, iese după o altă dreaptă oarecare *DK*, şi din punctul *C* ne închipuim duse liniile curbe *CP*, *CQ* totdeauna perpendiculare pe *AD*, *DK*: creşterile liniilor *PD*, *QD* şi deci înseşi liniile *PD*, *QD* născute de aceste creşteri, vor fi ca sinusurile de incidenţă şi emergenţă între ele şi invers.



PROPOZIŢIA XCVIII. PROBLEMA XLVIII

Fiind presupuse aceleaşi, şi în jurul axei AB fiind descrisă o suprafaţă atractivă oarecare CD, regulată sau neregulată, prin care corpurile ieşind din locul dat A trebuie să treacă, să aflăm o a doua suprafaţă atractivă EF, care face ca corpurile să converge spre locul dat B.

Linia ce uneşte *AB* să taie prima suprafaţă în *C* şi pe a doua în *E*, punctul *D* fiind luat oricum. Şi punînd sinusul de incidenţă din prima suprafaţă către sinusul de emergenţă din aceeaşi, şi sinusul de emergenţă din suprafaţa a doua către sinusul de incidenţă în aceeaşi, precum o cantitate oarecare dată *M* către o alta dată *N*; să prelungim atît pe *AB* pînă în *G*, ca să fie *BG* către *CE* precum *M* – *N* către *N*; cît şi pe *AD* pînă în *H*, ca să fie *AH* egal cu *AG*; precum şi de asemenea *DF* pînă în *K*, ca să fie *DK* către *DH* precum *N* către *M*. Să unim *KB* şi din centrul *D* cu intervalul *DH* să descriem un cerc întîlnind în *LKB* prelungit, şi să ducem *BF* paralel cu *DL*: şi punctul *F* fie pe linia *EF*, care rotită în jurul axei *AB* va descrie suprafaţa căutată. Q.E.F.



Căci să ne închipuim că liniile *CP*, *CQ*, sînt undeva perpendiculare respectiv pe *AD*, *DF*, şi liniile *ER*, *ES* pe *FB*, *FD*, şi deci *QS* este totdeauna egal cu *CE*; şi va fi (potrivit corolarului 2, propoziţia XCVII) *PD* către *QD* precum *M* către *N*, şi deci precum *DL* către *DK* sau *FB* către *FK*; şi separînd precum *DL* — *FB* sau *PH* — *PD* — *FB* către *FD* sau *FQ* — *QD*; şi compunînd precum *PH*—*FB* către *FQ*, adică (din cauza că *PH* şi *CG*, *QS* şi *CE* sînt egale) *CE* + *BG* — *FR* către *CE* — *FS*. Dar (fiindcă *BG* este proporţional cu *BG* şi *M* — *N* cu *N*) este şi *CE* + *BG* către *CE* precum *M* către *N*; şi deci separînd *FR* către *FS* precum *M* către *N*; şi de aceea (potrivit corolarului 2, propoziţia XCVII) suprafaţa *EF* constrînge corpul, căzînd pe ea după linia *DF*, să meargă pe linia *FR* la locul *B*. Q.E.D.

SCOLIE

În acelaşi mod se poate trece la trei sau mai multe suprafeţe. Dar pentru scopuri optice sînt mai potrivite figurile sferice. Dacă sticlele obiective ale lunetelor ar fi construite din două sticle de formă sferică şi închizînd între ele apă, se poate întîmpla ca erorile de refracţie care au loc în suprafeţele extreme ale sticlelor să fie corectate destul de precis de refracţiile apei. Dar astfel de sticle obiective trebuie preferate sticlelor eliptice şi hiperbolice, nu numai fiindcă se pot forma mai uşor şi mai precis, ci şi fiindcă refractează mai precis fasciculele razelor situate în afară de axa sticlei. Dar refrangibilitatea diferită a diverselor raze este obstacolul care împiedică perfecţionarea instrumentelor optice prin figuri fie sferice fie de alte forme oarecare. Pînă ce nu se pot corecta erorile ce provin de aici, orice efort de a corecta pe celelalte va fi cheltuit zadarnic.

CARTEA A II-a

DESPRE MIŞCAREA CORPURILOR

SECŢIUNEA I

Despre mişcarea corpurilor cărora li se opune o rezistenţă în raport cu viteza

PROPOZIŢIA I. TEOREMA I

Un corp, căruia i se opune o rezistenţă în raport cu viteza, pierde prin rezistenţă o mişcare proporţională cu spaţiul descris prin mişcare.

Căci fiindcă mişcarea pierdută în diversele părticele de timp este proporţională cu viteza, adică, cu o părticică a drumului parcurs: compunînd, mişcarea pierdută în timpul întreg va fi proporţională cu drumul întreg. Q.E.D.

COROLAR. De aceea dacă un corp, lipsit de orice greutate, se mişcă în spaţii libere numai prin forţa inerentă; şi se dă atît mişcarea întreagă de la început, cît şi mişcarea rămasă după ce s-a parcurs un spaţiu oarecare: va fi dat spaţiul întreg pe care îl poate descrie corpul într-un timp infinit. Căci acel spaţiu va fi către spaţiul deja descris, precum mişcarea întreagă de la început către partea pierdută a acelei mişcări.

LEMA I

Cantităţile proporţionale cu diferenţele lor sînt continuu proporţionale.

Fie A către $A-B$ precum B către $B-C$ şi C către $C-D$ etc. şi prin conversiune va fi A către B precum B către C şi C către D etc. Q.E.D.

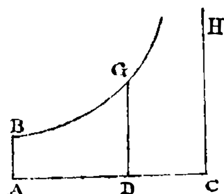
PROPOZIŢIA II. TEOREMA II

Dacă unui corp i se opune o rezistenţă în raport cu viteza, şi el se mişcă numai prin forţa inerentă într-un mediu similar, iar timpurile se iau egale: vitezele la începutul diverselor timpuri sînt în progresie geometrică, şi spaţiile descrise în diversele timpuri sînt proporţionale cu vitezele.

CAZUL 1. Să împărţim timpul în intervale egale; şi dacă la începuturile intervalelor forţa de rezistenţă acţionează cu un impuls unic, care este precum viteza: descreşterea vitezei în diversele intervale de timp va fi precum însăşi viteza. Prin urmare vitezele sînt proporţionale cu diferenţele lor, şi de aceea (potrivit lemei I, Cartea a II-a) continui proporţionale. În consecinţă dacă dintr-un număr egal de intervale se compun oarecare timpuri egale, vitezele la începutul timpurilor, vor fi precum termenii într-o progresie continuă, care se iau pe sărite, omiţînd totdeauna un număr egal de termeni intermediari. Dar rapoartele acestor termeni se compun din rapoartele aceloraşi termeni intermediari repetaţi în mod egal, şi de aceea şi rapoartele compuse între ele sînt aceleaşi. Aşadar vitezele, proporţionale cu aceşti termeni, sînt în progresie geometrică. Căci să scădem intervalele egale ale timpurilor, şi să mărim numărul lor la infinit, astfel ca impulsul rezistenţei să devină continuu; şi vitezele la începutul timpurilor egale, totdeauna continuu proporţionale, vor fi şi în acest caz continuu proporţionale. Q.E.D.

CAZUL 2. Şi separînd diferenţele vitezelor, adică părţile lor pierdute în diversele timpuri, sînt precum cele întregi: dar spaţiile descrise în diversele timpuri sînt precum părţile pierdute ale vitezelor (potrivit propoziţiei I, Cartea a II-a) şi de aceea şi precum cele întregi. Q.E.D.

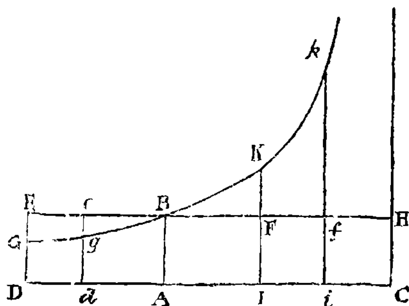
COROLAR. De aici dacă la asimptotele dreptunghiulare *AC*, *CH*, descriem hiperbola *BG*, şi *AB*, *DG* sînt perpendiculare pe asimptota *AC*, şi reprezentăm atît viteza corpului cît şi rezistenţa mediului, la începutul mişcării, printr-o linie oarecare dată *AC*, iar după trecerea unui timp oarecare prin linia indefinită *DC*: timpul se poate exprima prin aria *ABGD*, şi spaţiul descris în acel timp prin linia *AD*. Căci dacă acea arie prin mişcarea punctului *D* se măreşte în mod uniform la fel cu timpul, dreapta *DC* va descreşte în raport geometric la fel cu viteza, şi părţile dreptei *AC* descrise în timpuri egale vor descreşte în acelaşi raport.



PROPOZIŢIA III. PROBLEMA I

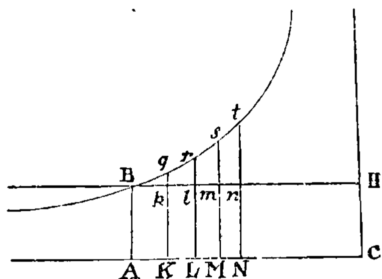
Să definim mişcarea unui corp, căruia în timp ce se urcă sau coboară pe o dreaptă într-un mediu omogen, i se opune o rezistenţă în raport cu viteza şi care este acţionat de gravitate.

Corpul urcîndu-se, să exprimăm gravitatea printr-un dreptunghi oarecare dat *BACH*, şi rezistenţa mediului la începutul urcării prin dreptunghiul *BADE* luat de părţi contrare ale dreptei *AB*. Prin punctul *B* să descriem o hiperbolă tăind perpendicularele *DE*, *de* în *G*, *g*, cu asimptotele dreptunghiulare *Ac*, *CH*; şi corpul urcînd în timpul *DGdg* va descrie spaţiul *EGge*, în timpul *DGBA* spaţiul întregii urcări *EGB*; în timpul *ABKI* spaţiul coborîrii *BFK*, şi în timpul *IKki*



spaţiul coborîrii *KFfk*; şi vitezele corpului (proporţionale cu rezistenţa mediului) în intervalele acestor timpuri vor fi respectiv *ABED*, *ABed*, zero, *ABFI*, *ABfi*; şi viteza maximă, pe care corpul o poate cîştiga coborînd, va fi *BACH*.

Căci să descompunem dreptunghiul *BACH* în nenumărate dreptunghiuri *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn* etc., care să fie precum creşterile vitezelor efectuate în tot atîtea timpuri egale; şi vor fi zero, *Ak*, *Al*, *Am*, *An* etc., precum vitezele întregi, şi deci (prin ipoteză) precum rezistenţele mediului la începutul diverselor timpuri egale. Fie *AC* către *AK* sau *ABHC* către *ABkK* precum forţa gravităţii către rezistenţa la începutul timpului al doilea, şi din forţa gravităţii să se scadă rezistenţele, şi vor rămîne *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *MmHC* etc. precum forţele absolute cu care este acţionat corpul la începutul diverselor timpuri, şi deci (potrivit legii II a mişcării) precum creşterile vitezelor, adică, precum dreptunghiurile *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn* etc. şi deci (potrivit lemei I, Cartea a II-a) în progresie geometrică. De aceea dacă dreptele *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn* etc. prelungite întîlnesc hiperbola în *q*, *r*, *s*, *t* etc. ariile *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN* etc. vor fi egale şi deci analoge atît cu timpurile cît şi cu forţele gravitaţionale totdeauna egale. Dar aria *ABqK* (potrivit corolarului 3, lema VII şi lema VIII, Cartea I) este către aria *BKq*, precum *Kq* către $\frac{1}{2}$ *kq*, sau *AC* către $\frac{1}{2}$ *AK*, adică precum forţa gravităţii către rezistenţa la mijlocul primului timp. Şi printr-un raţionament analog ariile *qKLr*, *rLMs*, *sMNt* etc. sînt către ariile *qklr*, *rlms*, *smnt* etc. precum forţele gravităţii către rezistenţele la mijlocul timpului al doilea, al treilea, al patrulea etc. Prin urmare cum ariile egale *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt* etc. sînt analoge cu forţele gravităţi, ariile *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt* etc., vor fi analoge cu rezistenţele la mijlocul diverselor timpuri, adică (prin ipoteză) cu vitezele, şi deci cu spaţiile descrise. Să luăm sumele celor analoge, şi vor fi ariile *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt* etc. analoge cu spaţiile întregi descrise; iar ariile *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN* etc. cu timpurile. În consecinţă corpul în coborîre, într-un timp oarecare *ABrL*, descrie spaţiul *Blr*, şi în timpul *LrtN* spaţiul *rlnt*. Q.E.D. Şi la fel este demonstraţia mişcării expuse în urcare. Q.E.D.



COROLARUL 1. Aşadar viteza maximă, pe care o poate cîştiga un corp în cădere, este către viteza cîştigată într-un timp oarecare dat, precum forţa dată a gravităţii, cu care acel corp este acţionat incontinuu, către forţa de rezistenţă, prin care este împiedicat la sfîrşitul acelui timp.

COROLARUL 2. Însă timpul crescînd în progresie aritmetică, suma vitezei maxime şi a vitezei în urcare, şi diferenţa lor în coborîre descreşte în progresie geometrică.

COROLARUL 3. Dar şi diferenţele spaţiilor, ce sînt descrise în diferenţe egale de timpuri descresc în aceeaşi progresie geometrică.

COROLARUL 4. Spaţiul descris de un corp este diferenţa a două spaţii, dintre care unul este precum timpul luat de la începutul coborîrii şi celălalt precum viteza, care şi la începutul coborîrii sînt egale între ele.

PROPOZIŢIA IV. PROBLEMA II

Presupunînd că forţa gravităţii într-un mediu omogen oarecare este uniformă, şi tinde în mod perpendicular spre planul orizontului; să definim mişcarea unui proiectil în el, care suferă o rezistenţă proporţională cu viteza.

Dintr-un loc oarecare D să pornească un proiectil în direcţia unei drepte DP, şi să exprimăm viteza lui la începutul mişcării prin lungimea DP. Din punctul P să coborîm pe linia orizontală DC perpendiculara PC şi să tăiem DC în A, ca să fie DA către AC, precum rezistenţa mediului, născută din mişcarea în înălţime la început, către forţa gravităţii; sau (ceea ce este acelaşi lucru) pentru ca dreptunghiul format de DA şi DP către dreptunghiul format de AC şi CP să fie precum rezistenţa întreagă la începutul mişcării către forţa gravităţii. Cu asimptotele DC, CP să descriem o hiperbolă oarecare $GTBS$, tăind perpendicularele DG, AB în G şi B; şi să completăm paralelogramul $DGKC$, a cărui latură GK să taie AB în Q. Să luăm linia N în acelaşi raport către QB în care este DC către CP; şi la un punct oarecare R al dreptei DC să ridicăm perpendiculara RT, care să întîlnească hiperbola în T, şi dreptele EH, GK, DP în I, t şi V; pe ea să luăm Vr egal cu $\frac{tGT}{N}$, sau, aceea ce este acelaşi lucru, să luăm Rr egal cu $\frac{GTIE}{N}$, şi proiectilul în timpul $DRTG$ va ajunge la punctul r, descriind linia curbă $DraF$, pe care se află totdeauna punctul r, ajungînd însă la înălţimea maximă a pe perpendiculara AB, şi după aceea apropiindu-se totdeauna de asimptota PC. Şi viteza lui într-un punct oarecare r este precum tangenta rL a curbei. Q.E.I.

Căci N este către QB precum DC către CP sau DR către RV, şi deci RV este egal cu $\frac{DR \times QB}{N}$, şi Rr (adică $RV - Vr$ sau $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) egal cu $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Să reprezentăm acum timpul prin aria $RDGT$, şi (potrivit corolarului II al legilor) să descompunem mişcarea corpului în două, una de urcare, cealaltă laterală. Şi fiindcă rezistenţa este precum mişcarea, să o separăm şi pe aceasta în două părţi proporţionale şi contrare cu părţile mişcării: şi deci lungimea, descrisă lateral faţă de mişcare, va fi (potrivit propoziţiei II al acesteia) precum linia DR, iar înălţimea (potrivit propoziţiei III al acesteia) precum aria $DR \times AB - RDGT$, adică precum linia Rr.

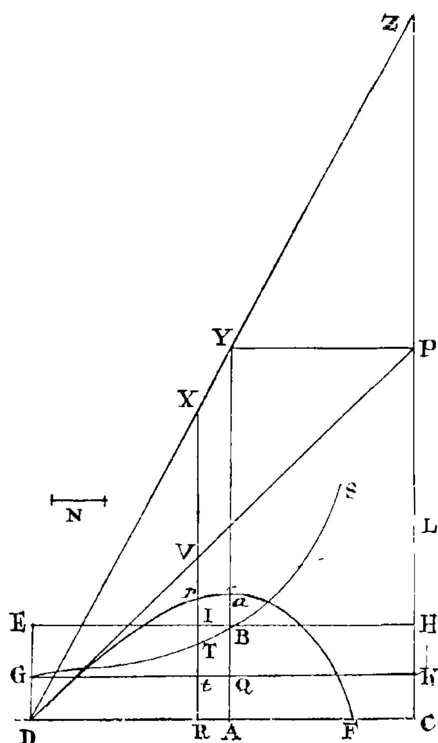
Dar la începutul mişcării aria $RDGT$ este egală cu dreptunghiul $DR \times AQ$, şi deci linia Rr (sau $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) atunci este către DR precum $AB - AQ$ sau QB către N, adică, precum CP către DC; şi deci precum mişcarea în înălţime către mişcarea în lungime la început. Prin urmare cum Rr este totdeauna precum înălţimea şi DR totdeauna precum lungimea, şi Rr către DR la început precum înălţimea către lungime: este necesar ca Rr să fie totdeauna către DR precum înălţimea către lungime, şi de aceea ca corpul să se mişte pe linia $DraF$, pe care punctul r se află incontinuu. Q.E.D.

COROLARUL 1. În consecinţă Rr este egal cu $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$: şi astfel dacă RT se prelungeşte pînă în X ca RX să fie egal cu $\frac{DR \times AB}{N}$ adică, dacă se completează paralelogramul $ACPY$, să unim pe DY tăind CP în Z, şi să prelungim pe RT pînă ce întîlneşte pe DY în X; Xr va fi egal cu $\frac{RDGT}{N}$, şi de aceea proporţional cu timpul.

COROLARUL 2. De unde dacă se iau nenumărate CR sau, ceea ce este acelaşi lucru, nenumărate ZY în progresie geometrică; vor fi tot atîtea Xr în progresie aritmetică. Şi deci curba $DraF$ se determină uşor cu ajutorul tabelei de logaritmi.

COROLARUL 3. Dacă se construieşte o parabolă cu vîrful D, cu diametrul DG prelungit în jos, şi cu parametrul care este către $2DP$ precum rezistenţa întreagă la începutul mişcării către forţa gravitāţii: viteza cu care trebuie corpul să pornească din locul D după dreapta DP, pentru ca într-un mediu uniform rezistenţa să descrie curba $DraF$, va fi aceeaşi cu care trebuie să pornească din acelaşi loc D, după aceeaşi dreaptă DP, ca într-un spaţiu nerezistent să descrie o parabolă. Căci parametrul parabolei, la începutul mişcării, este $\frac{DV^2}{Vr}$; şi Vr este $\frac{tGT}{N}$ sau $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Dar dreapta care dacă s-ar duce, ar atinge hiperbola GTS în G, este paralelă cu DK, şi deci Tt este $\frac{CK \times DR}{DC}$, şi N este $\frac{QB \times DC}{CP}$. Şi de aceea Vr este $\frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$, adică (deoarece DR şi DC, DV şi DP sînt proporţionale) $\frac{DV^2 \times CK \times CP}{2DP^2 \times QB}$, şi parametrul $\frac{DV^2}{Vr}$ devine $\frac{2DP^2 \times QB}{CK \times CP}$, adică (deoarece QB şi CK, DA şi AC sînt proporţionale) $\frac{2DP^2 \times DA}{AC \times CP}$, şi deci către $2DP$, precum $DP \times DA$ către $CP \times AC$; adică, precum rezistenţa către greutate. Q.E.D.

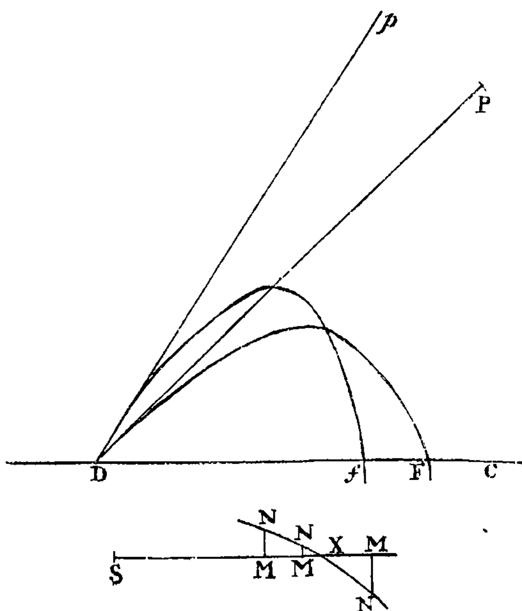
COROLARUL 4. De unde dacă corpul este proiectat dintr-un loc oarecare D, cu o viteză dată, după o dreaptă DP oarecare de poziţie dată; şi



se dă rezistența mediului la începutul mișcării: se poate afla curba *DraF*, pe care o va descrie corpul. Căci dacă este dată viteza, este dat parametrul parabolei, după cum se știe. Și luînd $2DP$ către parametru, precum forța gravității către forța rezistenței, se dă DP. Apoi tăind DC în A, ca să fie $CP \times AC$ către $DP \times DA$ în același raport al gravității către rezistență, va fi dat punctul A. Și deci este dată curba *DraF*.

Corolarul 5. Și invers, dacă se dă curba *DraF*, se va da și viteza corpului și rezistența mediului în diverse locuri r. Căci fiind dat raportul $CP \times AC$ către $DP \times DA$, se dă atît rezistența mediului la începutul mișcării cît și parametrul parabolei: și deci se dă și viteza la începutul mișcării. Apoi din lungimea tangentei rL, se dă și viteza proporțională cu aceasta și rezistența proporțională cu viteza într-un loc oarecare r.

Corolarul 6. Cum însă lungimea $2DP$ este către parametrul parabolei precum gravitatea către rezistența în D, și viteza crescînd rezistența crește în același raport, dar parametrul parabolei crește cu pătratul acelui raport: este evident că lungimea $2DP$ crește în raport simplu, și astfel totdeauna proporțională cu viteza, și nici nu crește sau descrește prin schimbarea unghiului CDP, dacă nu se schimbă și viteza.



Corolarul 7. De aici se evidențiază o metodă de a determina curba *DraF* în mod aproximativ din fenomene, și deci se află rezistența și viteza cu care se proiectează un corp. Să proiectăm două corpuri asemenea și egale cu aceeași viteză, din locul D, după unghiuri diferite CDP, CDp și să cunoaștem locurile F, f, unde cad în planul orizontal DC. Atunci, luînd o lungime oarecare pentru DP sau Dp, să ne închipuim că rezistența în D este către gravitate într-un raport

oarecare, şi să exprimăm acel raport printr-o lungime oarecare *SM*. Apoi prin calcul, din lungimea luată *DP*, să determinăm lungimile *DF*, *Df*, şi din raportul $\frac{Ff}{DF}$ aflat prin calcul, să scoatem acelaşi raport aflat prin experienţă, şi să exprimăm diferenţa prin perpendiculara *MN*. Să facem acelaşi lucru a doua şi a treia oară, luînd totdeauna un nou raport *SM* al rezistenţei către gravitate, şi determinînd noua diferenţă *MN*. Să punem însă diferenţele pozitive de o parte a dreptei *SM*, şi cele negative de cealaltă; şi prin punctele *M*, *N*, *N* să ducem curba regulată *NNN* tăind dreapta *SMMM* în *X*, şi *SX* va fi raportul adevărat al rezistenţei către gravitate, care trebuia aflat. Din acest raport trebuie determinată prin calcul lungimea *DF*; şi o lungime care este către lungimea dată *DP* precum lungimea *DF* cunoscută prin experienţă către lungimea *DF* acum aflată, va fi lungimea adevărată *DP*. Care fiind aflată, vom avea atît linia curbă *DraF* pe care o descrie corpul, cît şi viteza corpului şi rezistenţa în diversele locuri.

SCOLIE

De altfel, ipoteza că rezistenţa corpurilor este în raportul vitezei, este o ipoteză mai mult matematică decît naturală. În mediile, care sînt lipsite de orice rigiditate, rezistenţele corpurilor sînt ca pătratele vitezelor. Căci prin acţiunea unui corp mai iute se comunică aceleaşi cantităţi de mediu, într-un timp mai scurt, o mişcare mai mare în raportul unei viteze mai mari; şi deci într-un timp egal, din cauza cantităţii mai mari de mediu perturbat, se comunică o mişcare mai mare în raportul pătratului; şi rezistenţa (potrivit legilor II şi III ale mişcării) este precum mişcarea comunicată.

Să vedem deci ce fel de mişcări se nasc din această lege a rezistenţei.

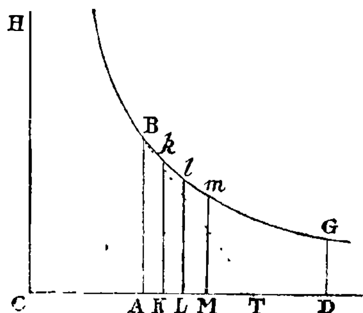
SECȚIUNEA II

Despre mișcarea corpurilor cărora li se opune o rezistență proporțională cu pătratul vitezei.

PROPOZIȚIA V. TEOREMA III

Dacă unui corp i se opune o rezistență proporțională cu pătratul vitezei, și el se mișcă numai prin forța inerentă într-un mediu omogen; iar timpurile se iau în progresie geometrică procedînd de la termenii mai mici la cei mai mari; zic că vitezele la începutul diverselor timpuri sînt în aceeași progresie geometrică inversă; și că spațiile descrise în diversele timpuri sînt egale.

Căci, fiindcă rezistența mediului este proporțională cu pătratul vitezei, și descreșterea vitezei este proporțională cu rezistența; dacă împărțim timpul în intervale nenumărate egale, pătratele vitezelor la începutul diverselor timpuri vor fi proporționale cu diferențele acelorași viteze. Fie intervalele de timp *AK*, *KL*, *LM* etc. luate pe dreapta *CD*; să ridicăm perpendicularele *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm* etc. întîlnind hiperbola *BklmG*, descrisă cu centrul *C* cu asimptotele *CD*, *CH*, în *B*, *k*, *l*, *m* etc. și va fi *AB* către *Kk* precum *CK* către *CA*, și separînd *AB—Kk* către *Kk* precum *AK* către *CA*, și la rîndul său *AB—Kk* către *AK* precum *Kk* către *CA*, și deci precum $AB \times Kk$ către $AB \times CA$. De unde, fiindcă *AK* și $AB \times CA$ sînt date, va fi *AB—Kk* precum $AB \times Kk$; și în sfîrșit, cînd *AB* și *Kk* coincid, precum AB^2. Și printr-un raționament analog *Kk — Ll*, *Ll — Mm* etc. vor fi precum Kk^2, Ll^2 etc. Prin urmare pătratele liniilor *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm* sînt precum diferențele lor; și de aceea cum și pătratele vitezelor sînt ca diferențele lor, progresia ambelor va fi asemenea. Acestea fiind demonstrate, rezultă de asemenea că ariile descrise cu aceste linii sînt într-o progresie analogă cu spațiile descrise de viteze. Prin urmare dacă reprezentăm viteza la începutul primului timp *AK* prin linia *AB*, și viteza la începutul celui de-al doilea *KL* prin linia *Kk*, și lungimea descrisă în primul timp prin aria *AKkB*; toate vitezele următoare se vor exprima prin liniile următoare *Ll*, *Mm* etc. și lungimile descrise prin ariile *Kl*, *Mm* etc. Și compunînd, dacă reprezentăm timpul întreg prin suma părților sale *AM*, lungimea întreagă descrisă se va exprima prin suma părților sale *AMmB*. Să ne închipuim acum timpul *AM* împărțit în așa fel în părțile *AK*, *KL*, *LM* etc., încît *CA*, *CK*, *CL*, *CM* etc., să fie în progresie geometrică; și părțile vor fi în aceeași progresie, și vitezele *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm* etc., vor fi în aceeași progresie inversă, și spațiile descrise *Ak*, *Kl*, *Lm* etc. egale. Q.E.D.



COROLARUL 1. Prin urmare este evident că dacă reprezentăm timpul printr-o parte oarecare *AD* a asimptotei, și viteza la începutul timpului prin ordonata *AB*; viteza la sfîrșitul timpului se va reprezenta prin ordonata *DG*, și spațiul întreg descris prin aria hiperbolică adiacentă *ABGD*; și spațiul pe care-l poate descrie un corp oarecare în același timp *AD*, cu prima viteză *AB*, într-un mediu fără rezistență, prin dreptunghiul $AB \times AD$.

COROLARUL 2. De unde se dă spaţiul descris într-un mediu rezistent, luîndu-l către spaţiul ce se poate descrie simultan cu viteza uniformă *AB* într-un mediu fără rezistenţă, precum aria hiperbolică *ABGD* către dreptunghiul $AB \times AD$.

COROLARUL 3. Se dă şi rezistenţa mediului, admiţînd că ea la începutul mişcării este egală cu forţa centripetă uniformă, care poate genera viteza *AB* unui corp ce cade în timpul *AC*, într-un mediu fără rezistenţă. Căci dacă ducem *BT* care atinge hiperbola în *B*, şi întîlneşte asimptota în *T;* dreapta *AT* va fi egală cu *AC*, şi va exprima timpul, în care prima rezistenţă, continuată în mod uniform, poate anula viteza întreagă *AB*.

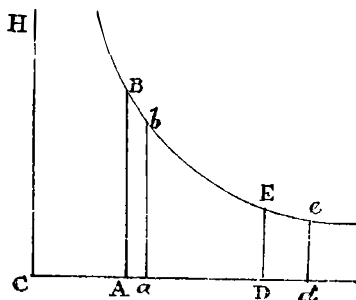
COROLARUL 4. Şi de aici se dă şi proporţia acestei rezistenţe către forţa gravităţii, sau orice altă forţă centripetă dată.

COROLARUL 5. Şi invers, dacă se dă proporţia rezistenţei către o forţă centripetă oarecare dată; se dă timpul *AC* în care o forţă centripetă poate genera o viteză oarecare *AB* egală cu rezistenţa: şi deci se dă punctul *B* prin care trebuie descrisă hiperbola, avînd asimptotele *CH*, *CD*; precum şi spaţiul *ABGD*, pe care un corp la începutul mişcării sale cu viteza *AB*, îl poate descrie într-un mediu rezistent omogen, într-un timp oarecare *AD*.

PROPOZIŢIA VI. TEOREMA IV

Corpuri sferice omogene şi egale, împiedicate de rezistenţe în raport cu pătratul vitezelor, şi acţionate numai de forţe inerente, în timpuri, care sînt în raport invers cu vitezele iniţiale, descriu totdeauna spaţii egale, şi pierd părţi de viteze proporţionale cu întregii.

Descriind o hiperbolă oarecare *BbEe* cu asimptotele dreptunghiulare *CD*, *CH* tăind perpendicularele *AB*, *ab*, *DE*, *de* în *B*, *b*, *E*, *e*, să reprezentăm vitezele iniţiale prin perpendicularele *AB*, *DE*, şi timpurile prin liniile *Aa*, *Dd*. Prin urmare precum *Aa* către *Dd* tot astfel (prin ipoteză) *DE* către *AB*, şi (din natura hiperbolei) *CA* către *CD*; şi compunînd, va fi astfel *Ca* către *Cd*. Prin urmare ariile *ABba*, *DEed*, adică, spaţiile descrise sînt egale între ele, şi primele viteze *AB*, *DE* sînt proporţionale cu ultimele *ab*, *de*, şi de aceea separînd, şi cu părţile lor pierdute $AB - ab$, $DE - de$. Q.E.D.



PROPOZIŢIA VII. TEOREMA V

Corpurile sferice cărora li se opune o rezistenţă în raport cu pătratul vitezelor în timpuri, care sînt precum primele mişcări şi în raport invers cu primele rezistenţe, vor pierde părţi proporţionale cu mişcările întregilor, şi vor descrie spaţii proporţionale cu aceste timpuri şi primele viteze luate împreună.

Căci părţile pierdute ale corpurilor sînt precum rezistenţele şi timpurile luate împreună. Aşadar pentru ca acele părţi să fie proporţionale cu întregii

va trebui ca rezistenţa şi timpul luate împreună să fie ca mişcarea. De aceea timpul va fi precum mişcarea şi în raport invers cu rezistenţa. Din care cauză luînd intervalele timpurilor în acel raport, corpurile vor pierde totdeauna, particule de-ale mişcărilor proporţionale cu întregii şi deci vor reţine viteze totdeauna proporţionale cu primele lor viteze. Şi fiind dat raportul vitezelor, vor descrie totdeauna spaţii, care sînt precum primele viteze şi timpurile luate împreună. Q.E.D.

COROLARUL 1. Aşadar dacă la corpuri de viteze egale se opune o rezistenţă în raport cu pătratul diametrelor: sferele omogene mişcate cu viteze oarecare, descriind spaţii proporţionale cu diametrele lor, vor pierde părţi ale mişcărilor proporţionale cu întregii. Căci mişcarea unei sfere oarecare va fi precum viteza şi masa luate împreună, adică, precum viteza şi cubul diametrului; rezistenţa (prin ipoteză) va fi precum pătratul diametrului şi pătratul vitezei luate împreună; şi timpul (potrivit acestei propoziţii) în primul raport este direct în al doilea invers, adică, precum în raport direct cu diametrul şi invers cu viteza; şi astfel spaţiul, proporţional cu timpul şi viteza, este precum diametrul.

COROLARUL 2. Dacă la corpuri de viteze egale se opune o rezistenţă proporţională cu puterea $\frac{3}{2}$ a diametrelor: sferele omogene mişcate cu viteze oarecare, descriind spaţii proporţionale cu puterea $\frac{3}{2}$ a diametrelor, vor pierde părţi ale mişcărilor proporţionale cu întregii.

COROLARUL 3. Şi în general, dacă la corpuri de viteze egale li se opune o rezistenţă în raportul unei puteri oarecare a diametrelor: spaţiile în care sfere omogene, mişcate cu viteze oarecare, vor pierde părţi ale mişcărilor proporţionale cu întregii, vor fi precum cuburile diametrelor aplicate la acea putere. Fie diametrele D şi E; şi dacă rezistenţele, vitezele luîndu-se egale, sînt precum D^n şi E^n : spaţiile în care sferele, mişcate cu viteze oarecare, vor pierde părţi ale mişcărilor proporţionale cu întregii, vor fi precum D^{3-n} şi E^{3-n}. Şi de aceea sferele omogene descriind spaţii proporţionale cu D^{3-n} şi E^{3-n}, vor păstra vitezele în acelaşi raport între ele ca la început.

COROLARUL 4. Acum dacă sferele nu sînt omogene, spaţiul descris de sfera mai densă trebuie să crească în raport cu densitatea. Căci mişcarea cu aceeaşi viteză, este mai mare în raportul densităţii, şi timpul (prin această propoziţie) va creşte precum mişcarea, şi spaţiul descris în raport cu timpul.

COROLARUL 5. Şi dacă sferele se mişcă în medii diferite; spaţiul într-un mediu, care, celelalte fiind egale, opune o rezistenţă mai mare, va trebui micşorat în raportul rezistenţei mai mari. Căci timpul (prin această propoziţie) se va micşora în raport cu creşterea rezistenţei, şi spaţiul în raport cu timpul.

LEMA II

Momentul unei «genita» este egal cu momentele diverselor laturi generatoare înmulţite incontinuu cu indicii puterilor aceloraşi laturi, şi cu coeficienţii.

Numesc «genita» orice cantitate, care se naşte, fără adunare şi scădere din oarecare laturi sau termeni, în aritmetică prin înmulţire, diviziune,

şi extragerea rădăcinii; în geometrie prin aflarea fie a celor cuprinse şi a laturilor, fie a extremelor şi mediilor proporţionale. Cantităţile de acest fel sînt produse, cîturi, rădăcini, dreptunghiuri, pătrate, cuburi, laturi pătrate, laturi cubice şi altele asemenea. Aceste cantităţi le consider aici ca nedeterminate şi nestabile, şi incontinuu crescînd sau descrescînd aproape printr-o mişcare sau flux perpetuu; şi dau numele de moment creşterilor şi descreşterilor lor momentane: astfel că creşterile se obţin ca momente aditive sau pozitive, şi descreşterile ca substractive sau negative. Dar să ne ferim de a le considera ca particule finite. Particulele finite nu sînt momente, ci însăşi cantităţile născute din momente. Trebuie să înţelegem principiile tocmai născînde ale mărimilor finite. Nici nu considerăm în această lemă mărimea momentelor, ci prima proporţie a celor născînde. Acelaşi lucru se întîmplă, dacă în locul momentelor se folosesc fie vitezele creşterilor şi descreşterilor (pe care le putem numi şi mişcări, schimbări şi fluxiuni ale cantităţilor) fie oarecare cantităţi finite ale vitezelor proporţionale cu acestea. Iar coeficientul unei laturi generatoare oarecare este cantitatea, care se naşte aplicînd genita la această latură.

Aşadar sensul lemei este, că, dacă numim a, b, c etc. momentele unor cantităţi oarecare A, B, C etc., crescătoare sau descrescătoare printr-o mişcare perpetuă sau vitezele mişcărilor proporţionale cu acestea, momentul sau schimbarea dreptunghiului născut AB va fi $aB + bA$, şi momentul cuprinsului născut ABC va fi $aBC + bAC + cAB$; şi momentele puterilor născute A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2} şi $A^{-\frac{1}{2}}$ sînt respectiv $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$ şi $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$. Şi în general, că momentul unei puteri oarecare $A^{\frac{n}{m}}$ va fi $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Astfel că momentul născutei A^2B va fi $2aAB + bA^2$; şi momentul născutei $A^3B^4C^2$ va fi $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; şi momentul născutei $\frac{A^3}{B^2}$ sau A^3B^{-2} va fi $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$; şi aşa mai departe. Lema se demonstrează în acest fel.

CAZUL 1. Un dreptunghi oarecare AB mărit printr-o mişcare perpetuă, cînd din laturile A şi B lipseau jumătăţile momentelor $\frac{1}{2}a$ şi $\frac{1}{2}b$, era $A - \frac{1}{2}a$ înmulţit cu $B - \frac{1}{2}b$, sau $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; şi imediat ce laturile A şi B au crescut cu aceleaşi jumătăţi de momente, devine $A + \frac{1}{2}a$ înmulţit cu $B + \frac{1}{2}b$ sau $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Din acest dreptunghi să se scadă primul dreptunghi, şi va rămîne excesul $aB + bA$. Prin urmare prin creşterile întregi ale laturilor a şi b se naşte creşterea $aB + bA$ a dreptunghiului. Q.E.D.

CAZUL 2. Să punem AB totdeauna egal cu G, şi momentul cuprinsului ABC sau GC (potrivit cazului 1) va fi $gC + cG$, adică (dacă în loc de G şi g scriem AB şi $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$. Şi raţionamentul este la fel pentru cuprinsul sub oricîte laturi. Q.E.D.

CAZUL 3. Să punem laturile A, B, C totdeauna egale între ele; şi momentul $aB + bA$ al lui A^2, adică a dreptunghiului AB, va fi $2aA$, iar

momentul $aBC + bAC + cAB$ al lui A^3, adică al cuprinsului lui ABC, va fi $3aA^2$. Şi prin acelaşi raţionament, momentul unei puteri oarecare A^n este naA^{n-1}. Q.E.D.

CAZUL 4. De unde cum $\frac{1}{A}$ înmulţit cu A este 1, momentul lui $\frac{1}{A}$ înmulţit cu A, împreună cu $\frac{1}{A}$ înmulţit cu a va fi momentul lui 1, adică nimic.

Prin urmare momentul lui $\frac{1}{A}$ sau al lui A^{-1} este $-\frac{a}{A^2}$. Şi în general cum $\frac{1}{A^n}$ înmulţit cu A^n este 1, momentul lui $\frac{1}{A^n}$ înmulţit cu A^n împreună cu $\frac{1}{A^n}$ înmulţit cu naA^{n-1} va fi nimic. Şi de aceea momentul lui $\frac{1}{A^n}$ sau A^{-n} va fi $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q.E.D.

CAZUL 5. Şi cum $A^{\frac{1}{2}}$ înmulţit cu $A^{\frac{1}{2}}$ este A, momentul lui $A^{\frac{1}{2}}$ înmulţit cu $2A^{\frac{1}{2}}$ va fi a, potrivit cazului 3: şi deci momentul lui $A^{\frac{1}{2}}$ va fi $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ sau $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Şi în general dacă punem $A^{\frac{m}{n}}$ egal cu B, va fi A^m egal cu B^n, şi astfel maA^{m-1} egal cu nbB^{n-1}, şi maA^{-1} egal cu nbB^{-1} sau $nbA^{-\frac{m}{n}}$ şi deci $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ egal cu b, adică, egal cu momentul lui $A^{\frac{m}{n}}$. Q.E.D.

CAZUL 6. Aşadar momentul unei născute oarecare $A^m B^n$ este momentul lui A^m înmulţit cu B^n, împreună cu momentul lui B^n înmulţit cu A^m, adică $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; şi aceasta fie că, indicii m şi n sînt numere întregi sau fracţionare, fie că sînt pozitive sau negative. Şi la fel este raţionamentul pentru cele cuprinse de puteri mai înalte. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici în cazul mărimilor continuu proporţionale, dacă un termen este dat, momentele termenilor rămaşi vor fi precum aceiaşi termeni înmulţiţi prin numărul intervalelor între ele şi termenul dat. Fie A, B, C, D, E, F continuu proporţionale; şi dacă se dă termenul C, momentele termenilor rămaşi vor fi între ele precum $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$.

COROLARUL 2. Şi dacă în patru proporţionale se dau cei doi mezi, momentele extremilor vor fi precum însăşi extremele. Acelaşi lucru trebuie înţeles şi despre laturile unui dreptunghi oarecare dat.

COROLARUL 3. Şi dacă se dă suma sau diferenţa a două pătrate, momentele laturilor vor fi în raport invers cu laturile.

SCOLIE

Într-o scrisoare din 10 decembrie 1672 către compatriotul nostru d-l J. Collin, descriind o metodă a tangentelor pe care o socoteam identică cu metoda lui Slusius pe atunci încă nepublicată; am adăugat: *Acesta este un caz particular sau mai bine zis un corolar al unei metode generale, care se extinde fără nici o greutate de calcul, nu numai asupra ducerii tangentelor la curbe oarecare fie geometrice, fie mecanice, fie privind într-un mod oarecare linii drepte sau alte curbe, ci şi la rezolvarea altor genuri mai compli-*

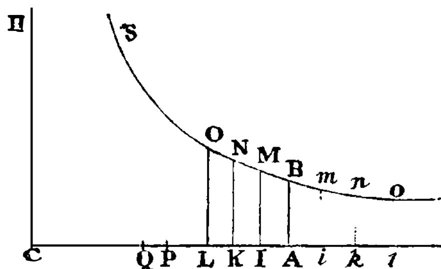
cate de probleme asupra curburilor, ariilor, lungimilor, centrelor de greutate ale curbelor etc., nici nu se mărgineşte (ca metoda lui Hudden asupra maximelor şi minimelor) numai la acele ecuaţii care sînt libere de cantităţi iraţionale. Această metodă am întreţesut-o cu cealaltă în care institui explicarea ecuaţiilor reducîndu-le la serii infinite.

Pînă aici scrisoarea. Şi aceste cuvinte din urmă se referă la tratatul pe care l-am scris în anul 1671 asupra acestor lucruri. Temeiul acestei metode generale este cuprins în lema precedentă.

PROPOZIŢIA VIII. TEOREMA VI

Dacă un corp într-un mediu uniform, acţionat în mod uniform de gravitate, se urcă sau se coboară pe o dreaptă, şi spaţiul întreg descris se împarte în părţi egale, şi la începutul diverselor părţi (adunînd rezistenţa mediului la forţa gravităţii, cînd corpul se urcă sau scăzînd-o cînd corpul se coboară) se caută forţele absolute; zic că forţele absolute sînt în progresie geometrică.

Căci să reprezentăm forţa gravităţii prin linia dată AC, rezistenţa prin linia nedefinită AK, forţa absolută în căderea corpului prin diferenţa KC, viteza corpului prin linia AP, care să fie o medie proporţională între AK şi AC, şi deci în raportul rădăcinii pătrate a rezistenţei: creşterea rezistenţei efectuată într-un interval dat de timp prin linioara KL, şi creşterea corespunzătoare a vitezei prin linioara PQ; şi din centrul C cu asimptotele dreptunghiulare CA, CH să descriem o hiperbolă oarecare BNS, întîlnind dreptele ridicate AB, KN, LO în B, N, O. Deoarece AK este precum AP^2, momentul ei KL va fi precum momentul $2APQ$ al celuilalt adică, precum AP înmulţit cu KC; căci creşterea PQ a vitezei (potrivit legii II a mişcării) este proporţională cu forţa generatoare KC.



Să înmulţim raportul lui KL cu raportul lui KN, şi va fi dreptunghiul $KL \times KN$ precum $AP \times KC \times KN$; adică, dreptunghiul $KC \times KN$ fiind dat, precum AP. Dar raportul ultim al ariei hiperbolice $KNOL$ către dreptunghiul $KL \times KN$, cînd punctele K şi L coincid, este un raport de egalitate. Prin urmare aria hiperbolică disparentă este ca AP. Aşadar aria întreagă hiperbolică $ABOL$ se compune din particulele $KNOL$ totdeauna proporţionale cu viteza AP şi de aceea este proporţională cu spaţiul descris cu această viteză. Căci să împărţim aria în părţi egale $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$ etc., şi forţele absolute AC, IC, KC, LC etc., vor fi în progresie geometrică. Q.E.D. Şi printr-un raţionament analog, în urcarea corpului, luînd de partea contrară a punctului A, ariile egale $ABmi$, $imnk$, $knol$ etc., vom constata că forţele absolute AC, iC, kC, lC etc., sînt continuu proporţionale. Şi astfel dacă toate spaţiile în urcare şi coborîre se iau egale; toate forţele absolute lC, kC, iC, AC, IC, KC, LC etc., vor fi continuu proporţionale.

COROLARUL 1. Deci dacă spaţiul descris se reprezintă prin aria hiperbolică *ABNK*, se pot reprezenta forţa gravităţii, viteza corpului şi rezistenţa mediului respectiv prin liniile *AC*, *AP* şi *AK*; şi viceversa.

COROLARUL 2. Şi viteza maximă, pe care corpul o poate cîştiga cîndva coborînd la infinit, se exprimă prin linia *AC*.

COROLARUL 3. Aşadar dacă la o viteză oarecare dată se cunoaşte rezistenţa mediului, se va afla viteza maximă, luînd-o la acea viteză dată în raportul rădăcinii pătrate a forţei gravităţii către acea rezistenţă cunoscută a mediului.

PROPOZIŢIA IX. TEOREMA VII

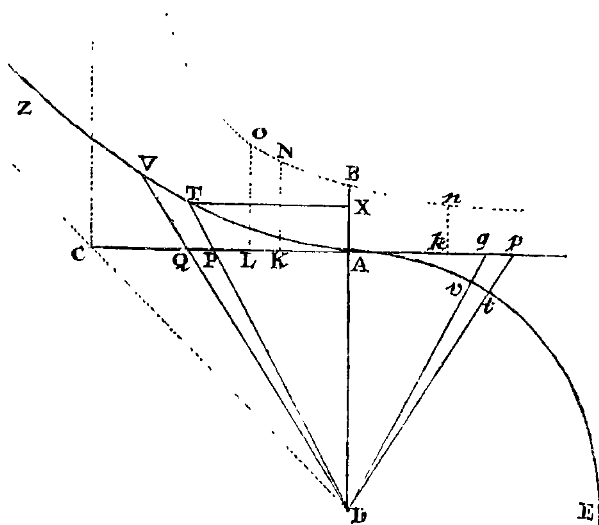
Presupunînd cele demonstrate, zic că, dacă luăm tangentele unghiurilor sectorului circular şi ale sectorului hiperbolic proporţionale cu vitezele, raza avînd o mărime justă, orice timp de ascensiune la locul cel mai de sus va fi ca sectorul cercului, şi orice timp de coborîre din locul mai înalt precum sectorul hiperbolei.

Să ducem pe dreapta *AC*, prin care reprezentăm forţa gravităţii, *AD* perpendiculară şi egală. Din centrul *D* cu semidiametrul *AD* să descriem atît cadranul *AtE* al cercului, cît şi hiperbola dreptunghiulară *AVZ* avînd axa *AX*, vîrful principal *A*, şi asimptota *DC*. Să ducem *Dp*, *DP*, şi va fi sectorul circular hiperbolic *AtD* ca orice timp de urcare la locul cel mai înalt; şi sectorul hiperbolic *ATD* ca orice timp de coborîre de la locul cel mai înalt: dacă numai tangentele *Ap*, *AP* sînt ca vitezele.

CAZUL 1. Căci să ducem *Dvq* tăind din sectorul *ADt* şi triunghiul *ADp* momente, sau particule cît se poate de mici descrise deodată *tDV* şi *qDp*. Cum acele particule, din cauza unghiului comun *D*, sînt precum pătratul laturilor, părticica *tDv* va fi precum $\frac{qDp\times tD^2}{pD^2}$, adică, din cauza că *tD* este

dat, precum $\frac{qDp}{pD^2}$. Dar pD^2 este AD^2+Ap^2, adică, $AD^2+AD\times Ak$, sau $AD\times Ck$; şi qDp este $\frac{1}{2}AD\times pq$. Prin urmare părticica tDv a sectorului este ca $\frac{pq}{Ck}$, adică, proporţională cu creşterea minimă pq a vitezei, şi invers proporţională cu forţa Ck ce micşorează viteza; şi deci precum intervalul de timp corespunzător micşorării vitezei. Şi compunînd, suma tuturor particulelor tDv în sectorul ADt, este ca suma intervalelor de timp corespunzătoare fiecăruia din intervalele pierdute pq ale vitezei descrescătoare Ap, pînă ce viteza micşorată pînă la zero va dispare; adică, întreg sectorul ADt este precum întreg timpul de ascensiune la locul cel mai înalt. Q.E.D.

CAZUL 2. Să ducem DQV tăind atît din sectorul DAV, cît şi din triunghiul DAQ particulele minime TDV şi PDQ; şi aceste particule vor fi precum



DT^2 către DP^2, adică (dacă TX şi AP sînt paralele) precum DX^2 către DA^2 sau TX^2 către AP^2, şi separînd precum DX^2-TX^2 către DA^2-AP^2. Dar din natura hiperbolei DX^2-TX^2 este AD^2, şi prin ipoteză AP^2 este $AD\times AK$. Prin urmare particulele sînt între ele precum AD^2 către $AD^2-AD\times AK$; adică, precum AD către $AD-AK$, sau AC către CK: şi deci părticica sectorului TDV este $\frac{PDQ\times AC}{CK}$; şi de aceea fiind date AC şi AD precum PQ/CK, adică, proporţională cu creşterea vitezei, şi invers proporţională cu forţa ce produce creşterea; şi deci ca intervalul de timp ce corespunde creşterii. Şi compunînd, suma intervalelor de timp, în care se nasc toate intervalele PQ ale vitezei AP, devine precum suma părticelelor sectorului ATD; adică timpul întreg precum sectorul întreg. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă *AB* este egală cu a patra parte a lui *AC*, spaţiul pe care-l descrie un corp în cădere într-un timp oarecare, va fi către spaţiul, pe care corpul îl poate descrie cu viteza maximă *AC*, progresînd în acelaşi timp în mod uniform, precum aria *ABNK*, prin care se exprimă spaţiul descris în cădere, către aria *ATD*, prin care se exprimă timpul. Căci fiindcă *AC* este către *AP* precum *AP* către *AK*, va fi (potrivit corolarului 1, lema II, a acestei Cărţi) *LK* către *PQ* precum 2*AK* către *AP*, adică, precum 2*AP* către *AC*, şi de aici *LK* către $\frac{1}{2}$ *PQ* precum *AP* către $\frac{1}{4}$ *AC* sau *AB*; şi *KN* către *AC* sau *AD* este precum *AB* către *CK*; aşadar prin egalitate *LKNO* către *DPQ* precum *AP* către *CK*. Dar era *DPQ* către *DTV* precum *CK* către *AC*. Aşadar iarăşi prin egalitate *LKNO* către *DTV* precum *AP* către *AC*; adică, precum viteza corpului ce cade către viteza maximă pe care o poate cîştiga corpul în cădere. Prin urmare cum momentele *LKNO* şi *DTV* ale ariilor *ABNK* şi *ATD* sînt precum vitezele, toate părţile ariilor născute în acelaşi timp vor fi precum spaţiile descrise în acelaşi timp, şi deci ariile întregi născute de la început *ABNK* şi *ATD* precum spaţiile întregi descrise de la începutul căderii. Q.E.D.

COROLARUL 2. Acelaşi lucru rezultă şi în privinţa spaţiului descris în ascensiune. Anume că întreg spaţiul este către spaţiul descris cu viteza uniformă *AC* şi, în acelaşi timp, precum aria *ABnk* către sectorul *ADt*.

COROLARUL 3. Viteza corpului ce cade în timpul *ATD* este către viteza, pe care o va cîştiga în acelaşi timp într-un spaţiu fără rezistenţă, precum triunghiul *APD* către sectorul hiperbolic *ATD*. Căci viteza într-un mediu fără rezistenţă va fi ca timpul *ATD*, şi într-un mediu rezistent este ca *AP*, adică, precum triunghiul *APD*. Şi vitezele la începutul coborîrii sînt egale între ele, la fel ca ariile *ATD*, *APD*.

COROLARUL 4. Din aceeaşi cauză viteza de ascensiune este către viteza, cu care corpul în acelaşi timp într-un spaţiu fără rezistenţă îşi va putea pierde întreaga sa mişcare de ascensiune, precum triunghiul *ApD* către sectorul circular *AtD*; sau precum dreapta *Ap* către arcul *At*.

COROLARUL 5. Prin urmare timpul, în care un corp căzînd într-un mediu rezistent cîştigă viteza *AP*, este către timpul, în care va putea cîştiga viteza maximă *AC* căzînd într-un mediu fără rezistenţă, precum sectorul *ADT* către triunghiul *ADC*: şi timpul, în care poate pierde viteza *Ap* urcîndu-se într-un mediu rezistent, către timpul în care poate pierde aceeaşi viteză urcîndu-se într-un spaţiu fără rezistenţă, precum arcul *At* către tangenta sa *Ap*.

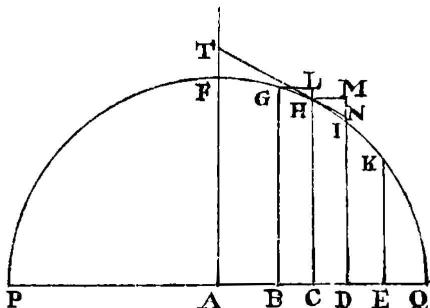
COROLARUL 6. Prin urmare din timpul dat se dă spaţiul descris în ascensiune sau în coborîre. Căci viteza maximă a unui corp ce se coboară în infinit este dată (potrivit corolarului 2 şi 3, teorema VI, Cartea a II-a) şi deci este dat timpul în care un corp poate cîştiga acea viteză căzînd într-un spaţiu fără rezistenţă. Şi luînd sectorul *ADT* sau *ADt* către triunghiul *ADC* în raportul timpului dat către timpul tocmai aflat; va fi dată atît viteza *AP* sau *Ap*, cît şi aria *ABNK* sau *ABnk*, care este către sectorul *ADT* sau *ADt* precum spaţiul căutat către spaţiul, pe care-l poate descrie în mod uniform, într-un timp dat, cu viteza maximă aflată chiar acum.

COROLARUL 7. Şi procedînd invers, din spaţiul dat de urcare sau coborîre *ABnk* sau *ABNK*, se va afla timpul *ADt* sau *ADT*.

PROPOZIŢIA X. PROBLEMA III

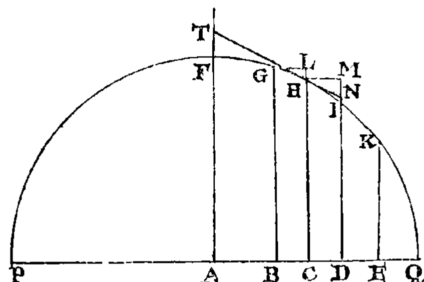
Să presupunem că forţa gravităţii tinde direct către planul orizontului, şi fie rezistenţa precum densitatea mediului şi pătratul vitezei luate împreună; se caută atît densitatea mediului în diversele locuri, care face ca corpul să se mişte pe o linie curbă oarecare dată, cît şi viteza corpului şi rezistenţa mediului în diversele locuri.

Fie PQ acel plan perpendicular pe planul figurii; $PFHQ$ o linie curbă ce întîlneşte acest plan în punctele P şi Q; G, H, I, K patru locuri ale corpului înaintînd pe această curbă de la F spre Q: şi GB, HC, ID, KE patru ordonate paralele coborîte din aceste puncte pe orizont, şi întîlnind linia orizontală PQ în punctele B, C, D, E; şi fie distanţele între ordonate BC, CD, DE egale între ele. Din punctele G şi H să ducem dreptele GL, HN atingînd curba în G şi H, şi întîlnind ordonatele CH, DI prelungite în sus în L şi N, să completăm paralelogramul $HCDM$. Şi timpurile în care corpul descrie arcul GH, HI, vor fi precum rădăcina pătrată a înălţimilor LH, NI, pe care corpul le poate descrie în acele timpuri, căzînd de la tangente; şi vitezele vor fi proporţionale cu lungimile descrise GH, HI şi în raport invers cu timpurile. Să reprezentăm timpurile prin T şi t, şi vitezele prin $\frac{GH}{T}$ şi $\frac{HI}{t}$; şi să reprezentăm descreşterea vitezei produsă în timpul t prin $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Această descreştere provine din rezistenţa ce întîrzie corpul şi din gravitatea acceleratoare a corpului. Gravitatea, în corpul ce cade şi descrie în cădere spaţiul NI, produce o viteză, cu care ar putea descrie dublul acelui spaţiu NI în acelaşi timp, după cum a demonstrat-o Galileu; adică viteza $\frac{2\,NI}{t}$; dar în corpul ce descrie arcul HI, va mări acel arc numai prin lungimea $HI - HN$ sau $\frac{MI \times NI}{HI}$; şi deci produce numai viteza $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Să adunăm această viteză la descreşterea menţionată, şi vom avea descreşterea vitezei născută numai din rezistenţă, anume $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. De aceea fiindcă greutatea în acelaşi timp în corpul ce cade generează viteza $\frac{2NI}{t}$, rezistenţa va fi către gravitate precum $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ către $\frac{2NI}{t}$, sau precum $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ către $2NI$.



Apoi în locul absciselor CB, CD, CE, să scriem $-o$, o, $2o$. În locul ordonatei CH să scriem P, şi în locul lui MI să scriem o serie oarecare $Qo + Roo + So^3 +$ etc. Şi toţi termenii seriei după întîiul, anume $Roo +$

So^3 + etc., vor fi NI, și ordonatele DI, EK și BG vor fi respectiv $P - Qo - Roo - So^3$ — etc., $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3$ — etc., și $P + Qo - Roo + So^3$ — etc. Și ridicînd la pătrat diferențele ordonatelor $BG - CH$ și $CH - DI$, și la pătratele astfel obținute adunînd pătratele lui BC, CD însăși, vom obține pătratele $oo + QQoo - 2QRo^3 +$etc. și $oo + QQoo + 2QRo^3 +$etc., ale arcelor GH, HI. Ale căror rădăcini $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, și $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sînt arcele GH și HI. Afară de aceasta, dacă din ordonata CH se scade semisuma ordonatelor BG și DI, și din ordonata DI se scade semisuma ordonatelor CH și EK, vor rămîne săgețile Roo și $Roo + 3So^3$ ale arcelor GI și HK. Și acestea sînt proporționale cu linioarele LH și NI, și deci proporționale cu pătratul timpurilor infinit de mici T și t: și deci raportul $\frac{t}{T}$ este $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$ sau $\frac{R + 3/2\,So}{R}$; și $\frac{t \times GT}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituind în locul lui $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI și NI valorile aflate, devine $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Și cum $2NI$ devine $2Roo$, rezistența va fi către gravitate precum $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ către $2Roo$, adică, precum $3S\sqrt{1+QQ}$ către $4RR$.



Și viteza este aceea, cu care corpul pornind dintr-un loc oarecare H, după tangenta HN, se poate apoi mișca în vid, pe o parabolă avînd diametrul HC și parametrul $\frac{HN^2}{NI}$ sau $\frac{1+QQ}{R}$.

Și rezistența este precum densitatea mediului și pătratul vitezei luate împreună, și de aceea densitatea mediului este proporțională cu rezistența și invers proporțională cu pătratul vitezei, adică, proporțională cu $3S\sqrt{\frac{1+QQ}{4RR}}$ și invers proporțională cu $\frac{1+QQ}{R}$, adică, precum $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Q.E.I.

COROLARUL 1. Dacă prelungim tangenta HN de ambele părți pînă ce întîlnește o ordonată oarecare AF în T: $\frac{HT}{AC}$ va fi egal cu $\sqrt{1+QQ}$, și deci în cele de mai sus se poate scrie în loc de $\sqrt{1+QQ}$. Din care cauză rezistența va fi către greutate precum $3S \times HT$ către $4RR \times AC$, viteza va fi precum $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, și densitatea mediului va fi precum $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

COROLARUL 2. Și de aici, dacă definim, după obicei, linia curbă $PFHQ$ prin relația între baza sau abscisa AC și ordonata CH; și dezvoltăm valoarea ordonatei într-o serie convergentă; problema se rezolvă ușor cu ajutorul primilor termeni ai seriei, ca în exemplele următoare.

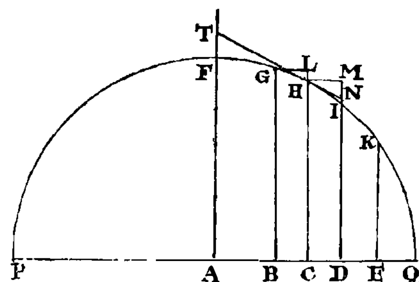
EXEMPLUL 1. Fie linia $PFHQ$ semicercul descris pe diametrul PQ și să se afle densitatea mediului care face ca proiectilul să se miște pe această linie.

Să bisectăm diametrul PQ în A; să numim AQ, n; AC, a; GH, e; şi CD, o, şi va fi DI^2 sau $AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo$, sau $ee - 2ao - oo$, şi extrăgînd rădăcina după metoda noastră, va fi $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ — etc. Aici să scriem nn în loc de $ee + aa$, şi vom avea $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — etc.

Într-o astfel de serie deosebesc termenii succesivi în felul următor. Numesc termenul întîi pe acela, în care cantitatea infinit de mică a nu intervine; al doilea, în care acea cantitate are dimensiunea întîi; al treilea, în care intervine la dimensiunea a doua; al patrulea, în care este de dimensiunea a treia şi aşa pînă la infinit. Şi primul termen, care aici este e, va însemna totdeauna lungimea ordonatei CH ridicată la începutul cantităţii nedefinite o. Al doilea termen, care aici este $\frac{ao}{e}$, va însemna diferenţa între CH şi DN, adică linioara MN, care se taie completînd paralelogramul $HCDM$, şi de aceea totdeauna determină poziţia tangentei HN; ca, în acest caz, luînd MN către HM precum $\frac{ao}{e}$ către o, sau a către e. Termenul al treilea, care aici este $\frac{nnoo}{2e^3}$, va însemna linioara IN, care este situată între tangentă şi curbă, şi deci determină unghiul de contact IHN sau curbura pe care o are linia curbă în H. Dacă linioara IN are o mărime finită, se va exprima prin termenul al treilea împreună cu cele ce urmează la infinit. Dar dacă acea linioară se micşorează la infinit, termenii următori vor deveni infinit de mici faţă de-al treilea, şi deci se pot neglija. Termenul al patrulea determină variaţia curburei, al cincilea variaţia variaţiei, şi aşa mai departe. De unde imediat apare folosul ce nu este de dispreţuit al acestor serii în rezolvarea problemelor, care depind de tangente şi de curbura curbelor.

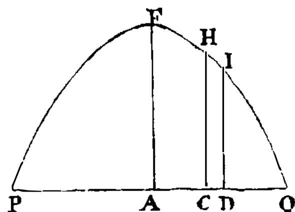
Căci să comparăm seria $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ etc. cu seria $P - Qo - Roo - So^3$ — etc. şi apoi în loc de P, Q, R, şi S să scriem e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, şi $\frac{ann}{2e^5}$, şi în loc de $\sqrt{1+QQ}$ să scriem $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ sau $\frac{n}{e}$, şi vom obţine densitatea mediului anume $\frac{a}{ne}$, adică (n fiind dat) $\frac{a}{e}$, sau $\frac{AC}{CH}$, adică precum lungimea HT a tangentei, care se termină pe semidiametrul AF perpendicular pe PQ: şi rezistenţa va fi către gravitate precum $3a$ către $2n$, adică, precum $3AC$ către diametrul PQ al cercului: iar viteza va fi precum $\sqrt{CH}$. De aceea dacă corpul pleacă din locul F cu o viteză potrivită de-a lungul unei linii paralele cu PQ, şi densitatea mediului în diversele locuri H este ca lungimea tangentei HT, şi rezistenţa într-un loc oarecare H de asemenea va fi către forţa gravităţii precum $3AC$ către PQ, corpul va descrie cadranul FHQ al cercului. Q.E.I.

Dar dacă același corp pleacă din locul *P* de-a lungul unei linii perpendiculare pe *PQ*, și începe să se miște pe arcul semicercului *PFQ*, trebuie să luăm pe *AC* sau *a* de părți contrarii ale centrului *A*, și de aceea trebuie să-i schimbăm semnul și să scriem $-a$ în loc de $+a$. De unde vom obține pentru densitatea mediului $-\frac{a}{e}$. Dar natura nu admite o densitate negativă, adică, o densitate care să accelereze mișcarea corpurilor: și de aceea în mod natural nu se poate, ca corpul urcîndu-se din *P* să descrie cadranul *PF* al cercului. În acest scop ar trebui ca corpul să fie accelerat de mediul împingător, iar nu împiedicat de cel rezistent.



EXEMPLUL 2. Fie linia *PFQ* o parabolă, avînd axa *AF* perpendiculară pe orizontul *PQ*, și să se afle densitatea mediului, care va face ca proiectilul să se miște pe ea.

Din natura parabolei, dreptunghiul *PDQ* este egal cu dreptunghiul format de ordonata *DI* și o dreaptă oarecare dată: adică, dacă acele drepte sînt *b*; *PC*, *a*; *PQ*, *c*; *CH*, *e*; și *CD*, *o*; dreptunghiul $a+o$ înmulțit cu $c-a-o$ sau $ac-aa-2ao+co-oo$ este egal cu dreptunghiul *b* înmulțit cu *DI*, și deci *DI* este egal cu $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Să scriem acum termenul al doilea $\frac{c-2a}{b}o$ al acestei serii în loc de *Qo*, și termenul al treilea $\frac{oo}{b}$ în loc de *Roo*. Cum însă nu mai sînt alți termeni, coeficientul celui de al patrulea va trebui să dispară, și de aceea cantitatea $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cu care este proporțională densitatea mediului, va fi zero. Prin urmare într-un mediu de densitate zero proiectilul se va mișca pe o parabolă, după cum a demonstrat odinioară G a l i l e u. Q.E.I.

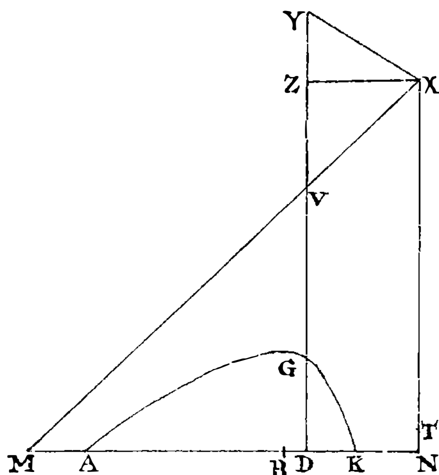


EXEMPLUL 3. Fie linia *AGK* o hiperbolă, avînd asimptotele *NX* perpendiculară pe planul orizontal *AK*; și să se afle densitatea mediului, care face ca proiectilul să se miște pe această linie.

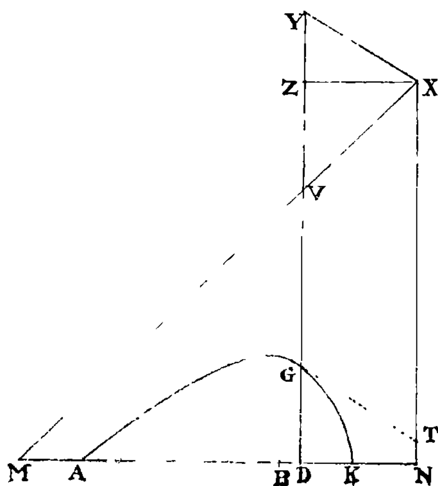
Fie *MX* cealaltă asimptotă, întîlnind în *V* ordonata *DG* prelungită; și din natura hiperbolei, dreptunghiul *XV* înmulțit cu *VG* va fi dat. Se dă de asemenea raportul *DN* către *VX*, și deci este dat și dreptunghiul $DN \times VG$. Fie acela *bb*: și completînd paralelogramul *DNXZ*; să numim *BN*, *a*; *BD*, *o*; *NX*, *c*; și să presupunem că raportul dat *VZ* către *ZX* sau *DN* este $\frac{m}{n}$. Și *DN* va fi egal cu $a-o$, *VG* egal cu $\frac{bb}{a-o}$, *VZ* egal cu $\frac{m}{n}(a-o)$ și *GD* sau $NX-VZ-VG$ egal cu $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Să dezvoltăm termenul $\frac{bb}{a-o}$ în seria convergentă $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ etc. și *GD* va fi egal cu $c-\frac{m}{n}a+\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ etc.

Termenul al doilea al acestei serii $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ trebuie folosit în loc de Qo, al treilea cu semnul schimbat $\frac{bb}{a^3}o^2$ în loc de Ro^2, şi al patrulea de asemenea cu semn schimbat $\frac{bb}{a^4}o^3$ în loc de So^3, şi coeficienţii lor $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ şi $\frac{bb}{a^4}$ trebuie scrişi după regula de mai sus în loc de Q, R şi S. Făcînd acestea densitatea mediului se obţine ca $\dfrac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}}}$

sau $\dfrac{1}{\sqrt{aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}}}$ adică, dacă în VZ luăm VY egal cu VG, precum $\frac{1}{XY}$. Căci aa şi $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sînt pătratele lui XZ şi ZY. Dar aflăm că raportul rezistenţei către gravitate este $3XY$ către $2YG$, şi viteza este aceea, cu care corpul s-ar mişca pe o parabolă avînd vîrful G, diametrul DG, şi parametrul $\frac{XY^2}{VG}$. Să presupunem deci că densităţile mediilor în diversele locuri G sînt în raport invers cu distanţele XY, şi că rezistenţa într-un loc oarecare G se raportă către gravitate precum $3XY$ către $2YG$; şi corpul din locul A cu o viteză dată, va descrie hiperbola AGK. Q.E.I.



EXEMPLUL 4. Să presupunem în mod nedefinit, că linia AGK este o hiperbolă, cu centrul X, asimptotele MX, NX, descrisă în aşa fel, că construind dreptunghiul $XZDN$ a cărui latură ZD taie hiperbola în G şi asimptota ei în V, VG să fie în raport invers cu o putere oarecare DN^n a lui RX sau DN, a cărui indice este numărul n: şi să se afle densitatea mediului, în care un proiectil se mişcă pe această curbă. În loc de BN, BD, NX să scriem respectiv A, O, C, şi fie VZ către XZ sau DN precum d către e şi VG egal cu $\frac{bb}{DN^n}$, şi DN va fi egal cu $A-O$, $VG = \frac{bb}{(A-O)^n}$, $VZ = \frac{d}{e}(A-O)$ şi GD sau $NX - VZ - VG$ egal cu $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{(A-O)^n}$.



Să dezvoltăm termenul $\frac{bb}{(A-O)^n}$ în seria infinită $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ etc, și GD va fi egală cu $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ etc. Termenul al doilea $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ al acestei serii trebuie folosit în loc de Qo, al treilea $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ în loc de Roo, al patrulea $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ în loc de So^3. Și de aici densitatea mediului $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ într-un loc oarecare G, va fi $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{dnbb}{eA^n} + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$ și deci dacă în VZ luăm VY egal cu $n \times VG$, densitatea este în raport invers cu XY. Căci A^2 și $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ sînt pătratele lui XZ și ZY. Dar rezistența în același loc G este către gravitate precum $3S$ înmulțit cu $\frac{XY}{A}$ către $4RR$, adică, precum XY către $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Și viteza tot acolo este aceeași, cu care corpul aruncat s-ar mișca pe o parabolă, avînd vîrful G, diametrul GD și parametrul $\frac{1+QQ}{R}$ sau $\frac{2XY^2}{(nn+n)\times VG}$. Q.E.I

SCOLIE

În același fel în care densitatea mediului se obține ca $\frac{S\times AC}{R\times HT}$ în primul corolar, dacă rezistența se ia ca o putere oarecare V^n a vitezei V, se va afla densitatea mediului ca $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$. Și de aceea, dacă se poate afla o curbă în așa fel ca raportul lui $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ către $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1}$, sau $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ către $(1+QQ)^{n-1}$ să fie dat: corpul se va mișca pe această curbă într-un mediu uniform, cu o rezistență care este precum puterea V^n a vitezei. Dar să revenim la curbe mai simple.

Deoarece mișcare nu poate avea loc pe o parabolă decît într-un mediu fără rezistență, pe cînd pe hiperbola descrisă aici este produsă de o rezistență perpetuă; este evident că linia, pe care o descrie un proiectil într-un mediu uniform rezistent, se apropie mai mult de aceste hiperbole decît de parabole. Acea linie este de sigur de genul hiperbolei, dar care în apropierea vîrfului este mai îndepărtată de asimptote; în părțile mai îndepărtate de vîrf se apropie mai mult de ele decît hiperbolele pe care le-am descris aici. Totuși

diferenţa între acestea şi aceea nu este aşa de mare, încît în locul ei în practică să nu poată fi comod întrebuinţată aceasta în locul aceleia. Şi acestea poate sînt mai utile decît o hiperbolă mai precisă şi în acelaşi timp mai complicată. Apoi acestea se pot întrebuinţa în felul următor.

Să completăm paralelogramul *XYGT*, şi dreapta *GT* să atingă hiperbola în *G*, şi deci densitatea mediului în *G* este invers proporţională cu tangenta *GT*, şi viteza tot acolo precum $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, iar rezistenţa către forţa gravităţii precum *GT* către $\frac{2nn+2n}{n+2}$ înmulţit cu *GV*.

Prin urmare dacă un corp aruncat din locul *A* după dreapta *AH* descrie hiperbola *AGK*, şi *AH* prelungită întîlneşte asimptota *NX* în *H*, şi *AI* dusă paralelă cu ea întîlneşte asimptota *MX* în *I*: densitatea mediului în *A* va fi în raport invers cu *AH*, şi viteza corpului cu $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, şi rezistenţa în acelaşi loc către gravitate precum *AH* către $\frac{2nn+2n}{n+2}$ înmulţit cu *AI*. De unde provin următoarele regule.

REGULA 1. Dacă atît densitatea mediului în *A*, cît şi viteza cu care se aruncă corpul rămîn aceleaşi, şi unghiul *NAH* variază; vor rămîne aceleaşi lungimile *AH*, *AI*, *HX*. Şi deci dacă acele lungimi se determină într-un caz oarecare, după aceea se poate afla hiperbola cu uşurinţă dintr-un unghi oarecare dat *NAH*.

REGULA 2. Dacă se păstrează atît unghiul *NAH*, cît şi densitatea mediului în *A*, şi viteza cu care este aruncat corpul variază, va rămîne aceeaşi lungimea *AH*, şi va varia *AI* invers proporţional cu pătratul vitezei.

REGULA 3. Dacă atît unghiul *NAH*, cît şi viteza corpului în *A*, şi greutatea acceleratoare rămîn aceleaşi, şi proporţia rezistenţei în *A* către gravitatea motoare creşte într-un raport oarecare; proporţia *AH* către *AI* va creşte în acelaşi raport, rămînînd acelaşi parametru al parabolei menţionate, şi

lungimea $\frac{AH^2}{AI}$ proporţională cu ea: şi de aceea AH va scădea în acelaşi raport şi AI se va micşora proporţional cu pătratul acelui raport. Dar proporţia rezistenţei către greutate va creşte, cînd sau greutatea specifică devine mai mică, mărimea rămînînd egală sau densitatea mediului devine mai mare, sau rezistenţa, micşorîndu-se mărimea, scade după un raport mai mic decît greutatea.

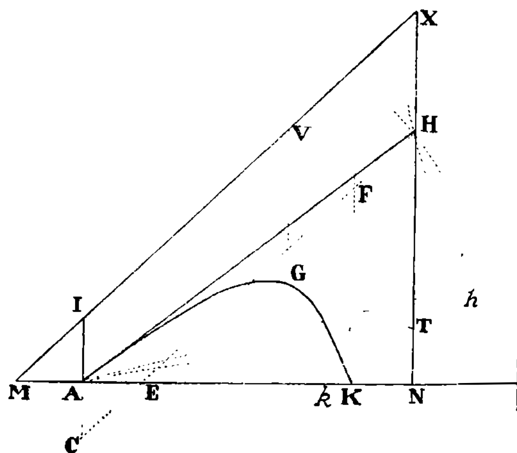
REGULA 4. Deoarece densitatea mediului în vecinătatea vîrfului hiperbolei este mai mare ca în locul A; pentru a avea densitatea medie, trebuie să aflăm raportul celei mai mici dintre tangente GT către tangenta AH, şi să mărim densitatea în A într-un raport ceva mai mare decît al semisumei acestor tangente către cea mai mică dintre tangente GT.

REGULA 5. Dacă se dau lungimile AH, AI, şi trebuie descrisă figura AGK: să prelungim pe HN pînă în X, ca să fie HX către AI precum $n+1$ către 1, şi din centrul X şi cu asimptotele MX, NX prin punctul A să descriem o hiperbolă astfel, ca să fie AI către o linie oarecare VG precum XV^n către XI^n.

REGULA 6. Cu cît este mai mare numărul n, cu atît mai precise sînt aceste hiperbole în urcarea corpului din A, şi mai puţin precise în coborîrea lui din K; şi invers. Hiperbola conică ocupă un loc mijlociu, şi este mai simplă decît celelalte. Aşadar dacă hiperbola este de acest gen, şi se caută punctul K, în care corpul aruncat cade pe o dreaptă oarecare AN ce trece prin punctul A: dreapta AN prelungită să întîlnească asimptotele MX, NX în M şi N, şi să se ia NK egală cu AM.

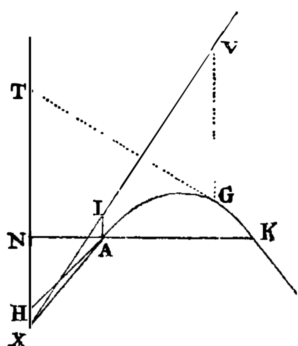
REGULA 7. Şi de aici apare evidentă o metodă expeditivă de a determina această hiperbolă din fenomene. Să aruncăm două corpuri asemenea şi egale, cu aceeaşi viteză, sub unghiuri diferite HAK, hAk, şi să cadă pe planul orizontului în K şi k; şi să notăm proporţia lui AK către Ak. Fie aceasta d către e. Atunci ridicăm o perpendiculară AI de o lungime oarecare; să

luăm o lungime oarecare AH sau Ah, şi apoi să luăm în mod grafic lungimile AK, Ak, potrivit regulei 6. Dacă raportul AK către Ak este acelaşi cu raportul lui d către e, lungimea AH a fost luată corect. Dacă este mai mică, să luăm pe dreapta infinită SM lungimea SM egală cu cea luată AH, şi să ridicăm perpendiculara MN egală cu diferenţa $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ a rapoartelor înmulţită cu o dreaptă oarecare dată. În mod analog din mai multe lungimi date AH se pot afla mai multe puncte N, şi prin toate se poate duce o linie curbă regulată $NNXN$, tăind dreapta $SMMM$ în X. În sfîrşit să luăm AH egală cu abscisa SX, şi apoi să aflăm din nou lungimea AK; şi lungimile, care sînt către lungimea dată AI şi aceasta din urmă AH, precum lungimea AK cunoscută prin experienţă către lungimea AK aflată în urmă, AI şi AH vor fi lungimile adevărate, care trebuiau aflate. Dar acestea fiind date va fi dată şi rezistenţa mediului în locul A, care este către forţa gravităţii precum AH către $\frac{4}{3}$ AI. Dar densitatea mediului trebuie mărită prin regula 4 şi rezistenţa tocmai aflată, dacă se măreşte în acelaşi raport, va fi mai precisă.



REGULA 8. Lungimile AH, HX fiind aflate; dacă se caută poziţia dreptei AH după care proiectilul, emis, cu viteza dată, cade într-un punct oarecare K: în punctele A şi K să ridicăm dreptele AC, KF perpendiculare pe orizont, dintre care AC este îndreptată în jos, şi este egală cu AI sau $\frac{1}{2}HX$. Cu asimptotele AK, KF să descriem o hiperbolă, a cărei conjugată să treacă prin punctul C, şi din centrul A şi cu intervalul AH să descriem un cerc tăind hiperbola în punctul H; şi proiectilul aruncat în direcţia dreptei AH va cădea în punctul K. Q.E.I. Căci punctul H, dată fiind lungimea AH, va fi situat undeva pe cercul descris. Să ducem CH întîlnind pe AK şi KF, pe aceea în E, pe aceasta în F; şi din cauza că CH, MX sînt paralele şi AC, AI sînt egale, AE va fi egală cu AM, şi de aceea va fi egală şi cu KN. Dar CE este către AE precum FH către KN şi de aceea CE şi FA sînt egale. Prin urmare punctul H cade pe hiperbola descrisă cu asimptotele AK, KF, a cărei conjugată trece prin punctul C, şi de aceea se află la intersecţia comună a hiperbolei şi a cercului descris. Q.E.D. Este de observat că această operaţie este aceeaşi, fie că dreapta AKN este paralelă cu orizontul, fie că este înclinată faţă de orizont de un unghi oarecare: şi că din două intersecţii H, h se nasc două unghiuri NAH, NAh; şi că în practica mecanică este deajuns să descriem o dată cercul, apoi să aplicăm rigla neterminată CH astfel la punctul C, ca partea ei FH, cuprinsă între cerc şi dreaptă FK, să fie egală cu partea ei CE situată între punctul C şi dreapta AK.

Cele spuse despre hiperbole se aplică ușor la parabole. Căci dacă *XAGK* reprezintă o parabolă pe care dreapta *XV* o atinge în vîrful *X*, și ordonatele *IA*, *VG* sînt ca puterile oarecare XI^n, XV^n, ale absciselor *XI*, *XV*; să ducem *XT*, *GT*, *AH* dintre care *XT* să fie paralelă cu *VG*, și *GT*, *AH* să atingă parabola în *G* și *A*: și corpul aruncat dintr-un loc oarecare *A*, în direcția unei drepte *AH* prelungită, cu o viteză dată, va descrie această parabolă, dacă numai densitatea mediului, în diversele locuri *G*, este în raport invers cu tangenta *GT*. Dar viteza în *G* va fi aceea cu care se va mișca proiectilul, într-un spațiu fără rezistență, pe o parabolă conică avînd vîrful *G*, diametrul *VG* prelungit în jos, și parametrul $\frac{2GT^2}{(nn-n) \times VG}$. Și rezistența în *G* va fi către forța gravitațională precum *GT* către $\frac{2nn-2n}{n-2}$ *VG*. De unde dacă *NAK* reprezintă o linie orizontală și atît densitatea mediului în *A*, cît și viteza cu care este aruncat corpul rămîn aceleași, unghiul *NAH* va fi oarecum schimbat; lungimile *AH*, *AI*, *HX* vor rămîne, și deci va fi dat vîrful *X* al parabolei, și poziția dreptei *XI*, și luînd *VG* către *IA* precum XV^n către XI^n, vor fi date toate punctele *G* ale parabolei, prin care va trece proiectilul.



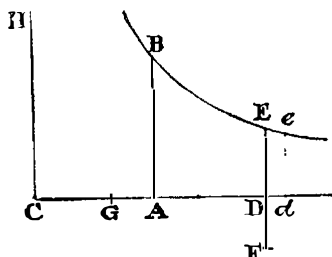
SECȚIUNEA III

Despre mișcarea corpurilor cărora li se opune o rezistență, parte în raport cu viteza, parte în raport cu pătratul ei.

PROPOZIȚIA XI. TEOREMA VIII

Dacă unui corp i se opune o rezistență, parte în raport cu viteza, parte în raport cu pătratul vitezei, și el se mișcă într-un mediu uniform numai prin forța inerentă, iar timpul crește în progresie aritmetică; cantitățile invers proporționale cu vitezele, mărite cu o cantitate oarecare, vor fi în progresie geometrică.

Din centrul *C*, cu asimptotele dreptunghiulare *CADd* și *CH*, să descriem hiperbola *BEe*, și fie *AB*, *DE de* paralele cu asimptota *CH*. Pe asimptota *CD* fie date punctele *A*, *G*: și dacă timpul se reprezintă prin aria hiperbolică *ABED* uniform crescătoare; zic că viteza se poate exprima prin lungimea *DF*, a cărei reciprocă *GD* împreună cu *CG* dată formează lungimea *CD* crescătoare în progresie geometrică.



Căci fie mica arie *DEed* creșterea cît se poate de mică dată a timpului, și *Dd* va fi în raport invers cu *DE*, și deci proporțională cu *CD*. Dar descreșterea $\frac{1}{CD}$ a ei, care (potrivit lemei II a acestei Cărți) este $\frac{Dd}{GD^2}$, va fi precum $\frac{CD}{GD^2}$ sau $\frac{CG+GD}{GD^2}$, adică, precum $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GD^2}$. Prin urmare timpul *ABED* crescînd în mod uniform prin adunarea particulelor date *EDde*, $\frac{1}{GD}$ descrește în același raport cu viteza. Căci descreșterea vitezei este precum rezistența, adică, (prin ipoteză) precum suma a două cantități, din care una este precum viteza, cealaltă precum pătratul vitezei; și descreșterea lui $\frac{1}{GD}$ este precum suma cantităților $\frac{1}{GD}$ și $\frac{CG}{GD^2}$, dintre care cea dintîi este însăși $\frac{1}{GD}$, și cea din urmă $\frac{CG}{GD^2}$ este precum $\frac{1}{GD^2}$: deci $\frac{1}{GD}$, descreșterile fiind analoge, este precum viteza. Și dacă cantitatea *GD*, invers proporțională cu $\frac{1}{GD}$, crește cu cantitatea dată *CG*; suma *CD*, timpul *ABED* crescînd în mod uniform, va crește în progresie geometrică. Q.E.D.

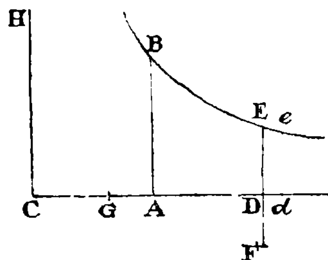
COROLARUL 1. Așadar dacă, punctele *A*, *G* fiind date, timpul se exprimă prin aria hiperbolică *ABED*, viteza se poate exprima prin inversa $\frac{1}{GD}$ a lui *GD*.

COROLARUL 2. Luînd însă *GA* către *GD* ca inversa vitezei la început, către inversa vitezei la sfîrșitul unui timp oarecare *ABED*, se va afla punctul *G*. Aflîndu-l însă, viteza se poate afla dintr-un alt timp oarecare dat.

PROPOZIŢIA XII. TEOREMA IX

Fiind presupuse aceleaşi, zic că dacă spaţiile descrise se iau în progresie aritmetică, vitezele mărite cu o cantitate oarecare dată vor fi în progresie geometrică.

Pe asimptota *CD* fie dat punctul *R*, şi ridicînd perpendiculara *RS*, care întîlneşte hiperbola în *S*, să exprimăm spaţiul descris prin aria hiperbolică *RSED*; şi viteza va fi precum lungimea *GD*, care împreună cu *CG* dată va forma lungimea *CD* descrescătoare după o progresie geometrică, în timp ce spaţiul *RSED* creşte în progresie aritmetică.



Căci fiindcă creşterea *EDde* a spaţiului este dată, linioara *Dd*, care este descreşterea lui *GD*, va fi în raport invers, cu *ED*, şi deci proporţională cu *CD*, adică precum suma lui *GD* şi a lungimii date *CG*. Dar descreşterea vitezei, într-un timp invers proporţional cu ea, în care se descrie intervalul dat al spaţiului *DdeE*, este precum rezistenţa şi timpul luate împreună, adică precum suma a două cantităţi, dintre care una este precum viteza, cealaltă precum pătratul vitezei, şi în raport invers cu viteza; şi astfel în acelaşi raport cu suma a două cantităţi, dintre care una se dă, iar cealaltă este precum viteza. Prin urmare atît descreşterea vitezei cît şi a liniei *GD*, este precum cantitatea dată şi cantitatea descrescătoare luate împreună, şi din cauza descreşterilor analoge, cantităţile descrescătoare vor fi totdeauna analoge; anume viteza şi linia *GD*. Q.E.D.

COROLARUL 1. Dacă exprimăm viteza prin lungimea *GD*, spaţiul descris va fi precum aria hiperbolică *DESR*.

COROLARUL 2. Şi dacă punctul *R* se ia oriunde, punctul *G* se va afla luînd *GR* către *GD*, precum viteza iniţială către viteza după ce s-a descris un spaţiu oarecare *RSED*. Aflînd însă punctul *G*, se dă spaţiul din viteza dată şi invers.

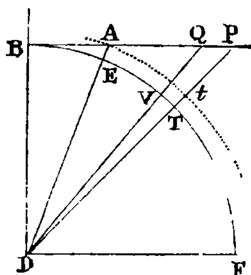
COROLARUL 3. De unde dacă (potrivit propoziţiei XI) se dă viteza din timpul dat, şi prin această propoziţie se dă spaţiul din viteza dată; se va da spaţiul din timpul dat: şi invers.

PROPOZIŢIA XIII. TEOREMA X

Presupunînd că un corp atras în jos de o gravitate uniformă se urcă sau coboară pe o dreaptă şi că i se opune o rezistenţă parte în raport cu viteza, parte în raport cu pătratul ei, zic că, dacă ducem drepte paralele cu diametrele prin capetele diametrelor conjugate, şi vitezele sînt precum oarecare segmente ale paralelelor duse de la un punct dat; timpurile vor fi precum sectoarele ariilor, tăiate de drepte duse de la centru la capetele segmentelor şi invers.

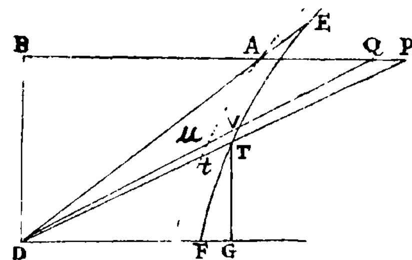
CAZUL 1. Să presupunem mai întîi că corpul se urcă, şi din centrul *D* şi cu un semidiametru oarecare *DB* să descriem un cadran *BETF* de cerc,

și prin capătul B al semidiametrului DB să ducem dreapta infinită BAP, paralelă cu semidiametrul DF. Fie dat pe ea punctul A, și să luăm segmentul AP proporțional cu viteza. Și cum o parte a rezistenței este precum și viteza, cealaltă parte precum pattratul vitezei; rezistența întreagă este precum $AP^2 + 2BAP$. Să unim DA, DP tăind cercul în E și T, și să exprimăm gravitatea prin DA^2 astfel ca gravitatea să fie către rezistența în P precum DA^2 către $AP^2 + 2BAP$; și timpul întregii ascensiuni va fi precum sectorul EDT al cercului.



Căci să ducem DVQ, tăind atît momentul PQ al vitezei AP, cît și momentul DTV al sectorului DET corespunzător unui moment dat de timp; și descreșterea PQ a vitezei va fi precum suma forțelor gravitățiii DA^2 și a rezistenței $AP^2 + 2BAP$, adică (potrivit propoziției 12 a Cărții a II-a a Elementelor) precum DP^2. Prin urmare aria DPQ, proporțională cu PQ este precum DP^2 și aria DTV, care este către aria DPQ precum DT^2 către DP^2, este precum cantitatea dată DT^2. Așadar aria EDT descrește în mod uniform în raport cu timpul viitor, prin scăderea particulelor date DTV, și de aceea este proporțională cu timpul întregii ascensiuni. Q.E.D.

CAZUL 2. Dacă viteza în ascensiunea corpului se exprimă prin lungimea AP ca mai sus, și presupunem că rezistența este precum $AP^2 + 2BAP$, și dacă forța gravitățiii este mai mică decît aceea ce se poate exprima prin DA^2; să luăm BD atît de lungă, încît $AB^2 - BD^2$ să fie proporțională cu gravitatea, și fie DF perpendiculară și egală cu DB, și prin vîrful F să descriem hiperbola $FTVE$, ale cărei semidiametre conjugate să fie DB și DF, și care să taie DA în E, și DP în T și V; și timpul întregii ascensiuni va fi precum sectorul TDE al hiperbolei.

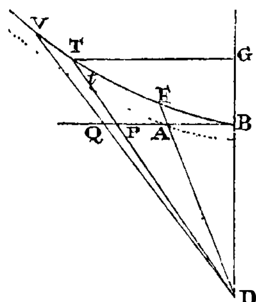


Căci descreșterea PQ a vitezei, produsă într-un interval dat de timp, este precum suma rezistenței $AP^2 + 2BAP$ și a gravitățiii $AB^2 - BD^2$, adică, precum $BP^2 - BD^2$. Dar aria DTV este către aria DPQ, precum DT^2 către DP^2; și de aceea dacă pe DF coborîm perpendiculara GT, precum GT^2 sau $GD^2 - DF^2$ către BD^2, și precum GD^2 către BP^2, și separînd precum DF^2 către $BP^2 - BD^2$. Din care cauză cum aria DPQ este precum PQ, adică, precum $BP^2 - BD^2$; aria DTV va fi precum DF^2 dat. Așadar aria EDT descrește în mod uniform în diversele intervale egale de timp, prin scăderea a tot atîtor intervale date DTV, și deci este proporțională cu timpul. Q.E.D.

CAZUL 3. Fie AP viteza în coborîrea corpului, și $AP^2 + 2BAP$ rezistența, și $BD^2 - AB^2$ forța gravitățiii, unghiul DBA fiind drept. Și dacă din centrul D, cu vîrful principal B descriem hiperbola dreptunghiulară $BETV$ tăind dreptele prelungite DA, DP și DQ în E, T și V; sectorul DET al acestei hiperbole va fi precum timpul întreg de coborîre.

Căci creșterea PQ a vitezei, și aria DPQ proporțională cu ea, este precum excesul gravitățiii asupra rezistenței, adică, precum $BD^2 - AB^2 -$

$2BAP - AP^2$ sau $BD^2 - BP^2$. Și aria DTV este către aria DPQ precum DT^2 către DP^2, și deci precum GT^2 sau $GD^2 - BD^2$ către BP^2, și precum GD^2 către BD^2, și separînd precum BD^2 către $BD^2 - BP^2$. De aceea cum aria DPQ este precum $BD^2 - BP^2$, aria DTV va fi precum cantitatea dată BD^2. Prin urmare aria EDT crește în mod uniform în diversele intervale egale de timp, prin adunarea a tot atîtor particule DTV date, și de aceea este proporțională cu timpul de coborîre. Q.E.D.



COROLAR. Dacă din centrul D cu semidiametrul DA prin vîrful A ducem arcul At asemenea cu arcul ET, și subîntinzînd în mod analog unghiul ADT: viteza AP va fi către viteza, pe care corpul o poate cîștiga în timpul EDT, într-un spațiu fără rezistență, urcîndu-se sau coborîndu-se, precum aria triunghiului DAP către aria sectorului DAt; și de aceea este dată dacă timpul este dat. Căci viteza, într-un mediu fără rezistență, este proporțională cu timpul, și deci cu acest sector; într-un mediu rezistent este precum triunghiul; și în ambele medii, unde este cît se poate de mică, se apropie de raportul de egalitate, la fel ca sectorul și triunghiul.

SCOLIE

Se poate demonstra cazul și în urcarea corpului, cînd forța gravității este mai mică decît aceea care se poate exprima prin DA^2 sau $AB^2 + BD^2$, și este mai mare decît aceea care se poate exprima prin $AB^2 - BD^2$, și trebuie exprimată prin AB^2. Dar mă grăbesc la altele.

PROPOZIȚIA XIV. TEOREMA XI

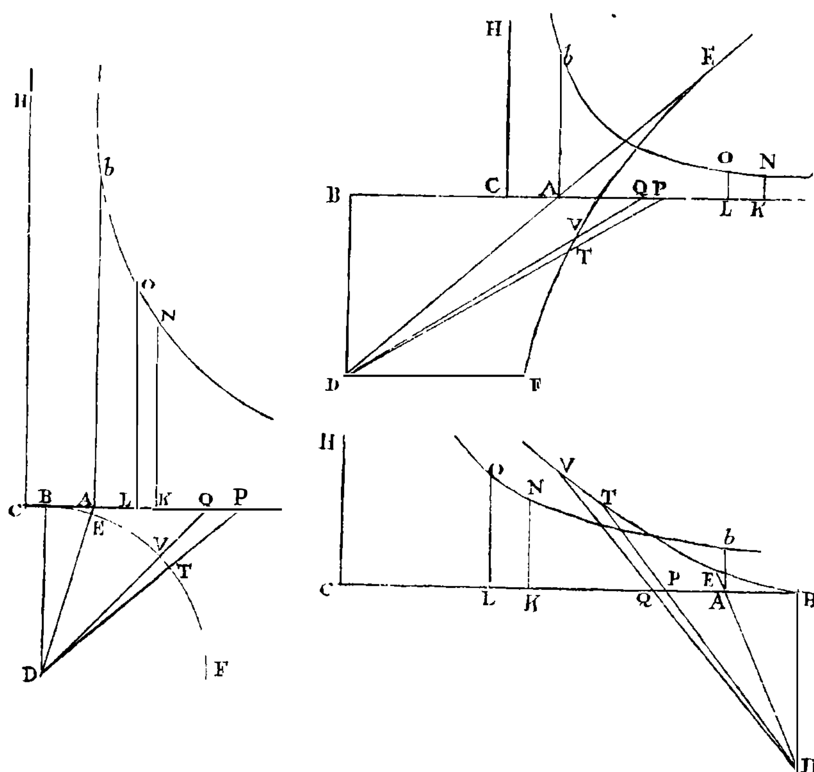
Fiind presupuse aceleași, zic că spațiul descris prin urcare sau coborîre, este precum diferența ariei prin care se exprimă timpul, și a unei alte arii oarecare care crește sau scade în progresie aritmetică, dacă forțele compuse din rezistență și gravitate se adună în progresie geometrică.

Să luăm AC (în ultimele trei figuri) proporționale cu gravitatea, și AK cu rezistența. Dar să le luăm de aceeași parte a punctului A dacă corpul coboară, altfel de părți contrarii, contrar. Să ridicăm Ab, care fie către DB precum DB^2 către $4BAC$: și descriind pe asimptotele dreptunghiulare CK, CH hiperbola bN, și ridicînd KN perpendiculară pe CK, aria $AbNK$ va crește sau va descrește în progresie aritmetică, în timp ce forțele CK se iau în progresie geometrică. Zic așadar că distanța corpului de la înălțimea lui maximă este precum surplusul ariei $AbNK$ față de aria DET.

Într-adevăr deoarece AK este precum rezistența, adică, precum $AP^2 + 2BAP$; să luăm o cantitate oarecare dată Z, și să punem AK egală cu $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; și (potrivit lemei II a acestei Cărți) momentul lui KL va fi egal

cu $\frac{2PQ + 2BA \times PQ}{Z}$ sau $\frac{2PQ}{Z}$, şi momentul $KLON$ al ariei $AbNK$ egal cu $\frac{2PQ \times LO}{Z}$ sau $\frac{PQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.

CAZUL 1. Dacă corpul se urcă, şi gravitatea este precum $AB^2 + BD^2$, fiind un cerc BET (în prima figură) linia AC, care este proporţională cu

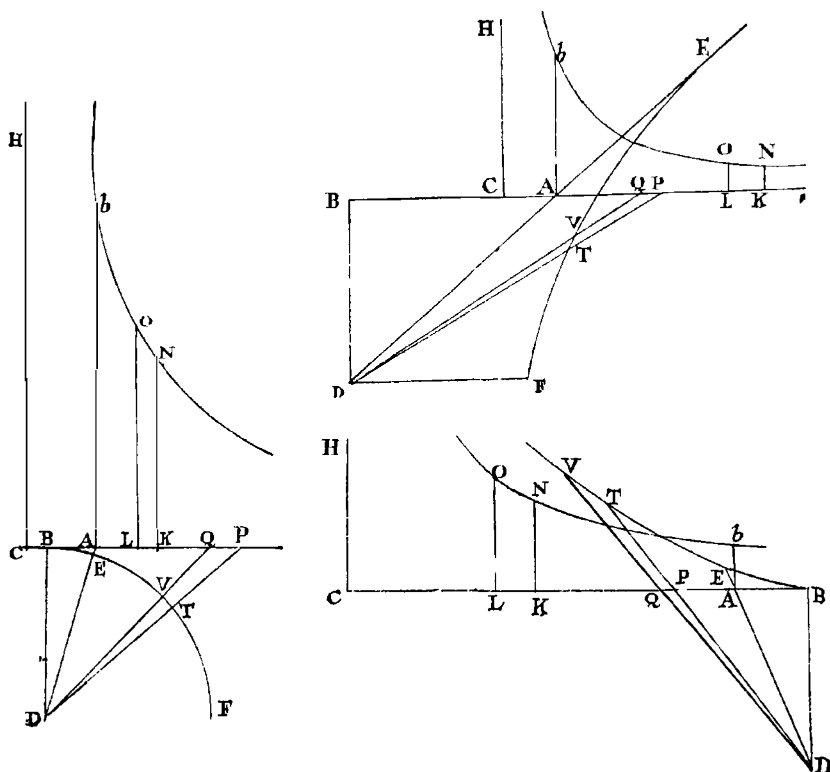


gravitatea, va fi $\frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, şi DP^2 sau $AP^2 + 2BAP + AB^2 + BD^2$ va fi $AK \times Z + AC \times Z$ sau $CK \times Z$; şi astfel aria DTV va fi către aria DPQ precum DT^2 sau DB^2 către $CK \times Z$.

CAZUL 2. Dacă corpul se urcă, şi gravitatea este precum $AB^2 - BD^2$, linia AC (în figura a doua) va fi $\frac{AB^2 - BD^2}{Z}$, şi DT^2 va fi către DP^2 precum DF^2 sau DB^2 către $BP^2 - BD^2$ sau $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, adică, către $AK \times Z + AC \times Z$ sau $CK \times Z$. Şi deci aria DTV va fi către aria DPQ precum DB^2 către $CK \times Z$.

CAZUL 3. Şi prin acelaşi raţionament, dacă corpul se coboară, şi de aceea gravitatea este precum $BD^2 - AB^2$, şi linia AC (în figura a treia) este egală cu $\frac{BD^2 - AB^2}{Z}$; aria DTV va fi către aria DPQ precum DB^2 către $CK \times Z$: ca mai sus.

Așadar, deoarece acele arii sînt totdeauna în acest raport; dacă în locul ariei *DTV*, prin care se exprimă momentul timpului totdeauna egal cu el însuși, să se scrie un dreptunghi oarecare determinat, anume $BD \times m$, aria *DBQ*, adică $\frac{1}{2} BD \times PQ$ va fi către $BD \times m$ precum $CK \times Z$ către BD^2. Și de aceea $PQ \times BD^3$ devine egal cu $2BD \times m \times CK \times Z$, și momentul *KLON* al ariei *AbNK* aflat mai sus devine $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Să scădem din aria



DET momentul ei *DTV* sau $BD \times m$, și va rămîne $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Prin urmare diferența momentelor, adică, momentul diferenței ariilor este egal cu $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; și de aceea deoarece $\frac{BD \times m}{AB}$ este dat precum viteza *AP*, adică, precum momentul spațiului pe care-l descrie corpul urcîndu-se sau coborîndu-se. Și de aceea diferența ariilor și spațiul, crescînd sau descrescînd cu momente proporționale și începînd sau dispărînd deodată cu ele, sînt proporționale. Q.E.D.

COROLAR. Dacă lungimea, care se naște aplicînd aria *DET* la linia *BD*, se numește *M*; și se ia o altă lungime *V* avînd către lungimea *M*, raportul pe care-l are linia *DA* către linia *DE*: spațiul, pe care-l descrie corpul în urcarea sau coborîrea în întreg mediul rezistent, va fi către spațiul, pe care-l poate descrie corpul într-un mediu fără rezistență căzînd din repaus în ace-

lași timp, ca diferența ariilor sus-menționate către $\frac{BD \times V^2}{AB}$; și deci este dat din timpul dat. Căci spațiul într-un mediu fără rezistență este precum pătratul timpului, sau precum V^2; și din cauză că BD și AB sînt date precum $\frac{BD \times VA^2}{AB}$. Această arie este egală cu aria $\frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$, și momentul lui M este m; și de aceea momentul acestei arii este $\frac{DA^2 \times BD \times 2M \times m}{DE^2 \times AB}$. Dar acest moment este către momentul diferenței ariilor amintite mai sus DET și $AbNK$, adică către $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, precum $\frac{DA^2 \times BD \times M}{DE^2}$ către $\frac{1}{2} BD \times AP$, sau precum $\frac{DA^2}{DE^2}$ înmulțit cu DET către DAP; și deci, cînd ariile DET și DAP sînt cît se poate de mici, în raport de egalitate. Prin urmare aria $\frac{BD \times V^2}{AB}$, și diferența ariilor DET și $AbnK$, cînd toate aceste arii sînt cît se poate de mici, au momente egale; și deci sînt egale. De unde deoarece vitezele, și de aceea și spațiile descrise simultan în ambele medii la începutul coborîrii sau la sfîrșitul ascensiunii se apropie de egalitate; și deci atunci sînt între ele precum aria $\frac{BD \times V^2}{AB}$, și diferența ariilor DET și $AbNK$; și de aceea cum spațiul într-un mediu fără rezistență este totdeauna precum $\frac{BD \times V^2}{AB}$, și spațiul într-un mediu rezistent este totdeauna precum diferența ariilor DET și $AbNK$: este necesar ca spațiile în ambele medii, descrise în timpuri oarecare egale, să fie între ele precum aria $\frac{BD \times V^2}{AB}$, și diferența ariilor DET și $AbnK$. Q.E.D.

SCOLIE

Rezistența corpurilor sferice în fluide provine parte din tenacitate, parte din frecare și parte din densitatea mediului. Și acea parte a rezistenței, care provine din densitatea fluidului am spus că este precum pătratul vitezei; cealaltă parte, care provine din tenacitatea fluidului este uniformă, adică precum momentul timpului: și deci putem trece deja la mișcarea corpurilor, cărora li se opune o rezistență, parte cu o forță uniformă sau în raportul momentelor timpului, și parte proporțional cu pătratul vitezei. Dar este de ajuns că am arătat drumul către acest raționament în propozițiile precedente VIII și IX, și în corolarele lor. În acelea ca și pentru rezistența uniformă a corpului ascendent, care provine din greutatea lui, se poate substitui rezistența uniformă, care provine din tenacitatea mediului, cînd corpul se mișcă numai prin forța inerentă; și corpul urcîndu-se pe o dreaptă este permis să adunăm această rezistență uniformă la forța gravitații; și să o scădem, cînd corpul se coboară pe o dreaptă. Putem trece de asemenea la mișcarea corpurilor, cărora li se opune o rezistență parte în mod uniform, parte în raport cu viteza, și parte în raport cu pătratul vitezei. Și am arătat calea în propozițiile precedente XIII și XIV în care și rezistența uniformă, ce se naște din tenacitatea mediului se poate substitui forței gravitații, sau se poate compune cu ea, ca mai înainte. Dar mă grăbesc la altele.

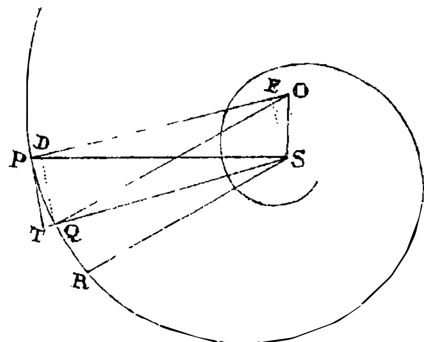
SECŢIUNEA IV

Despre mişcarea circulară a corpurilor în medii rezistente

LEMA III

Fie PQR o spirală ce taie toate razele SP, SQ, SR etc. sub unghiuri egale. Să ducem dreapta PT care o atinge într-un punct oarecare P, şi taie raza SQ în T; şi ridicînd perpendicularele PO, QO pe spirală şi concurente în O, să unim SO. Zic că dacă punctele P şi Q se apropie unul de altul şi coincid, unghiul PSO devine drept, şi raportul ultim al dreptunghiului $TQ \times 2PS$ către PQ^2 va fi un raport de egalitate.

Căci din unghiurile drepte *OPQ*, *OQR* să scădem unghiurile egale *SPQ*, *SQR*, şi vor rămîne unghiurile egale *OPS*, *OQS*. Prin urmare cercul care trece prin punctele *O*, *S*, *P* va trece şi prin punctul *Q*. Să coincidă punctele *P* şi *Q*, şi acest cerc atinge spirala în locul de întîlnire *PQ*, şi de aceea va tăia dreapta *OP* perpendicular. Deci *OP* va fi diametrul acestui cerc, şi unghiul *OSP* din semicerc un unghi drept. Q.E.D.



Pe *OP* să coborîm perpendicularele *QD*, *SE*, şi rapoartele ultime ale liniilor vor fi de acest fel: *TQ* către *PD* precum *TS* sau *PS* către *PE*, sau 2*PO* către 2*PS*; la fel *PD* către *PQ* precum *PQ* către 2*PO*; şi prin egalitate perturbată *TQ* către *PQ* precum *PQ* către 2*PS*. De unde PQ^2 devine egal cu $TQ \times 2PS$. Q.E.D.

PROPOZIŢIA XV. TEOREMA XII

Dacă densitatea mediului în diversele locuri este în raport invers cu distanţa locurilor de la un centru imobil, şi fie forţa centripetă proporţională cu pătratul densităţii: zic că corpul se poate roti într-o spirală, care taie toate razele duse din acel centru sub un unghi dat.

Să presupunem cele din lema de mai sus, şi să prelungim pe *SQ* în *V*, ca să fie *SV* egală cu *SP*. Într-un timp oarecare, într-un mediu rezistent, un corp să descrie un arc foarte mic *PQ*, şi într-un timp dublu arcul cît se poate de mic *PR*; şi descreşterile arcelor născute din rezistenţă, adică diferenţele de la arcele, care ar fi descrise într-un mediu fără rezistenţă în aceleaşi timpuri, vor fi între ele precum pătratele timpurilor în care ele se nasc. Aşadar descreşterea arcului *PQ* este a patra parte a descreşterii arcului *PR*. De unde de asemenea dacă luăm aria *QSr* egală cu aria *PSQ*, descreşterea arcului *PQ* va fi egală cu jumătatea linioarei *Rr*; şi deci forţa rezistenţei şi forţa centripetă sînt între ele precum linioarele $\frac{1}{2}Rr$ şi *TQ* pe care le produc

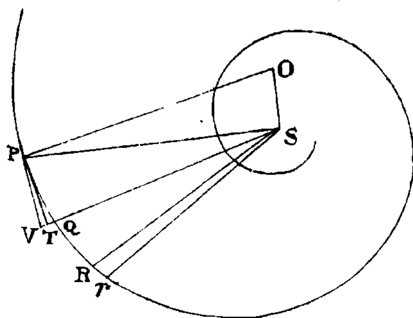
în același timp. Deoarece forța centripetă, cu care corpul este acționat în P este în raport invers cu SP^2, și (potrivit lemei X, Cartea I), linioara TQ, care este născută din acea forță, este într-un raport compus din raportul acestei forțe și pătratul raportului timpului în care se descrie arcul PQ (căci în acest caz neglijez rezistența, ca fiind infinit de mică față de forța centripetă) va fi $TQ \times SP^2$, adică (potrivit lemei celei mai noi) $\frac{1}{2} PQ^2 \times SP$, proporțional cu pătratul timpului, și deci timpul este precum $PQ \times \sqrt{SP}$; și viteza corpului, cu care se descrie arcul PQ în acel timp, precum $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ sau $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, adică, în raport invers cu rădăcina pătrată a lui SP. Și printr-un raționament analog, viteza cu care se descrie arcul QR, este în raport invers cu rădăcina pătrată a lui SQ. Dar arcele PQ și QR sînt precum vitezele de descriere între ele, adică, precum rădăcina pătrată a raportului lui SQ către SP, sau precum SQ către $\sqrt{SP \times SQ}$; și fiindcă unghiurile SPQ, SQr sînt egale și ariile PSQ, QSr sînt egale, arcul PQ este către arcul Qr precum SQ către SP. Să luăm diferențele consecventelor proporționale, și va fi arcul PQ către arcul Rr precum SQ către $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, sau $\frac{1}{2} VQ$. Căci suprapunîndu-se punctele P și Q, raportul ultim $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ către $\frac{1}{2} VQ$ este un raport de egalitate. Deoarece descreșterea arcului PQ, născută din rezistență, sau dublul acestuia Rr, este precum rezistența și pătratul timpului luate împreună; rezistența va fi precum $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$. Dar PQ era către Rr, precum SQ către $\frac{1}{2} VQ$, și deci $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$ devine ca $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sau precum $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SP^2}$. Căci punctele P și Q suprapunîndu-se, SP și SQ coincid, și unghiul PVQ devine drept; și triunghiurile PVQ, PSO fiind asemenea, avem PQ către $\frac{1}{2} VQ$ precum OP către $\frac{1}{2} OS$. Prin urmare $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ este precum rezistența, adică, în raportul densității mediului în P și a pătratului vitezei luate împreună. Să scădem pătratul raportului vitezei, adică raportul $\frac{1}{SP}$, și va rămîne densitatea mediului în P precum $\frac{OS}{OP \times SP}$. Fie dată spirala, și fiind raportul OS către OP, densitatea mediului în P va fi precum $\frac{1}{SP}$. Așadar în mediul a cărui densitate este în raport invers cu distanța SP de la centru, corpul se poate învîrti pe această spirală. Q.E.D.

COROLARUL 1. Viteza într-un loc oarecare P este totdeauna aceea cu care corpul se poate roti într-un mediu fără rezistență cu aceeași forță centripetă pe un cerc, la aceeași distanță SP de la centru.

COROLARUL 2. Densitatea mediului, dacă se dă distanța SP, este precum $\frac{OS}{OP}$, iar dacă distanța nu este dată, precum $\frac{OS}{OP \times SP}$. Și de aici spirala se poate adapta la orice densitate a mediului.

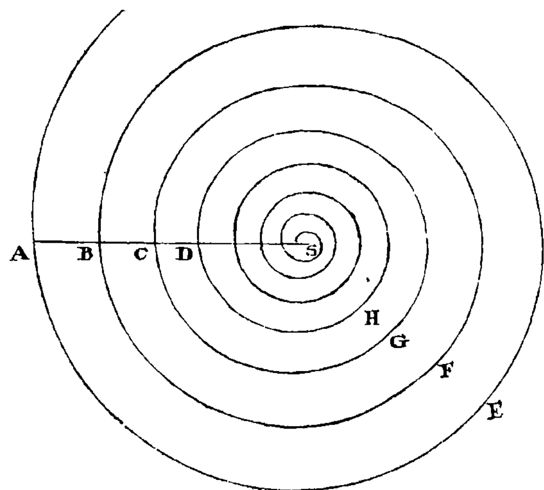
COROLARUL 3. Forța rezistenței într-un loc oarecare P, este către forța centripetă în același loc precum $\frac{1}{2}$ OS către OP. Căci acele forțe sînt între ele precum $\frac{1}{2}Rr$ și TQ sau precum $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ și $\frac{\frac{1}{2}PQ^2}{SP}$, adică, precum $\frac{1}{2}VQ$ și PQ, sau $\frac{1}{2}$ OS și OP. Așadar fiind dată spirala se dă proporția rezistenței către forța centripetă, și viceversa din proporția dată se dă spirala.

COROLARUL 4. Prin urmare corpul nu se poate învîrti în această spirală, decît dacă forța de rezistență este mai mică decît jumătatea forței centripete. Fie rezistența egală cu jumătatea forței centripete și spirala va coincide cu linia dreaptă PS, și pe această dreaptă corpul se va coborî spre centru cu viteza, care este către viteza cu care am arătat mai sus în cazul parabolei (teorema X, Cartea I), că are loc coborîrea într-un mediu fără rezistență, precum rădăcina pătrată a raportului unității către numărul 2. Și timpurile de coborîre aici vor fi în raport invers cu vitezele, și deci sînt date.



COROLARUL 5. Și fiindcă la distanțe egale de la centru viteza este aceeași pe spirala PQR și pe dreapta SP, și lungimea spiralei către lungimea dreptei PS este într-un raport dat, anume în raportul lui OP către OS; timpul de coborîre pe spirală va fi către timpul de urcare pe drepta SP în același raport dat,și deci este dat.

COROLARUL 6. Dacă din centrul S cu două intervale oarecare date se descriu două cercuri; și menținînd aceste cercuri, se schimbă într-un mod oarecare unghiul pe care-l formează spirala cu raza PS: numărul revoluțiilor pe care le poate efectua corpul între cercuri, înaintînd în spirală de la cerc la cerc este precum $\frac{PS}{QS}$, sau precum tangenta unghiului pe care-l formează spirala cu raza PS; iar timpul acelorași revoluții precum $\frac{OP}{OS}$, adică, precum secanta aceluiași unghi, sau în raport invers cu densitatea mediului.



COROLARUL 7. Dacă un corp într-un mediu, a cărui densitate este în raport invers cu distanța locurilor de la centru, efectuează o revoluție pe o curbă oarecare AEB în jurul acelui centru, și taie prima rază AS sub același unghi în B ca mai înainte în A, și anume cu o viteză care este către prima sa viteză în A

în raport invers cu rădăcina pătrată a distanţelor de la centru (adică, precum AS către media proporţională între AS şi BS) corpul va continua să descrie nenumărate revoluţii asemenea BFC, CGD etc. şi prin intersecţii va împărţi raza AS în părţile AS, BS, CS, DS etc., continuu proporţionale. Iar timpurile de revoluţie vor fi precum perimetrele orbitelor AEB, BFC, CGD etc. şi în raport invers cu vitezele iniţiale A, B, C; adică, precum $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Şi timpul întreg, în care corpul va ajunge la centru, va fi către timpul primei revoluţii, precum suma tuturor mărimilor continuu proporţionale $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, mergînd la infinit, către primul termen $AS^{\frac{3}{2}}$; adică, precum primul termen $AS^{\frac{3}{2}}$, către diferenţa primelor două $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, adică aproape precum $\frac{2}{3}$ AS către AB. De unde timpul întreg se poate uşor afla.

COROLARUL 8. De aici se poate deduce de asemenea destul de apropiat mişcarea corpurilor în medii, a căror densitate este sau uniformă sau deservă o altă lege oarecare dată. Din centrul S, cu intervalele continuu proporţionale SA, SB, SC etc., să descriem nişte cercuri, şi să presupunem că timpul de revoluţie între perimetrele a două oarecare din aceste cercuri, în mediul de care am vorbit, este către timpul de revoluţie între aceleaşi în mediul propus, precum este densitatea mijlocie a mediului propus între aceste cercuri, către densitatea mijlocie a mediului de care am vorbit între aceleaşi aproximativ. Dar şi în acelaşi raport este secanta unghiului sub care spirala determinată mai sus, în mediul de care am vorbit, taie raza AS, către secanta unghiului sub care noua spirală taie aceeaşi rază în mediul propus. Şi de asemenea după cum sînt tangentele acelor unghiuri aproximativ tot aşa este numărul tuturor revoluţiilor între aceleaşi două cercuri aproximativ. Dacă aceste au loc totdeauna între două cercuri, mişcarea va continua pe toate cercurile. Şi în acest fel ne putem uşor imagina în ce fel şi în ce timpuri vor trebui să se rotească corpurile într-un mediu oarecare regulat.

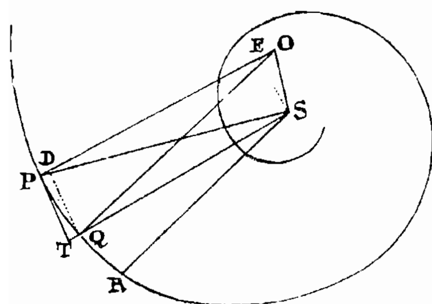
COROLARUL 9. Şi chiar dacă mişcările excentrice au loc pe spirale apropiate de forma ovală; totuşi închipuindu-ne că diversele revoluţii ale acelor spirale sînt la intervale egale între ele, şi se apropie de centru în aceleaşi grade cu spirala descrisă mai sus, înţelegem şi în ce fel se efectuează mişcările corpurilor pe acest fel de spirale.

PROPOZIŢIA XVI. TEOREMA XIII

Dacă densitatea mediului în diversele locuri este în raport invers cu distanţa locurilor de la centrul imobil, şi forţa centripetă este în raport invers cu o putere oarecare a aceleeaşi distanţe, zic că corpul se poate învîrti pe o spirală care intersectează toate razele duse din centru sub un unghi dat.

Se demonstrează cu aceeaşi metodă ca în propoziţia de mai sus. Căci dacă forţa centripetă în P este în raport invers cu o putere oarecare SP^{n+1} a distanţei SP al cărui indice este $n + 1$; se conchide ca mai sus, că timpul,

în care corpul descrie un arc oarecare PQ, va fi precum $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; și rezistența în P precum $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, sau precum $\frac{(1-\frac{1}{2}n) \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ și de aceea precum $\frac{(1-\frac{1}{2}n) \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, adică, din cauză că $\frac{(1-\frac{1}{2}n) \times OS}{OP}$ este dat, în raport invers cu SP^{n+1}. Și de aceea, cum viteza este în raport invers cu $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitatea în P va fi în raport invers cu SP.



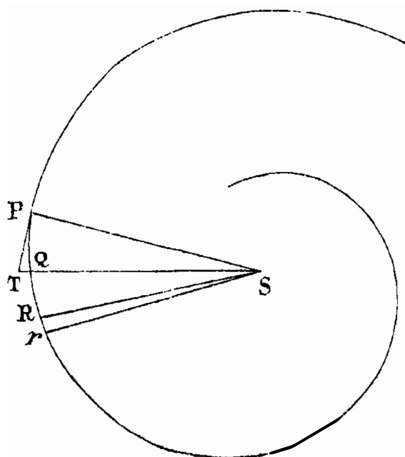
COROLARUL 1. Rezistența este către forța centripetă precum $\left(1-\frac{1}{2}n\right) \times OS$ către OP.

COROLARUL 2. Dacă forța centripetă este în raport invers cu SP^3 va fi $1-\frac{1}{2}n$ egal cu zero, și deci rezistența și densitatea mediului va fi nulă, ca în propoziția IX din Cartea I.

COROLARUL 3. Dacă forța centripetă este în raport invers cu o putere oarecare a razei SP al cărei indice este mai mare ca numărul 3, rezistența pozitivă va trece în negativă.

SCOLIE

De altfel această propoziție și cele de mai sus, care se referă la medii de densități neegale, trebuie înțelese ca fiind aplicate asupra mișcării corpurilor atît de mici, încît nu trebuie luată în seamă densitatea mai mare dintr-o parte a corpului decît din cealaltă. Iar rezistența, celelalte mărimi fiind egale, o presupun proporțională cu densitatea. De unde în mediile, a căror forță de rezistență nu este precum densitatea, densitatea trebuie să crească sau să se micșoreze atît de mult, încît sau să suprime surplusul rezistenței sau să completeze lipsa.



PROPOZIȚIA XVII. PROBLEMA IV

Să aflăm forța centripetă și rezistența mediului, cu care se poate învîrti un corp pe o spirală dată, legea vitezei fiind dată.

Fie spirala PQR. Din viteza, cu care corpul parcurge arcul foarte mic PQ, se va da timpul, și din înălțimea TQ, care este precum forța centripetă și pătratul timpului se va da forța. Apoi din diferența RSr a ariilor PSQ și QSR descrise în intervale egale de timp, se va da întîrzierea corpului, și din întîrziere se va afla rezistența și densitatea mediului.

PROPOZIŢIA XVIII. PROBLEMA V

Fiind dată legea forţei centripete, să aflăm densitatea mediului în diverse locuri, în care corpul va descrie o spirală dată.

Din forţa centripetă trebuie aflată viteza în diversele locuri, apoi din întîrzierea vitezei trebuie determinată densitatea mediului; ca în propoziţia de mai sus.

Dar am expus metoda de a trata aceste probleme în propoziţia X şi lema II a acestei Cărţi; şi nu vreau să reţin pe cititor mai mult în astfel de cercetări complicate. Va trebui acum să adaug unele lucruri despre forţele corpurilor la înaintare, şi despre densitatea şi rezistenţa mediilor, în care au loc mişcările expuse pînă aici şi cele înrudite cu ele.

SECŢIUNEA V

Despre densitatea şi compresiunea fluidelor şi despre hidrostatică

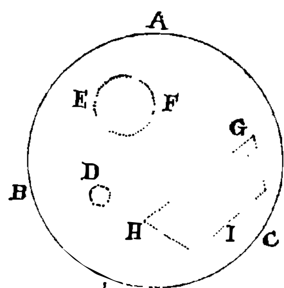
DEFINIŢIA FLUIDULUI

Fluid este orice corp, ale cărui părţi cedează la orice forţă imprimată, şi cedînd se mişcă uşor între ele

PROPOZIŢIA XIX. TEOREMA XIV

Toate părţile unui fluid omogen şi nemişcat, care este închis într-un vas oarecare nemişcat şi este comprimat din toate părţile, (punînd la o parte consideraţia condensării, greutăţii şi a tuturor forţelor centripete) sînt apăsate în mod egal din toate părţile, şi rămîn în locurile lor fără vreo mişcare provenită de la acea presiune.

CAZUL 1. Într-un vas sferic *ABC* să închidem şi să comprimăm în mod uniform un fluid din toate părţile: zic că nici o parte a lui nu se va mişca din cauza presiunii. Căci dacă o parte oarecare *D* se mişcă, este necesar ca toate părţile de acest fel, situate la aceeaşi distanţă de centru, să se mişte simultan cu o mişcare asemănătoare; şi aceasta din cauză că presiunea tuturora este asemenea şi egală şi se exclude orice mişcare dacă nu provine de la acea presiune. Şi nici nu pot să se apropie toate de centru, decît dacă fluidul se condensează spre centru; contrar ipotezei. Nu pot nici să se îndepărteze mai mult, decît dacă fluidul s-ar condensa spre circumferinţă; iarăşi contrar ipotezei. Nu se pot mişca într-o direcţie păstrîndu-şi distanţele de la centru, fiindcă din cauză analogă se vor mişca în direcţie contrară; dar aceeaşi parte nu se poate mişca în acelaşi timp, în părţi contrarii. Prin urmare nici o parte a fluidului nu se va mişca din locul său. Q.E.D.



CAZUL 2. Mai zic, că toate părţile sferice ale acestui fluid sînt comprimate în mod egal din toate părţile. Căci fie *EF* o parte sferică a fluidului, şi dacă aceasta nu se comprimă în mod egal din toate părţile, să mărim presiunea mai mică, pînă ce ea este comprimată în mod egal din toate părţile; şi părţile lui potrivit primului caz, vor rămîne la locurile lor. Dar înainte de a mări presiunea vor rămîne la locurile lor, potrivit iarăşi primului caz, şi prin adunarea noii presiuni se vor mişca din locurile lor, potrivit definiţiei fluidului. Dar aceste două sînt în contrazicere. Deci în mod fals se spunea că sfera *EF* nu era comprimată în mod egal din toate părţile. Q.E.D.

CAZUL 3. De aceea zic că presiunea diverselor părţi sferice este egală. Căci părţile sferice vecine se apasă în punctul de contact în mod egal, potrivit legii III a mişcării. Dar şi potrivit cazului 2 sînt apăsate din toate părţile cu aceeaşi forţă. Aşadar două părţi sferice oarecare care nu sînt vecine, deoarece partea sferică intermediară le poate atinge pe amîndouă, sînt apăsate, cu aceeaşi forţă. Q.E.D.

CAZUL 4. Zic apoi că toate părţile fluidului sînt apăsate pretutindenea în mod egal. Căci două părţi oarecare pot fi atinse de părţile sferice în puncte oarecare, şi acolo apasă în mod egal acele părţi sferice, potrivit cazului 3 şi la rîndul lor sînt apăsate în mod egal, potrivit legii a treia a mişcării. Q.E.D.

CAZUL 5. Aşadar fiindcă o parte oarecare *GHI* a fluidului este închisă în restul fluidului ca într-un vas, şi este comprimată în mod egal din toate părţile, iar părţile lui se apasă reciproc în mod egal şi sînt în repaus între ele; este evident că toate părţile unui fluid oarecare *GHI*, care este apăsat din toate părţile în mod egal, se apasă reciproc în mod egal, şi sînt în repaus între ele. Q.E.D.

CAZUL 6. Prin urmare dacă fluidul este închis într-un vas nerigid, şi nu este comprimat în mod egal din toate părţile; el va ceda presiunii mai intense, potrivit definiţiei fluidităţii.

CAZUL 7. Şi de aceea într-un vas rigid, fluidul nu va susţine o presiune mai intensă dintr-o parte decît din alta, ci îi va ceda, şi anume într-un moment de timp, deoarece latura rigidă a vasului nu urmează lichidului care cedează. Dar cedînd va apăsa latura opusă şi astfel presiunea va tinde din toate părţile spre egalitate. Şi fiindcă fluidul tinde să se îndepărteze cît mai iute de la partea mai apăsată, este oprit de rezistenţa vasului la partea opusă; presiunea se reduce din toate părţile la egalitate, într-un moment de timp fără mişcare locală: şi în consecinţă părţile fluidului, potrivit cazului 5 se apasă reciproc în mod egal, şi sînt în repaus între ele. Q.E.D.

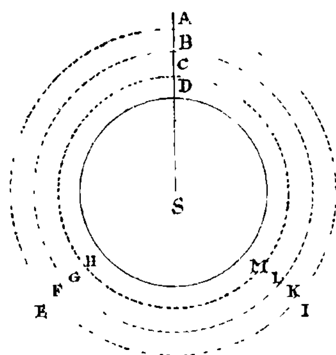
COROLAR De unde nici mişcările părţilor fluidului între ele, nu se pot schimba, printr-o presiune imprimată fluidului undeva pe suprafaţa externă, decît dacă sau se schimbă undeva figura suprafeţei, sau toate părţile fluidului apăsîndu-se reciproc mai intens sau mai slab alunecă între ele mai greu sau mai uşor.

PROPOZIŢIA XX. TEOREMA XV

Dacă diversele părţi ale unui fluid sferic şi omogen la distanţe egale de centru, situat pe un fundament sferic concentric gravitează spre centrul întregului, fundamentul va susţine greutatea unui cilindru, a cărui bază este egală cu suprafata fundului, şi înălţimea aceeaşi cu a fluidului ce apasă.

Fie *DHM* suprafaţa fundului, şi *AEI* suprafaţa superioară a fluidului. Să împărţim fluidul în orbite concentrice de grosime egală prin nenumăratele orbite sferice *BFK*, *CGL*; şi să ne închipuim că forţa gravităţii acţionează numai pe faţa superioară a fiecărei orbite, şi că acţiunile sînt egale pe părţile egale ale tuturor suprafeţelor. Prin urmare suprafaţa superioară *AE* este apăsată cu forţa simplă a gravităţii proprii, cu care sînt apăsate în mod egal atît toate părţile orbitei superioare cît şi suprafaţa a doua *BFK* (potrivit propoziţiei XIX) după măsura sa. De aceea suprafaţa a doua *BFK* este apăsată cu forţa proprie a gravităţii, care adunată la forţa de mai sus dublează presiunea. Cu această presiune, potrivit măsurii sale, şi în plus cu forţa proprie a gravităţii, adică cu presiune triplă, este apăsată suprafaţa a treia *CGL*. Şi la fel suprafaţa a patra este acţionată de o presiune

cvadruplă, a cincia de una cvintuplă și așa mai departe. Deci presiunea cu care este acționată fiecare suprafață, nu este precum cantitatea solidă a fluidului apăsător, ci precum numărul orbitelor pînă la partea de sus a fluidului; și este egală cu gravitatea orbitei inferioare înmulțită cu numărul orbitelor, adică, cu gravitatea solidului a cărui ultim raport către cilindrul determinat mai sus (dacă numai numărul orbitelor crește și grosimea scade la infinit, astfel că acțiunea gravității de la suprafața cea mai de jos la cea mai de sus să devină continuă) va fi un raport de egalitate. Prin urmare suprafața cea mai de jos susține greutatea cilindrului determinat mai sus. Q.E.D. Și printr-un raționament analog este evidentă propoziția, cînd gravitatea descrește într-un raport oarecare dat cu distanțe de la centru, precum și cînd fluidul mai sus este mai rar, jos mai dens. Q.E.D.



COROLARUL 1. Prin urmare fundul nu este acționat de greutatea întreagă a fluidului apăsător ci susține numai acea parte a greutății care este descrisă în propoziție; restul greutății este susținut de figura boltită a fluidului.

COROLARUL 2. Dar la distanțe egale de la centru cantitatea presiunii este totdeauna aceeași, fie că suprafața apăsată este paralelă cu orizontul sau perpendiculară sau oblică; fie că fluidul continuat în sus de la suprafața apăsată, se urcă perpendicular după o linie dreapă, sau șerpuiește în mod oblic prin cavități sinuoase și canale, fie că ele sînt regulate sau foarte neregulate, largi sau foarte înguste. Se poate demonstra că în aceste împrejurări, presiunea nu se schimbă, aplicînd demonstrația acestei teoreme la cazul diverselor fluide.

COROLARUL 3. Prin același raționament se demonstrează de asemenea (potrivit propoziției XIX) că părțile fluidului greu, nu capătă nici o mișcare între ele din presiunea greutății apăsătoare; dacă excludem mișcarea produsă de condensare.

COROLARUL 4. Și de aceea dacă un alt corp de aceeași greutate specifică, lipsit de condensare se cufundă în acest fluid, el nu va primi nici o mișcare din presiunea greutății apăsătoare: nu se va coborî, nu se va urca nu va fi silit să-și schimbe figura. Dacă este sferic va rămîne sferic, indiferent de presiune; dacă este pătrat va rămîne pătrat; și aceasta fie că este moale, fie că este foarte fluid; fie că înoată liber în fluid, fie că se coboară la fund. Căci orice parte interioară a unui fluid se află în situația unui corp cufundat, și la fel este situația tuturor corpurilor cufundate de aceeași mărime, figură și greutate specifică. Dacă un corp cufundat păstrîndu-și greutatea se lichefiază și ia forma fluidului: acesta dacă mai întîi se urcă sau se coboară sau din cauza presiunii ia o figură nouă, și acum se urcă sau se coboară sau va tinde să ia o figură nouă: aceasta din cauza că greutatea lui și celelalte cauze ale mișcării se mențin. Dar (potrivit cazului 5, propoziția XIX) el va rămîne în repaus și-și va păstra figura. Deci și în cazul precedent.

COROLARUL 5. Prin urmare corpul care specific este mai greu decît fluidul care-l înconjură se va cufunda, și cel care este specific mai ușor

se va urca, şi urmează atîta mişcare şi schimbare a figurii cîtă poate produce acel surplus sau lipsă de greutate. Căci surplusul sau deficitul este echivalent cu impulsul cu care este acţionat un corp, de altfel în echilibru cu părţile fluidului; şi se poate asemăna cu surplusul sau lipsa greutăţii într-unul din talerele balanţei.

COROLARUL 6. Aşadar gravitatea corpurilor aşezate în fluid este de două feluri: una adevărată şi absolută, cealaltă aparentă, vulgară şi comparativă. Gravitatea absolută este forţa întreagă cu care corpul tinde în jos: relativă şi vulgară este surplusul gravităţii cu care tinde în jos mai mult decît fluidul înconjurător. În gravitatea de felul întîi părţile fluidelor şi ale tuturor corpurilor gravitează în locurile lor: şi astfel unindu-se greutăţile compun greutatea întregului. Căci totul luat împreună este greu, după cum se poate experimenta cu vasele pline de lichide: şi greutatea întregului este egală cu greutăţile tuturor părţilor şi deci se compune din ele. În greutatea de celălalt fel corpurile nu gravitează în locurile lor, adică, comparate între ele nu sunt preponderente, ci împiedicînd reciproc tendinţele de coborîre rămîn în locurile lor, ca şi cînd nu ar fi grele. Cele care sînt în aer şi nu sînt preponderente, de obicei nu se consideră grele. Cele care sînt preponderente de obicei se consideră grele, întrucît nu sînt susţinute de greutatea aerului. Greutăţile obişnuite nu sînt altceva decît surplusul greutăţilor adevărate faţă de greutatea aerului. De aceea în mod obişnuit se numesc uşoare acelea care sînt mai puţin grele, şi cedînd aerului preponderent tind în sus. Sînt uşoare în mod relativ, nu adevărat deoarece coboară în vid. Astfel în apă corpurile, care se coboară sau se urcă din cauza greutăţii mai mari sau mai mici, sînt în mod comparativ şi aparent grele sau uşoare, şi greutatea sau uşurinţa lor comparativă şi aparentă este surplusul sau lipsa cu care greutatea lor adevărată sau întrece în mărime greutatea apei sau este întrecută de ea. Dar acelea care nici nu coboară fiind preponderente, nici nu urcă cedînd celor preponderente, deşi cu greutăţile lor adevărate se adună la greutatea întregului, totuşi în mod comparativ şi în sens obişnuit nu sînt grele în apă. Căci demonstraţia cazului acestora este analogă.

COROLARUL 7. Cele demonstrate despre gravitate, se aplică la orice alte forţe centripete.

COROLARUL 8. Prin urmare dacă mediul, în care se mişcă un corp oarecare, este acţionat fie de gravitatea proprie, sau de altă forţă centripetă oarecare şi corpul este acţionat mai tare de acea forţă; diferenţa forţelor este forţa motoare, pe care am considerat-o în propoziţiile precedente ca pe o forţă centripetă. Dacă corpul este acţionat mai uşor de acea forţă, diferenţa forţelor trebuie considerată ca o forţă centrifugă.

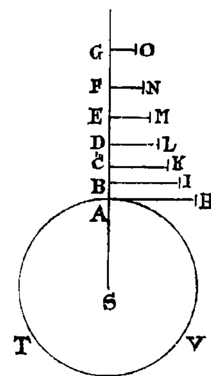
COROLARUL 9. Dar cum fluidele apăsînd corpurile închise nu schimbă figurile lor externe, mai apare (potrivit corolarului propoziţiei XIX) că nu vor schimba situaţia părţilor interne între ele: şi deci, dacă animalele se cufundă, şi orice senzaţie se naşte din mişcarea părţilor corpurile cufundate nici nu suferă, nici nu vor produce vreo senzaţie, decît dacă aceste corpuri pot fi condensate prin comprimare. Şi la fel este situaţia oricărui sistem de corpuri înconjurat de un fluid ce comprimă. Toate părţile sistemului vor fi agitate de aceleaşi mişcări, ca şi cînd ar fi situate în vid, şi ar reţine numai greutatea lor comparativă, afară de cazul cînd fluidul sau rezistă mişcărilor lor, sau este necesar să le unească prin compresiune.

PROPOZIŢIA XXI. TEOREMA XVI

Fie densitatea unui fluid oarecare proporţională cu compresiunea, şi părţile lui fie atrase în jos de o forţă centripetă invers proporţională cu distanţele lor de centru: zic, că dacă acele distanţe se iau continuu proporţionale, densităţile fluidului înmulţite cu acele distanţe de asemenea vor fi continuu proporţionale.

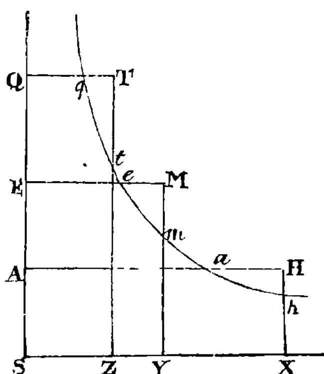
Să reprezinte *ATV* fundul sferic pe care apasă fluidul, *S* centrul, *SA SB*, *SC*, *SD*, *SE*, *SF* etc., distanţele continuu proporţionale. Să ridicăm perpendicularele *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN* etc. care să fie precum densităţile mediului în locurile *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*; şi greutăţile specific în acele locuri vor fi precum $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$ etc. sau, ceea ce este acelaşi lucru, precum $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$ etc.

Să ne închipuim mai întîi că aceste greutăţi se continuă în mod uniform de la *A* la *B*, de la *B* la *C*, de la *C* la *D* etc., descreşterile în punctele *B*, *C*, *D* etc., fiind efectuate în mod gradat. Şi aceste greutăţi înmulţite cu înălţimile *AB*, *BC*, *CD* etc., vor da presiunile *AH*, *BI*, *CK* etc., prin care este acţionat fundul *ATV* (potrivit teoremei XV). Prin urmare particula *A* susţine toate presiunile *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, mergînd la infinit; şi particula *B* toate presiunile afară de cea dintîi *AH*: şi particula *C* pe toate afară de primele două *AH*, *BI*; şi aşa mai departe: şi de aceea densitatea *AH* a primei particule *A* este către densitatea *BI* a particulei a doua *B* precum suma tuturor $AH+BI+CK+DL$, la infinit, către suma tuturor $BI+CK+DL$ etc. Şi *BI* densitatea particulei a doua *B* este către *CK* densitatea particulei a treia *C*, precum suma tuturor $BI + CK + DL$ etc., către suma tuturor $CK+DL$ etc. Aşadar sumele acelea sînt proporţionale cu diferenţele lor *AH*, *BI*, *CK* etc., şi de aceea continuu proporţionale (potrivit lemei I a acestei Cărţi) şi prin urmare diferenţele *AH*, *BI*, *CK* etc., proporţionale cu sumele, sînt şi continuu proporţionale. Din care cauză cum densităţile în locurile *A*, *B*, *C* etc., sint precum *AH*, *BI*, *CK* etc., acestea de asemenea vor fi continuu proporţionale Să procedăm prin salt, şi prin egalitate la distanţele *SA*, *SC*, *SE* continuu proporţionale, densităţile *AH*, *CK*, *EM* vor fi continuu proporţionale. Şi prin acelaşi raţionament la distanţe oarecare continuu proporţionale *SA*, *SD*, *SG*, densităţile *AH*, *DL*, *GO* vor fi continuu proporţionale. Să coincidă acum punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E* etc., în aşa fel ca progresia greutăţilor specifice de la fundul *A* spre partea cea mai de sus a fluidului să devină continuă şi la distanţe oarecare continuu proporţionale *SA*, *SD*, *SG*, densităţile *AH*, *DL*, *GO* fiind totdeauna continuu proporţionale, vor rămîne şi acum continuu proporţionale. Q.E.D.



COROLAR. De aici dacă se dă densitatea fluidului în două locuri, anume *A* şi *E*, se poate obţine densitatea lui într-un loc oarecare *Q*. Din centrul *S*, cu asimptotele dreptunghiulare *SQ*, *SX* să descriem o hiperbolă

tăind perpendicularele AH, EM, QT în a, e, q, precum și perpendicularele HX, MY, TZ, coborîte pe asimptota SX, în h, m, și t. Fie aria $YmtZ$ către aria dată $YmhX$ precum aria dată $EeqQ$ către aria dată $EeaA$; și linia Zt prelungită va tăia QT proporțională cu densitatea. Căci dacă linile SA, SE, SQ sînt continuu proporționale, ariile $EeqQ$, $EeaA$ vor fi egale, și de aici ariile proporționale cu ele $YmtZ$, $XhmY$ de asemenea egale, și liniile SX, SY, SZ, adică, AH, EM, QT continuu proporționale, cum trebuie. Și dacă liniile SA, SE, SQ obțin o altă ordine oarecare în seria celor continuu proporționale, liniile AH, EM, QT, din cauză că ariile hiperbolice sînt proporționale, vor obține aceeași ordine într-o altă serie a cantităților continuu proporționale.

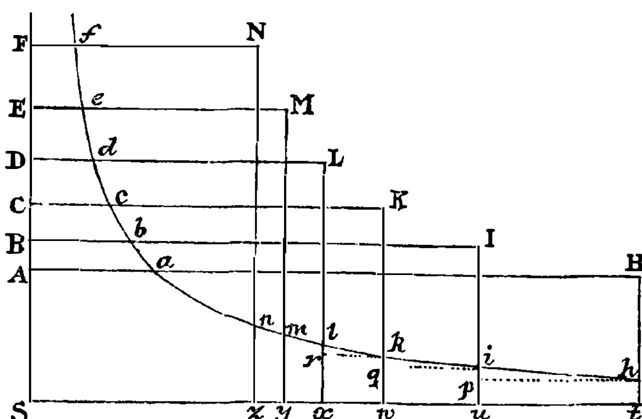


PROPOZIȚIA XXII. TEOREMA XVII

Fie densitatea unui fluid oarecare proporțională cu compresiunea, și părțile lui fie atrase în jos de o gravitate invers proporținală cu pătratele distanțelor lor de centru; zic că, dacă distanțele se iau în raport armonic, densitățile fluidului la aceste distanțe vor fi în progresie geometrică.

Să reprezinte S centrul, și SA, SB, SC, SD, SE distanțele în progresie geometrică. Să ridicăm perpendicularele AH, BI, CK etc., care sînt precum densitățile fluidului în locurile A, B, C, D, E etc., și greutățile lui specifice în aceleași locuri vor fi $\frac{AH}{SA^2}, \frac{BI}{SB^2}, \frac{CK}{SC^2}$ etc. Să ne închipuim că aceste gravități continuă în mod uniform, cea dintîi de la A la B, a doua de la B la C, a treia de la C la D etc., Și acestea înmulțite cu înălțimile AB, BC, CD, DE etc., sau ceea ce este același lucru, cu distanțele SA, SB, SC etc., proporționale cu înălțimile, vor da exponenții presiunilor $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$ etc. De aceea fiindcă densitățile sînt precum sumele presiunilor diferențele densităților $AH-BI$, $BI-CK$ etc., vor fi precum diferențele $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$ etc., a acestor sume. Din centrul S, cu asimptotele SA, Sx, să descriem o hiperbolă oarecare, care să taie perpendicularele AH, BI, CK etc., în a, b, c etc., precum și perpendicularele Ht, Iu, Kw, duse pe asimptota Sx în h, i, k; și diferențele densităților tu, uw etc., vor fi precum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$ etc. Și dreptunghiurile $tu \times th$, $uw \times ui$ etc., sau tp, uq etc., precum $\frac{AH \times th}{SA}, \frac{BI \times ui}{SB}$ etc., adică precum Aa, Bb etc. Căci, din natura hiperbolei, SA este către AH sau St, precum th către Aa, și deci $\frac{AH \times th}{SA}$ este egal cu Aa. Și printr-un raționament analog $\frac{BI \times ui}{SB}$ este egal cu Bb etc. Dar Aa, Bb, Cc etc. sînt continuu proporționale, și de aceea proporționale cu diferențele lor $Aa-Bb$, $Bb-Cc$ etc., și deci cu aceste diferențe sînt proporționale dreptunghiurile tp uq etc., precum și cu sumele diferențelor $Aa-Cc$

sau $Aa-Dd$ sumele dreptunghiurilor $tp+uq$ sau $tp+uq+wr$. Fie cît mai mulţi termeni de acelaşi fel, şi suma tuturor diferenţelor, anume $Aa-Ff$, va fi proporţională cu suma tuturor dreptunghiurilor, anume *Zthn*. Să mărim numărul termenilor şi să micşorăm distanţele punctelor *A*, *B*, *C* etc., la infinit şi dreptun-



ghiurile vor deveni egale cu aria hiperbolică *zthn*, şi deci cu această arie este proporţională diferenţa $Aa-Ff$. Căci să luăm oricîte distanţe, anume *SA*, *SD*, *SF* în progresie armonică, şi diferenţele $Aa-Dd$, $Dd-Ff$ vor fi egale; şi de aceea ariile *thlx*, *xlnz*, proporţionale cu aceste diferenţe vor fi egale între ele, şi densităţile *St*, *Sx*, *Sz*, adică, *AH*, *DL*, *FN* vor fi continuu proporţionale. Q.E.D.

COROLAR. De aici dacă se dau două densităţi oarecare ale unui fluid, anume *AH* şi *BI*, se va da aria *thiu*, corespunzînd cu diferenţa *tu* a acestora; şi de aici se va afla densitatea *FN* la o înălţime oarecare *SF*, luînd aria *thnz* către aria dată *thiu* precum diferenţa $Aa-Ff$ către diferenţa $Aa-Bb$.

SCOLIE

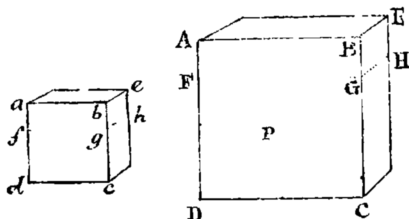
Printr-un raţionament analog se poate demonstra, că dacă gravitatea particulelor fluidului se micşorează în raport cu cubul distanţelor de la centru şi inversele pătratelor distanţelor *SA*, *SB*, *SC* etc. (anume $\frac{SA^3}{SA^2}$, $\frac{SA^3}{SB^2}$, $\frac{SA^3}{SC^2}$) se iau în progresie aritmetică; densităţile *AH*, *BI*, *CK* etc., vor fi în progresie geometrică. Şi dacă gravitatea se micşorează cu puterea a patra a distanţelor, şi inversele cuburilor distanţelor (anume $\frac{SA^4}{SA^3}$, $\frac{SA^4}{SB^3}$, $\frac{SA^4}{SC^3}$ etc.) se iau în progresie aritmetică; densităţile *AH*, *BI*, *CK* etc. vor fi în progresie geometrică. Şi aşa la infinit. Din nou dacă gravitatea particulelor fluidelor la toate distanţele este aceeaşi, şi distanţele sînt în progresie aritmetică, densităţile vor fi în progresie geometrică, după cum a aflat vestitul bărbat Edmund Halley. Dacă gravitatea este precum distanţa şi pătratele distanţelor sînt în progresie aritmetică, densităţile vor fi în progresie geometrică. Şi aşa la infinit. Aceasta se întîmplă astfel cînd densitatea fluidului condensat prin compresiune este ca forţa de compresiune sau, ceea ce este tot una, spaţiul

ocupat de fluid în raport invers cu această forţă. Ne putem imagina alte legi de condensare, ca aceea cînd cubul forţei de compresiune este precum puterea a patra a densităţii, sau cubul pătratului forţei acelaşi cu puterea a patra a raportului densităţii. În care caz, dacă gravitatea este în raport invers cu pătratul distanţei de la centru, densitatea va fi în raport invers cu cubul distanţei. Să ne închipuim că cubul forţei de compresiune este precum puterea a cincia a densităţii, şi dacă gravitatea este în raport invers cu pătratul distanţei, densitatea va fi în raport invers cu puterea $\frac{3}{2}$ a distanţei. Să ne închipuim că forţa de compresiune este proporţională cu pătratul densităţii şi gravitatea în raport invers cu pătratul distanţei, şi densitatea va fi în raport invers cu distanţa. Ar fi prea lung să considerăm toate cazurile. De altfel prin experienţă se constată că densitatea aerului este sau precis sau cel puţin cît se poate de aproape precum forţa de compresiune: şi de aceea densitatea aerului în atmosfera Pămîntului este precum greutatea întregului aer ce apasă, adică precum înălţimea mercurului în barometru.

PROPOZIŢIA XXIII. TEOREMA XVIII

Dacă densitatea unui fluid compus din particule care fug una de alta, este precum compresiunea, forţele centrifuge ale particulelor sînt invers proporţionale cu distanţele centrelor lor. Şi viceversa, particulele forţelor care sînt invers proporţionale cu distanţele centrelor care fug una de alta, compun un fluid elastic, a cărui densitate este proporţională cu compresiunea.

Să ne închipuim fluidul închis în spaţiul cubic ACE, apoi redus prin compresiune la un spaţiu cubic mai mic ace; şi distanţele particulelor, obţinînd o situaţie asemenea între ele în ambele spaţii, vor fi precum laturile AB, ab, ale cuburilor; şi densităţile mediilor în raport invers cu spaţiile cuprinzătoare AB^3 şi ab^3. În faţa plană $ABCD$ a cubului mai mare să luăm pătratul DP egal cu faţa plană db a cubului mai mic; şi prin ipoteză, presiunea, cu care pătratul DP apasă fluidul închis, va fi către presiunea cu care pătratul db acţionează asupra fluidului închis, precum densităţile mediilor între ele, adică precum ab^3 către AB^3. Dar presiunea cu care pătratul DB apasă fluidul închis, este către presiunea, cu care pătratul DB apasă acelaşi fluid, precum pătratul DB către pătratul DP, adică precum AB^2 către ab^2. Deci, prin egalitate, presiunea cu care pătratul DB acţionează fluidul, este către presiunea cu care pătratul db acţionează asupra fluidului, precum ab către AB. Să împărţim fluidul în două părţi prin planele FGH, fgh, duse prin mijlocul cuburilor, şi acestea se apasă reciproc cu aceleaşi forţe, cu care sînt apăsate de planele AC, ac, adică, în raportul lui ab către AB: şi deci forţele centrifuge, cu care aceste forţe sînt susţinute, sînt în acelaşi raport. Numărul particulelor fiind egal şi situat asemenea în fiecare cub, forţele pe care toate particulele le exercită asupra tuturor după planele FGH, fgh, sînt precum forţele



pe care fiecare le exercită asupra fiecăruia. Prin urmare forţele, pe care fiecare le exercită asupra fiecăruia după planul *fgh* în cubul mai mare, sînt către forţele, pe care fiecare le exercită pe fiecare după planul *fgh* în cubul mai mic, precum *ab* către *AB*, adică în raport invers cu distanţele reciproce ale particulelor. Q.E.D.

Şi viceversa, dacă forţele diverselor particule sînt în raport invers cu distanţele, adică, în raport invers cu laturile *AB*, *ab* ale cuburilor; sumele forţelor vor fi în acelaşi raport, şi presiunile laturilor *DB*, *db* precum sumele forţelor; şi presiunea pătratului *DP* către presiunea laturei *DB* precum ab^2 către AB^2. Şi, prin egalitate, presiunea pătratului *DP* către presiunea laturii *db* precum ab^3 către AB^3, adică, forţa de compresiune către forţa de compresiune precum densitatea către densitate. Q.E.D.

SCOLIE

Printr-un raţionament analog, dacă forţele centrifuge ale particulelor sînt în raport invers cu pătratul distanţelor între centre, cuburile forţelor de compresiune vor fi precum puterea a patra a densităţilor. Dacă forţele centrifuge sînt în raport invers cu puterea a treia sau a patra a distanţelor, cuburile forţelor de compresiune vor fi precum puterea a cincia sau a şasea a densităţilor. Şi în mod universal, dacă *D* este distanţa, şi *E* densitatea fluidului comprimat, şi forţele centrifuge sînt în raport invers cu puterea oarecare D^n a distanţei, al cărui indice este numărul *n*; forţele de compresiune vor fi precum laturile cubice ale puterii E^{n+2}, al cărui indice este numărul $n+2$: şi invers. Dar toate acestea trebuie înţelese despre forţele centrifuge ale particulelor care se termină în particulele învecinate, sau nu sînt împrăştiate prea departe. Un astfel de exemplu avem în corpurile magnetice. Forţa atractivă a acestora se termină aproape în corpurile învecinate de genul lor. Forţa magneţilor se reduce printr-o lamă de fier interpusă, şi se termină aproape în fier. Căci corpurile mai îndepărtate sînt atrase nu atît de magnet cît de lamă. În acelaşi fel dacă particulele fug de alte particule de genul lor foarte apropiate, dar asupra particulelor îndepărtate nu exercită nici o forţă, din particule de acest fel se compun fluidele care au fost tratate în această propoziţie. Căci dacă forţa unei particule oarecare se propagă la infinit, va fi necesară o forţă mai mare pentru o condensare egală a unei cantităţi mai mari de fluid. Dar că fluidele elastice constau din particule care se resping reciproc, este o chestiune de fizică. Noi am demonstrat în mod matematic proprietatea fluidelor constînd din particule de acest fel, pentru a da ocazie filozofilor să se ocupe de această chestiune.

SECŢIUNEA VI

Despre mişcarea şi rezistenţa corpurilor pendulare

PROPOZIŢIA XXIV. TEOREMA XIX

Cantităţile de materie în corpurile pendulare, ale căror centre de oscilaţie sînt la distanţe egale de la centrul de suspensiune, sînt într-un raport compus din raportul greutăţilor şi pătratul raportului timpurilor de oscilaţie în vid.

Căci viteza pe care o poate naşte o forţă dată într-o materie dată, într-un timp dat, este precum forţa şi timpul, şi în raport invers cu materia. Cu cît este mai mare forţa sau este mai mare timpul, sau este mai mică materia, cu atît se va naşte o viteză mai mare. Ceea ce este evident potrivit legii II a mişcării. Într-adevăr dacă pendulele au aceeaşi lungime, forţele motoare în locurile situate la distanţe egale de perpendiculară sînt precum greutăţile: şi de aceea dacă două corpuri oscilînd descriu arce egale, şi arcele se împart în părţi egale; cum timpurile în care corpurile descriu diversele părţi corespunzătoare ale arcelor sînt precum timpurile oscilaţiilor întregi, vitezele vor fi între ele în părţile corespunzătoare ale oscilaţiilor, precum forţele motoare şi timpurile întregi de oscilaţii şi în raport invers cu cantităţile de materie: şi deci cantităţile de materie sînt precum forţele şi timpurile de oscilaţie şi în raport invers cu vitezele. Dar vitezele sînt în raport invers cu timpurile, şi deci timpurile sînt în acelaşi raport şi vitezele în raport invers cu pătratele timpurilor, şi de aceea cantităţile de materie sînt precum forţele motoare şi pătratele timpurilor, adică, precum greutăţile şi pătratele timpurilor Q.E.D.

COROLARUL 1. Şi de aceea dacă timpurile sînt egale, cantităţile de materie în diversele corpuri vor fi precum greutăţile.

COROLARUL 2. Dacă greutăţile sînt egale, cantităţile de materie vor fi precum pătratele timpurilor.

COROLARUL 3. Dacă cantităţile de materie sînt egale, greutăţile vor fi în raport invers cu pătratele timpurilor.

COROLARUL 4. De unde cum pătratele timpurilor, celelalte fiind egale, sînt precum lungimile pendulelor; dacă şi timpurile şi cantităţile de materie sînt egale, greutăţile vor fi precum lungimile pendulelor.

COROLARUL 5. Şi în mod universal, cantitatea de materie pendulară este precum greutatea şi pătratul timpului, şi în raport invers cu lungimea pendulului.

COROLARUL 6. Dar şi într-un mediu fără rezistenţă cantitatea de materie pendulară este precum greutatea comparativă şi pătratul timpului şi în raport invers cu lungimea pendulului. Căci greutatea comparativă este forţa motoare a corpului într-un mediu oarecare greu, după cum am explicat mai sus; şi deci prestează tot atîta într-un astfel de mediu fără rezistenţă ca şi greutatea absolută în vid.

COROLARUL 7. Şi de aici devine evidentă o metodă atît pentru a compara corpurile între ele, în ceea ce priveşte cantitatea de materie în fiecare, cît şi de a compara greutăţile aceluiaşi corp în diverse locuri, pentru a cunoaşte variaţia gravităţii. Făcînd însă experienţe foarte precise totdeauna am aflat cantitatea de materie în diversele corpuri proporţională cu greutatea lor.

PROPOZIŢIA XXV. TEOREMA XX

Corpurile pendulare cărora, într-un mediu oarecare, li se opune o rezistenţă în raport cu momentele timpului, şi corpurile pendulare care se mişcă într-un mediu fără rezistenţă de aceeaşi greutate specifică, efectuează oscilaţiile pe o cicloidă în acelaşi timp, şi descriu simultan părţi proporţionale de arce.

Fie *AB* un arc de cicloidă, pe care un corp *D* îl descrie într-un timp oarecare oscilînd într-un mediu fără rezistenţă. Să-l bisectăm prin *C*, în aşa fel ca *C* să fie punctul cel mai jos al ei; şi forţa acceleratoare cu care corpul este acţionat într-un loc oarecare *D* sau *d* sau *E* va fi precum lungimea arcului *CD* sau *Cd* sau *CE*. Să exprimăm forţa prin acelaşi arc, şi cum rezistenţa este precum momentul timpului, şi deci este dată, să o reprezentăm prin partea dată *CO* a arcului cicloidei, şi să luăm arcul *Od* în acelaşi raport către arcul *CD* pe care-l are arcul *OB* către arcul *CB*; şi forţa cu care corpul în *d* este acţionat într-un mediu rezistent, deoarece este surplusul forţei *Cd* asupra rezistenţei *CO*, se va exprima prin arcul *Od*, şi deci va fi către forţa, cu care corpul *D* este acţionat într-un mediu fără rezistenţă în locul *D*, precum arcul *Od* către arcul *CD*; şi de aceea şi în locul *B* precum arcul *OB* către arcul *CB*. Prin urmare, dacă două corpuri *D*, *d* pleacă din locul *B*, şi sînt acţionate de aceste forţe: cum forţele la început sînt precum arcele *CB* şi *OB*, vitezele prime şi arcele descrise mai întîi vor fi în acelaşi raport. Fie acele arce *BD* şi *Bd*, şi arcele rămase *CD*, *Od* vor fi în acelaşi raport. Prin urmare forţele, proporţionale cu *CD*, *Od* vor rămîne în acelaşi raport ca şi la început, şi de aceea corpurile vor continua să descrie împreună arce în acelaşi raport. Prin urmare forţele şi vitezele şi arcele rămase *CD*, *Od* vor fi totdeauna precum arcele întregi *CB*, *OB* şi de aceea arcele rămase vor fi descrise împreună. Din care cauză cele două corpuri *D*, *d* vor ajunge împreună la locurile *C* şi *O*, anume unul într-un mediu fără rezistenţă la locul *C*, şi celălalt într-un mediu rezistent la locul *O*. Cum însă vitezele în *C* şi *O* sînt precum arcele *CB*, *OB*; arcele, pe care le descriu corpurile mai tîrziu înaintînd împreună, vor fi în acelaşi raport. Fie acelea *CE* şi *Oe*. Forţa cu care corpul *D* este întîrziat într-un mediu fără rezistenţă în *E* este precum *CE*, şi forţa cu care un corp *d* este întîrziat într-un mediu rezistent în *e* este precum suma forţei *Ce* şi a rezistenţei *CO*, adică precum *Oe*; şi de aceea forţele cu care corpurile sînt întîrziate, sînt precum arcele *CB*, *OB* proporţionale cu arcele *CE*, *Oe*; şi deci vitezele, întîrziate în raportul dat, rămîn în acelaşi raport dat. Aşadar vitezele şi arcele descrise cu ele sînt totdeauna între ele în raportul dat al arcelor *CB* şi *OB*; şi de aceea dacă se adună arcele întregi *AB*, *aB* în acelaşi raport, corpurile *D*, *d* vor descrie împreună arcele, şi în locurile *A* şi *a* vor pierde simultan orice mişcare. Aşadar oscilaţiile complete sînt izocrone,

şi părţile oarecare *BD*, *Bd* sau *BE*, *Be* care sînt descrise în acelaşi timp sînt proporţionale cu arcele întregi *BA*, *Ba* Q.E.D.

COROLAR. Aşadar mişcarea cea mai rapidă într-un mediu rezistent nu cade în punctul cel mai de jos *C*, ci se află în acel punct *O*, prin care se bisectează arcul întreg descris *aB*. Şi corpul progresînd apoi spre *a*, este întîrziat cu aceleaşi grade cu care mai înainte era accelerat în căderea sa de la *B* la *O*.

PROPOZIŢIA XXVI. TEOREMA XXI

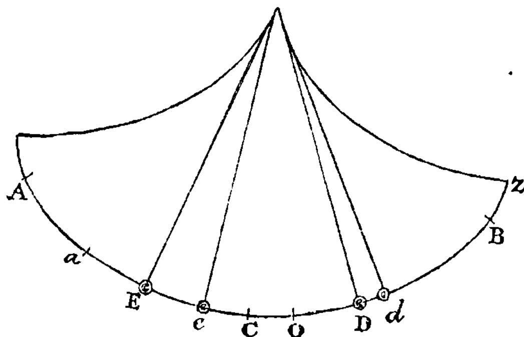
Oscilaţiile pe o cicloidă ale corpurilor pendulare, cărora li se opune o rezistenţă în raportul vitezelor, sînt izocrone.

Căci dacă două corpuri, egal depărtate de la centrele de suspensiune, oscilînd descriu arce neegale, şi vitezele în părţile corespunzătoare ale arcelor sînt între ele precum arcele întregi; rezistenţele proporţionale cu vitezele, vor fi şi între ele precum arcele. Prin urmare dacă aceste rezistenţe se scad sau se adună la forţele motoare produse de gravitate, care sînt precum arcele, diferenţele sau sumele vor fi între ele în acelaşi raport al arcelor: şi cum creşterile sau descreşterile vitezelor sînt precum aceste diferenţe sau sume, vitezele, totdeauna vor fi precum arcele întregi. Aşadar vitezele, dacă într-un caz oarecare sînt precum arcele întregi, vor rămîne totdeauna în acelaşi raport. Dar la începutul mişcării, cînd corpurile încep să coboare şi să descrie acele arce, forţele, fiind proporţionale cu arcele, vor produce viteze proporţionale cu arcele. Aşadar vitezele totdeauna vor fi precum arcele întregi ce trebuie descrise, şi de aceea arcele vor fi descrise simultan. Q.E.D.

PROPOZIŢIA XXVII. TEOREMA XXII

Dacă unor corpuri pendulare li se opune o rezistenţă proporţională cu pătratul vitezelor, diferenţele dintre timpurile de oscilaţie într-un mediu rezistent şi timpurile de oscilaţie într-un mediu fără rezistenţă de aceeaşi greutate specifică, vor fi aproape proporţionale cu arcele descrise prin oscilare.

Căci să presupunem că pendule egale într-un mediu rezistent descriu arcele neegale *A*, *B*; şi rezistenţa corpului pe arcul *A* va fi către rezistenţa corpului în partea corespunzătoare a arcului *B*, proporţională cu pătratul vitezelor, adică, aproximativ precum *AA* către *BB*. Dacă rezistenţa pe arcul *B* este către rezistenţa pe arcul *A* precum *AB* către *AA*; timpurile în arcele *A* şi *B* vor fi egale, potrivit propoziţiei de mai sus. Şi de aceea rezistenţa *AA* în arcul *A*, sau *AB* în arcul *B*, cauzează surplusul timpului în arcul *A* asupra timpului



într-un mediu fără rezistență; și rezistența *BB* cauzează excesul de timp în arcul *B* asupra timpului într-un mediu fără rezistență. Dar acele surplusuri sînt aproape precum forțele eficiente *AB* și *BB*, adică,. precum arcul *A* și *B*. Q.E.D.

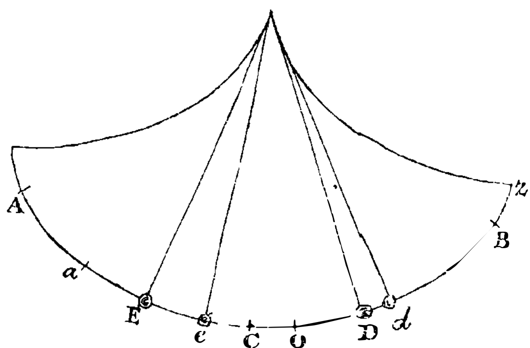
COROLARUL 1. Deci din timpurile de oscilație, într-un mediu rezistent, efectuate pe arce neegale, se pot cunoaște timpurile de oscilație într-un mediu fără rezistență de aceeași greutate specifică. Căci diferența timpurilor va fi către surplusul timpului pe arcul mai mic față de timpul într-un mediu fără rezistență, precum diferența arcelor către arcul mai mic.

COROLARUL 2. Oscilațiile mai scurte sînt mai izocrone, și acele foarte scurte decurg aproximativ în aceleași timpuri ca într-un mediu fără rezistență. Dar timpurile acelora care se întîmplă în arce mai mari, sînt cu ceva mai mari, fiindcă rezistența în coborîrea corpului în care timpul se prelungește, este mai mare în proporția lungimii descrise în coborîre, decît rezistența în urcarea următoare în care timpul se scurtează. Dar timpul oscilațiilor, atît al celor scurte cît și a celor lungi se pare că se prelungește întrucîtva prin mișcarea mediului. Căci corpurilor întîrziate li se opune o rezistență ceva mai mică, în raport cu viteza, și corpurilor accelerate ceva mai mare decît acelora care înaintează în mod uniform: și aceasta fiindcă mediul, cu mișcarea pe care a primit-o de la corpuri, înaintînd în aceeași direcție, în primul caz este agitat mai tare, în cel din urmă mai puțin; și astfel conspiră mai mult sau mai puțin cu corpurile mișcate. Prin urmare pendulelor în coborîre le rezistă mai mult, în urcare mai puțin în raport cu viteza, și din ambele motive timpul se prelungește.

PROPOZIȚIA XXVIII. TEOREMA XXIII

Dacă unui corp pendular oscilînd pe o cicloidă i se opune o rezistență în raportul momentelor timpului, rezistența lui către forța gravitații, va fi precum surplusul arcului descris în coborîrea întreagă față de arcul descris în urcarea următoare, către dublul lungimii pendulului.

Să reprezinte *BC* arcul descris în coborîre, *Ca* arcul descris în urcare, și *Aa* diferența arcelor: și rămînînd cele construite și demonstrate în propoziția XXV, forța, cu care corpul oscilant este acționat într-un loc oarecare *D*, va fi către forța de rezistență precum arcul *CD* către arcul *CO*, care este jumătatea diferenței *Aa*. Și de aceea forța cu care corpul oscilant este acționat la începutul sau în punctul cel mai înalt al cicloidei, adică, forța gravitații, va fi către rezistență precum arcul cicloidei între punctul cel mai înalt și punctul cel mai de jos *C* către



arcul CO; adică (dacă arcele se dublează) precum arcul întregei cicloide, sau lungimea dublă a pendulului către arcul Aa. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XXIX. PROBLEMA VI

Presupunînd că unui corp oscilînd pe o cicloidă i se opune o rezistență proporțională cu pătratul vitezei: să aflăm rezistența în diversele locuri.

Fie Ba arcul descris de o oscilație întreagă, și fie C punctul cel mai de jos al cicloidei, și CZ jumătatea arcului întreg al cicloidei, egal cu lungimea pendulului; și se cere rezistența corpului într-un loc oarecare D. Să tăiem dreapta infinită OQ prin punctele O, S, P, Q, în așa fel, ca (dacă se ridică perpendicularele OK, ST, PI, QE, și din centrul O și cu asimptotele OK, OQ se descrie iperbola $TIGE$ tăind perpendicularele ST, PI, QE în T, I și E, și prin punctul I se duce KF paralelă cu asimptota OQ întîlnind asimptota OK în K, și perpendicularele ST și QE în L și F) aria hiperbolică $PIEQ$ va fi către aria hiperbolică $PITS$ precum arcul BC descris în coborîrea corpului către arcul Ca descris în urcarea corpului, și aria IEF către aria ILT

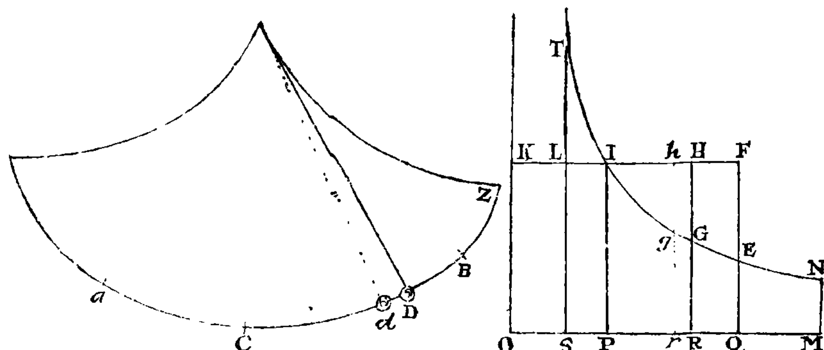
precum OQ către OS. Apoi din perpendiculara MN să tăiem aria hiperbolică $PINM$ care să fie către aria hiperbolică $PIEQ$ precum arcul CZ către arcul BC descris în coborîre. Și dacă prin perpendiculara RG tăiem aria hiperbolică $PIGR$, care să fie către aria $PIEQ$ precum arcul CZ către arcul BC descris în coborîre. Și dacă cu perpendiculara RG se taie aria hiperbolică $PIGR$, care este către aria $PIEQ$ precum un arc oarecare CD către arcul BC descris în coborîrea întreagă; rezistența în locul D va fi către forța gravității, precum aria $\frac{OR}{OQ}$ $IEF - IGH$ către aria $PINM$.

Căci cum forțele născute din gravitatea cu care corpul este acționat în locurile Z, B, D, a, sînt precum arcele CZ, CB, CD, Ca, și acele arce sînt precum ariile $PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITS$; să exprimăm atît arcele cît și forțele respectiv prin aceste arii. Afară de aceea, fie Dd un spațiu cît se poate de mic descris de corpul în coborîre, și să-l exprimăm prin aria foarte mică $RGgr$ cuprinsă de paralele RG, rg; și să prelungim rg pînă în h, așa fel ca $GHhg$, și $RGgr$ să fie descreșterile contemporane ale ariilor IGH, $PIGR$.

Şi creşterea $GHhg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, sau $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$ a ariei $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$, va fi către descreşterea $RGgr$, sau $Rr \times RG$ a ariei $PIGR$, precum $HG - \frac{IEF}{OQ}$ către RG; şi deci precum $OR \times HG - \frac{OR}{OQ} IEF$ către $OR \times GR$ sau $OP \times PI$, adică (din cauza că $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$ şi $PIGR + IGH$ sînt egale) precum $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF$ către $OPIK$. Prin urmare dacă aria $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ se numeşte Y, şi se dă descreşterea $RGgr$ al ariei $PIGR$, creşterea ariei Y va fi precum $PIGR - Y$.

Căci dacă V înseamnă forţa născută din gravitatea proporţională cu arcul CD ce trebuie descris, cu care corpul este acţionat în D, şi punem R pentru rezistenţă; $V - R$ va fi forţa întreagă cu care corpul este acţionat în D. Prin urmare creşterea vitezei este precum $V - R$ şi intervalul de timp, în care este născută luate împreună. Dar şi viteza însăşi este precum creşterea contemporană a spaţiului descris şi în raport invers cu intervalul de timp. De unde, dacă rezistenţa prin ipoteză este precum pătratul vitezei, creşterea rezistenţei (potrivit lemei II) va fi precum viteza şi creşterea vitezei împreună, adică precum momentul spaţiului şi $V - R$ luate împreună; şi deci, dacă se dă momentul spaţiului, precum $V - R$; şi de aceea, dacă în loc de V scriem expresia ei $PIGR$, şi rezistenţa R se exprimă printr-o altă arie oarecare Z, precum $PIGR - Z$.

Prin urmare aria $PIGR$ descrescînd în mod uniform prin scăderea momentelor date, aria Y creşte în raportul lui $PIGR - Y$, şi aria Z în raportul $PIGR - Z$. Şi de aceea dacă ariile Y şi Z încep deodată şi la început sînt egale, prin adunarea momentelor egale vor continua să fie egale, şi apoi descrescînd la fel prin momente egale, vor dispare deodată. Şi invers, dacă încep deodată şi dispar deodată, vor avea momente egale şi totdeauna vor fi egale: aceasta fiindcă dacă rezistenţa Z creşte, viteza împreună cu arcul Ca, care este descris în urcarea corpului, se micşorează; şi punctul în care întreaga



mişcare împreună cu rezistenţa încetează apropiindu-se de punctul C, rezistenţa va dispare mai repede ca aria Y. Şi se va întîmpla contrariul cînd rezistenţa scade.

Într-adevăr aria Z începe şi se termină cînd rezistenţa este nulă, adică la începutul mişcării cînd arcul CD este egal cu arcul CB şi dreapta RG cade

pe dreapta QE, şi la sfîrşitul mişcării cînd arcul CD este egal cu arcul Ca şi RG cade pe dreapta ST. Şi aria Y sau $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ începe şi se termină cînd este nulă; şi deci cînd $\frac{OR}{OQ}IEF$ şi IGH sînt egale: adică (prin construcţie) cînd dreapta RG cade succesiv pe dreptele QE şi ST. Şi deci ariile încep şi dispar deodată, şi de aceea sînt egale totdeauna. Prin urmare aria $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ este egală cu aria Z, prin care se exprimă rezistenţa şi de aceea este către aria $PINM$, prin care se exprimă gravitatea, precum rezistenţa către gravitate. Q.E.D.

COROLARUL 1. Aşadar rezistenţa în locul cel mai de jos C este către forţa gravităţii, precum aria $\frac{OP}{OQ}IEF$ către aria $PINM$.

COROLARUL 2. Dar ea devine maximă, cînd aria $PIHR$ este către aria IEF precum OR către OQ. Căci în acest caz momentul ei (anume $PIGR-Y$) devine nul.

COROLARUL 3. De aici se cunoaşte şi viteza în diversele locuri: căci ea este precum rădăcina pătrată a rezistenţei, şi la începutul mişcării este egală cu viteza corpului ce oscilează pe cicloidă fără vreo rezistenţă.

De altfel din cauza dificultăţii calculului prin care trebuie aflate rezistenţa şi viteza prin această propoziţie, am socotit necesar să adaug următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA XXX. TEOREMA XXIV

Dacă o dreaptă aB este egală cu arcul cicloidei pe care o descrie un corp oscilînd, şi la diversele ei puncte D se ridică perpendicularele DK, care sînt către lungimea pendulului precum rezistenţa corpului în punctele corespunzătoare ale arcului către forţa gravităţii, zic că diferenţa între arcul descris în coborîrea totală şi arcul descris în urcarea totală următoare înmulţită cu semisuma arcelor, va fi egală cu aria BKa înconjurată de toate perpendicularele DK.

Căci să exprimăm atît arcul cicloidei, descris într-o oscilaţie întreagă, prin dreapta aB egală cu ea cît şi arcul care ar fi descris în vid prin lungimea AB. Să bisectăm pe AB prin C, şi punctul C va reprezenta punctul cel mai de jos al cicloidei, şi CD va fi precum forţa născută de gravitate, prin care corpul în D este acţionat în direcţia tangentei cicloidei, şi va avea către lungimea pendulului raportul pe care-l are forţa în D către forţa gravităţii. Să exprimăm deci, forţa aceea prin lungimea CD, şi forţa gravităţii prin lungimea pendulului şi dacă pe DE luăm DK în acel raport către lungimea pendulului pe care-l are rezistenţa către gravitate, DK va fi

expresia rezistenței. Din centrul C și cu intervalul CA sau CB să construim semicercul $BEeA$.

Să presupunem că corpul descrie într-un timp, cît se poate de mic spațiul Dd, și ridicînd perpendicularele DE, de întîlnind circumferințele în E și e, acestea vor fi precum vitezele pe care corpul coborînd în vid din punctul B, le-ar cîștiga în locurile D și d. Aceasta este evident (potrivit propoziției LII, Cartea I).

Să exprimăm așadar aceste viteze prin perpendicularele DE, de; și fie DF viteza pe care o cîștigă în D, căzînd din B într-un mediu rezistent. Și dacă din centrul C și cu intervalul CF descriem cercul FfM întîlnind dreptele de și AB în f și M, M va fi locul spre care s-ar urca apoi fără rezistență ulterioară, și df viteza pe care ar cîștiga-o în d. De unde, de asemenea dacă Fg înseamnă momentul vitezei pe care corpul D, descriind spațiul cît se poate de mic Dd, îl pierde din rezistența mediului; și se ia CN cu Cg: atunci N va fi locul spre care s-ar urca corpul după aceea fără o rezistență ulterioară, și MN va fi descreșterea urcării provenită din pierderea acelei viteze. Să coborîm pe df perpendiculara Fm, și descreșterea Fg a vitezei DF născută de rezistența DK, va fi către creșterea fm a aceleiași viteze născută de forța CD, precum forța generatoare DK către forța generatoare CD. Dar și din cauza triunghiurilor asemenea Fmf, Fhg, FDC, este fm către Fm sau Dd precum CD către DF; și prin egalitate Fg către Dd precum DK către DF. La fel Fh către Fg precum DF, către CF; și prin egalitate perturbată, Fh sau MN către Dd precum DK către CF sau CM; și deci suma tuturor $MN \times CM$ va fi egală cu suma tuturora $Dd \times DK$. La punctul mobil M să ne închipuim ridicată totdeauna o ordonată dreptunghiulară egală cu nedeterminata CM, care printr-o mișcare continuă este înmulțită cu lungimea întreagă Aa; și trapezul descris prin acea mișcare sau dreptunghiul $Aa \times \frac{1}{2} aB$ egal cu el va fi egal cu suma tuturor $MN \times CM$, și deci cu suma tuturor $Dd \times DK$, adică, cu aria $BKVTa$. Q.E.D.

COROLAR. Deci din legea rezistenței și din diferența Aa a arcelor Ca, CB se poate determina aproximativ proporția rezistenței, către gravitate. Căci dacă rezistența Dk este uniformă, figura $BKTa$ va fi un dreptunghi format de Ba și DK; și deci dreptunghiul format de $\frac{1}{2}$ Ba și Aa va fi egal cu dreptunghiul format de Ba și DK, și DK va fi egal cu $\frac{1}{2} Aa$. Din care cauză cum DK este expresia rezistenței, și lungimea pendulului expresia gravității, rezistența va fi către gravitate precum $\frac{1}{2} Aa$ către lungimea pendulului; tocmai cum s-a demonstrat în propoziția XXVIII.

Dacă rezistența este precum viteza, figura $BKTa$ va fi aproximativ o elipsă. Căci dacă un corp, într-un mediu fără rezistență, ar descrie într-o oscilație întreagă lungimea BA, viteza într-un loc oarecare D va fi precum ordonata DE a cercului descris pe diametrul AB. Prin urmare cum Ba într-un mediu rezistent, și BA într-un mediu fără rezistență, sînt descrise aproape în timpuri egale, și deci vitezele în diversele puncte ale lui Ba sînt aproximativ către vitezele în punctele corespunzătoare ale lungimii BA, precum este Ba către BA; viteza în punctul D într-un mediu rezistent va fi precum ordonata cercului sau elipsei descrise pe diametrul Ba; și deci

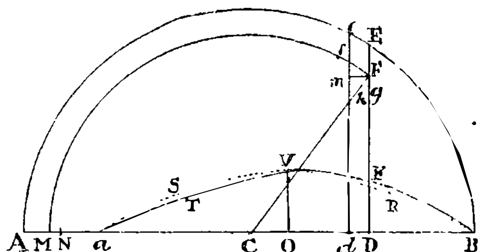
figura $BKVTa$ va fi aproximativ o elipsă. Deoarece rezistența se presupune proporțională cu viteza, fie OV expresia rezistenței în punctul mediu O; și elipsa $BRVSa$, descrisă din centrul O, cu semiaxele OB, OV, va fi egală aproximativ cu figura $BKVTa$, și cu dreptunghiul $Aa \times Bo$ egal cu ea. Prin urmare $Aa \times BO$ este către $OV \times BO$ este precum aria elipsei către $OV \times BO$: adică Aa către OV precum aria semicercului către pătratul razei, sau aproximativ precum 11 către 7: Și de aceea $\frac{7}{11} Aa$ către lungimea pendulului precum rezistența corpului oscilant în O către gravitatea lui. Căci dacă rezistența DK este proporțională cu pătratul vitezei, figura $BKVTa$ va fi aproape o parabolă avînd vîrful V și axa OV, și deci va fi aproximativ egală cu dreptunghiul format de $\frac{2}{3} BA$ și OV. Așadar dreptunghiul format de $\frac{1}{2} Ba$ și Aa este egal cu dreptunghiul format de $\frac{2}{3} Ba$ și OV, și deci egal cu $\frac{3}{4} Aa$: și de aceea rezistența în O a corpului oscilant către gravitatea lui precum $\frac{3}{4} Aa$ către lungimea pendulului.

Dar cred că aceste concluzii sînt destul de precise în problemele practice. Căci fiindcă elipsa sau parabola $BRVSa$ coincide cu figura $BKVTa$ în punctul mijlociu V, aceasta dacă întrece în mărime figura de partea BRV sau VSa, va fi mai mică decît ea de cealaltă parte, și astfel va fi aproximativ egală cu ea.

PROPOZIȚIA XXXI. TEOREMA XXV

Dacă rezistența unui corp oscilant în diversele părți proporționale ale arcelor descrise se mărește sau se micșorează după un raport dat, diferența între arcul descris la coborîre și arcul descris la urcarea următoare, va crește sau va descrește în același raport.

Căci diferența se naște din întîrzierea pendulului din cauza rezistenței mediului, și deci este precum întîrzierea întreagă și rezistența întîrzietoare proporțională cu ea. În propoziția precedentă dreptunghiul format de dreapta $\frac{1}{2} aB$ și diferența Aa a arcelor CB, Ca era egal cu aria $BKTa$. Și aria aceea, dacă lungimea aB rămîne, se mărește sau se micșorează în raportul ordonatelor DK; adică, în raportul rezistenței, și deci este precum lungimea aB și rezistența luate împreună. Așadar dreptunghiul format de Aa și $\frac{1}{2} aB$ este precum aB și rezistența luate împreună, și de aceea Aa precum rezistența. Q.E.D.



COROLARUL 1. De unde dacă rezistența este precum viteza, diferența arcelor în același mediu va fi precum arcul întreg descris: și invers.

COROLARUL 2. Dacă rezistenţa este în raportul pătratului vitezei, diferenţa va fi proporţională cu pătratul arcului întreg: şi invers.

COROLARUL 3. Şi în general, dacă rezistenţa este proporţională cu puterea a treia sau alta oarecare a vitezei, diferenţa va fi în acelaşi raport cu arcul întreg şi invers.

COROLARUL 4. Şi dacă rezistenţa este parte în raportul simplu cu viteza, parte în raportul pătratului, diferenţa va fi parte în raportul arcului întreg şi parte în raportul pătratului ei: şi invers. Legea şi raportul rezistenţei pentru viteză, vor fi aceleaşi ca şi ale diferenţei pentru lungimea arcului.

COROLARUL 5. Şi deci, dacă, un pendul descriind succesiv arce neegale, se poate afla raportul creşterii şi al descreşterii acestei diferenţe pentru lungimea arcului descris; vom avea de asemenea raportul creşterii şi descreşterii rezistenţei pentru o viteză mai mare sau mai mică.

SCOLIE GENERALĂ

Din aceste propoziţii, prin oscilaţiile pendulelor în medii oarecare, se poate afla rezistenţa mediilor. Într-adevăr eu am aflat rezistenţa aerului prin experienţele următoare. Am suspendat o sferă de lemn avînd greutatea de $57\frac{7}{22}$ uncii romane, diametrul de $6\frac{7}{8}$ degete de Londra, cu ajutorul unui fir subţire de un cui destul de solid, în aşa fel ca distanţa dintre cui şi centrul de oscilaţie al sferei să fie de $10\frac{1}{2}$ picioare. Pe fir am notat un punct situat la distanţa de zece picioare şi o uncie de la centrul de suspensiune; şi din regiunea acelui punct am pus o riglă divizată în degete, cu ajutorul căreia notam lungimile arcelor descrise de pendul. Apoi am numărat oscilaţiile în care sfera pierdea a opta parte a mişcării sale. Dacă pendulul era scos din poziţia verticală la o distanţă de două degete, şi apoi se lăsa liber; în aşa fel ca în întreaga lui coborîre descria un arc de două degete, şi în prima oscilaţie întreagă, compusă dintr-o coborîre şi urcare consecutivă, un arc de aproape patru degete, în 164 de oscilaţii el a pierdut a opta parte a mişcării sale, astfel că în ultima sa urcare descria un arc de un deget cu trei sferturi de deget. Dacă în prima coborîre a descris un arc de patru degete; a pierdut a opta parte a mişcării în 121 oscilaţii, în aşa fel că în ultima urcare descria un arc de $3\frac{1}{2}$ degete. Dacă în prima coborîre a descris un arc de 8, 16, 32 sau 64 degete, a pierdut a opta parte a mişcării în respectiv 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ oscilaţii. Aşadar diferenţa între arcele descrise în prima coborîre şi ultima urcare era în cazul întîi, al doilea, al treilea, al patrulea, al cincilea, al şaselea, respectiv de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1,2,4,8 degete. Să împărţim diferenţele în fiecare caz prin numărul oscilaţiilor, şi într-o oscilaţie medie, în care s-a descris un arc de $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 degete, diferenţa arcelor descrise într-o coborîre şi în urcarea următoare, va fi respectiv de $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ părţi de degete. Dar acestea în oscilaţiile mai mari sînt aproximativ în raportul pătratelor arcelor descrise, iar în cele mai mici

cu puțin mai mari decît în acel raport; și de aceea (potrivit corolarului 2, propoziția XXXI a acestei Cărți) rezistența sferei, cînd se mișcă mai repede, este aproximativ precum pătratul vitezei; cînd se mișcă mai încet, cu ceva mai mare decît în acel raport.

Fie acum V viteza maximă într-o oscilație oarecare, și fie A, B, C cantități date, și să ne închipuim că diferența arcelor este $AV+BV^{\frac{2}{3}}+CV^2$. Cum vitezele maxime sînt pe cicloidă precum jumătățile arcelor descrise, iar pe cerc precum coardele jumătăților acelor arce; și de aceea în arce egale sînt mai mari pe cicloidă decît pe cerc, în raportul jumătăților arcelor către coardele lor; dar timpurile pe cerc sînt mai mari decît pe cicloidă în raport invers cu viteza; este evident că diferențele arcelor (care sînt precum rezistența și pătratul timpului luate împreună) vor fi aceleași aproximativ, în ambele curbe: căci ar trebui ca diferențele să crească pe cicloidă, împreună cu rezistența, aproximativ cu pătratul raportului arcului către coardă, din cauza creșterii vitezei în acel raport simplu și să descrească împreună cu pătratul timpului, după același raport al pătratului.

Așadar ca să facem reducerea la cicloidă, trebuie luate aceleași diferențe ale arcelor care au fost observate pe cerc, iar vitezele maxime trebuie presupuse analoge sau cu jumătățile sau cu arcele întregi, adică cu numerile $\frac{1}{2}$, 1,2,4,8,16. Prin urmare să scriem în cazul al doilea, al patrulea, și al șaselea numerele 1, 4 și 16 în loc de V; și vom obține diferența arcelor $\frac{\frac{1}{2}}{121}$, $= A+B+C$ în cazul al doilea; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A+8B+16C$ în cazul al patrulea; $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A+64B+256C$ în cazul al șaselea. Și din aceste ecuații, prin compararea trebuincioasă și reducerea analitică, avem $A=0{,}0000916$, $B=0{,}0010847$ și $C=0{,}0029558$. Prin urmare diferența arcelor este precum $0{,}0000916V+0{,}0010847\,V^{\frac{3}{2}}+0{,}0029558\,V^2$: și de aceea cum (potrivit corolarului propoziției XXX aplicat la acest caz) rezistența sferei în mijlocul arcului descris prin oscilație, unde viteza este V, este către greutatea ei precum $\frac{7}{11}AV+\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}CV^2$, către lungimea pendulului; dacă în loc de A,B și C scriem numerele aflate, rezistența sferei către greutatea ei va fi precum $0{,}0000583V+0{,}0007593\,V^{\frac{3}{2}}+0{,}0022169\,V^2$ către lungimea pendulului între centrul de suspensiune și riglă, adică, către 121 degete. De unde cum V în cazul al doilea reprezintă 1, în al patrulea 4, în al șaselea 16: rezistența va fi către greutatea sferei în cazul al doilea precum 0,0030345 către 121 în al patrulea precum 0,041748 către 121 în al șaselea precum 0,61705 către 121.

Arcul pe care punctul marcat pe fir l-a descris în cazul al șaselea, era de $120-\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ sau $119\frac{5}{29}$ degete. Și de aceea cum raza era de 121 degete, și lungimea pendulului între punctul de suspensiune și centrul sferei era de 126 degete, arcul pe care l-a descris centrul sferei era de $124\frac{3}{31}$ degete. Deoarece viteza maximă a corpului oscilant, din cauza rezistenței aerului, nu coincide cu punctul cel mai de jos al arcului descris, ci se află aproape

de partea de mijloc a arcului întreg: aceasta va fi aproape aceeași ca și cînd sfera în coborîrea sa întreagă într-un mediu fără rezistență ar descrie jumătatea de $62\frac{3}{62}$ degete a acelui arc, și aceasta pe cicloida, la care am redus mai sus mișcarea pendulului: și de aceea viteza aceea va fi egală cu viteza pe care o poate cîștiga sfera, căzînd perpendicular și descriind în căderea sa o înălțime egală cu sinus versus-ul acelui arc. Dar acel sinus versus din cicloidă este către acest arc de $62\frac{3}{62}$ precum același arc către lungimea dublă 252 a pendulului, și de aceea egal cu 15,278 degete. Din care cauză viteza este aceea pe care o poate cîștiga corpul căzînd și descriind în căderea sa spațiul de 15,278 degete. Prin urmare cu o astfel de viteză sfera întîlnește o rezistență, care este către greutatea ei precum 0,61705 către 121, sau (dacă se consideră numai acea parte a rezistenței care este în raportul pătratului vitezei) precum 0,56752 către 121.

Printr-o experiență hidrostatică am aflat însă că greutatea acestei sfere de lemn este către greutatea unei sfere de apă de aceeași mărime precum 55 către 97: și de aceea cum 121 este către 213,4 în același raport, rezistența opusă sferei de apă progresînd cu viteza menționată va fi către greutatea ei precum 0,56752 către 213,4 adică, precum 1 către $376\frac{1}{50}$. De unde cum greutatea sferei de apă, în timp ce sfera descrie cu o viteză continuată în mod uniform o lungime de 30,556 degete, poate naște întreaga acea viteză în sfera căzătoare; este evident că forța de rezistență continuată în mod uniform în același timp poate anula o viteză mai mică în raportul de 1 către $376\frac{1}{50}$, adică, partea $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ a întregei viteze. Și de aceea în timp ce sfera, cu acea viteză continuată în mod uniform, poate descrie lungimea semidiametrului său, sau de $3\frac{7}{16}$ degete, în același timp va pierde partea $\frac{1}{3342}$ a mișcării sale.

Am numărat de asemenea oscilațiile în care pendulul își pierdea a patra parte a mișcării. În tabloul următor numerele de mai sus însemnează lungimea arcului descris în prima coborîre, exprimată în degete și părți de degete: numerele de la mijloc însemnează lungimea arcului descris în ultima urcare; și în locul cel mai de jos stau numerele oscilațiilor. Am descris experiența ca fiind mai precisă decît aceea în care mișcarea ar pierde numai a opta parte. Să încerce calculul, cine vrea.

Prima coborîre	2	4	8	16	32	64
Ultima urcare	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Nr. oscilațiilor	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

După aceea am atîrnat o sferă de plumb de 2 degete diametru, și o greutate de $26\frac{1}{2}$ uncii romane de același fir, astfel ca între centrul sferei și punctul de suspensiune să fie un interval de $10\frac{1}{2}$ picioare, și am numărat oscilațiile în care se pierdea partea dată a mișcării. Primul din tablourile

următoare arată numărul oscilaţiilor în care s-a pierdut a opta parte a mişcării întregi; al doilea numărul oscilaţiilor în care s-a pierdut a patra parte a ei.

Prima coborîre	1	2	4	8	16	32	64
Ultima urcare	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Nr. oscilaţiilor	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30
Prima coborîre	1	2	4	8	16	32	64
Ultima urcare	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Nr. oscilaţiilor	510	518	420	318	204	121	70

Alegînd în tabloul de mai sus observaţia a treia, a cincia şi a şaptea şi exprimînd vitezele maxime în aceste observaţii în particular, respectiv prin numerele 1,4,16 şi în general prin cantitatea V ca mai sus: din a treia observaţie rezultă $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, din a cincia $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, din a şaptea $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$.

Într-adevăr aceste ecuaţii reduse dau $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Şi de aici apare rezistenţa sferei mişcată cu viteza V în acel raport către greutatea sa de $26\frac{1}{4}$ uncii pe care îl are $0{,}0009V + 0{,}000208V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659V^2$ către lungimea de 121 degete a pendulului. Şi dacă considerăm numai acea parte a rezistenţei care este proporţională cu pătratul vitezei, aceasta va fi către greutatea sferei precum $0{,}000659V^2$ către 121 degete. Dar această parte a rezistenţei în prima experienţă era către greutatea sferei de lemn de $57\frac{7}{22}$ uncii precum $0{,}002217V^2$ către 121 şi de aici rezistenţa sferei de lemn este către rezistenţa sferei de plumb (vitezele lor fiind egale) precum $57\frac{7}{22}$ înmulţit cu 0,002217 către $26\frac{1}{4}$ înmulţit cu 0,000659, adică, precum $7\frac{1}{3}$ către 1. Diametrele celor două sfere erau de $6\frac{7}{8}$ şi 2 degete, şi pătratele lor sînt între ele aproximativ precum $47\frac{1}{4}$ şi 4, sau $11\frac{13}{16}$ şi 1. Aşadar rezistenţele sferelor de viteze egale erau într-un raport mai mic decît al pătratului diametrelor. Şi încă nu am considerat rezistenţa firului, care desigur era foarte mare, şi trebuia scăzută din rezistenţa aflată a pendulelor. Aceasta nu am putut-o defini în mod precis, dar am aflat-o totuşi mai mare ca a treia parte a întregii rezistenţe a pendulului mai mic; şi de aici am dedus că rezistenţele sferelor, scăzînd rezistenţa firului, sînt aproximativ în raportul pătratului diametrelor. Căci raportul $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ către $1 - \frac{1}{3}$ sau $10\frac{1}{2}$ către 1 nu este prea deosebit de pătratul raportului diametrilor $11\frac{13}{16}$ către 1.

Deoarece rezistenţa firului în sfere mai mari este de importanţă mai mică, am încercat şi experienţa cu o sferă al cărui diametru era $18\frac{3}{4}$ degete. Lungimea pendulului între punctul de suspensiune şi centrul de oscilaţie era de $122\frac{1}{2}$ degete, între punctul de suspensiune şi nodul din fir de $109\frac{1}{2}$ degete. Arcul descris de nod în prima coborîre a pendulului de 32 degete.

Arcul descris de acelaşi nod în ultima urcare de 28 degete după cinci oscilaţii. Suma arcelor sau arcul întreg descris într-o oscilaţie mijlocie de 60 degete. Diferenţa arcelor de 4 degete. A zecea parte a ei sau diferenţa între coborîrea şi urcarea într-o oscilaţie mijlocie $\frac{2}{5}$ degete. După cum raza $109\frac{1}{2}$ către raza $122\frac{1}{2}$ tot astfel arcul întreg de 60 degete descris de nod într-o oscilaţie medie către arcul întreg de $67\frac{1}{8}$ degete descris de centrul sferei într-o oscilaţie medie şi tot aşa diferenţa $\frac{2}{5}$ către diferenţa nouă 0,4475. Dacă lungimea pendulului, menţinînd lungimea arcului descris, ar creşte în raportul de 126 către $122\frac{1}{2}$, timpul de oscilaţie ar creşte şi viteza pendulului s-ar micşora în raportul rădăcinii pătrate, iar diferenţa arcelor descrise în coborîrea şi urcarea următoare ar rămîne 0,4475. Apoi dacă arcul descris s-ar mări în raportul de $124\frac{3}{31}$ către $67\frac{1}{8}$, diferenţa aceasta 0,4475 ar creşte precum pătratul acelui raport, şi deci ar deveni 1,5295. Acestea se întîmplă astfel, în ipoteza că rezistenţa pendulului ar fi precum pătratul vitezei. Prin urmare dacă pendulul ar descrie arcul întreg de $124\frac{3}{31}$ degete, şi lungimea lui între punctul de suspensie şi centrul de oscilaţie ar fi de 126 degete, diferenţa arcelor descrise în coborîrea şi urcarea următoare ar fi de 1,5295 degete. Şi această diferenţă înmulţită cu greutatea sferei pendulului, care era de 208 uncii, dă produsul 318,136. Iarăşi dacă pendulul de mai sus construit din sfera de lemn cu centrul de oscilaţie care era la o distanţă de 126 degete de punctul de suspensiune, descria arcul întreg de $124\frac{3}{31}$ degete, diferenţa arcelor descrise în coborîre şi urcare era de $\frac{123}{121}$ înmulţit cu $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, care înmulţită cu greutatea sferei de $57\frac{7}{22}$ uncii, dă 49,396. Dar eu am înmulţit acestea cu greutatea sferei, ca să aflu rezistenţele lor. Căci diferenţele se nasc din rezistenţe, şi sînt în acelaşi raport cu rezistenţele şi în raport invers cu greutăţile. Deci rezistenţele sînt precum numerele 318,136 şi 49,396. Dar partea rezistenţei sferei mai mici care este în raportul pătratului vitezei, era către rezistenţa întreagă precum 0,56752 către 0,61675, adică, precum 45,453 către 49,396; şi partea rezistenţei sferei mai mari egalează aproape rezistenţa ei întreagă; şi deci acele părţi sînt precum aproximativ 318,136 şi 45,453 adică precum 7 şi 1. Dar diametrele sferelor sînt $18\frac{3}{4}$ şi $6\frac{7}{8}$ şi pătratele lor $351\frac{9}{16}$ şi $47\frac{17}{64}$ sînt precum 7,438 şi 1, adică precum aproximativ rezistenţele 7 şi 1 ale sferelor. Diferenţa rapoartelor nu este mai mare decît aceea care a putut proveni din rezistenţa firului. Aşadar acele părţi ale rezistenţelor care sînt, sferele fiind egale, precum pătratele vitezelor; sînt de asemenea, la viteze egale, precum pătratele diametrelor sferelor.

De altfel cea mai mare dintre sferele de care m-am folosit în aceste experienţe, nu era perfect sferică, şi de aceea în calculul făcut aici am neglijat lucrurile mai mici pentru a scurta; fiind prea puţin preocupat de un calcul precis într-o experienţă puţin precisă. Aş dori deci, fiindcă demonstraţia

vidului depinde de aceasta, să se încerce experienţa cu sfere şi mai multe şi mai mari şi mai precise. Dacă luăm sferele în proporţie geometrică, anume ale căror diametre sînt de 4,8,16,32 degete; din progresia stabilită prin experienţe se va afla ce ar trebui să se întîmple cu sfere şi mai mari.

Într-adevăr comparînd rezistenţele diverselor fluide între ele am încercat următoarele. Am construit o cutie de lemn de patru picioare lungime, de cîte un picior lăţime şi înălţime. Pe aceasta lipsită de capac am umplut-o cu apă de fîntînă, şi am făcut ca cufundînd pendule în mijlocul apei să se mişte oscilînd. Astfel o sferă de plumb de greutate de $166\frac{1}{6}$ uncii, diametrul $3\frac{5}{8}$ degete se mişca după cum am descris în tabloul următor, anume lungimea pendulului de la punctul de suspensiune la un punct oarecare notat pe fir fiind de 126 degete, iar la centrul de oscilaţie de $134\frac{3}{8}$ degete.

Arcul descris in prima coborîre de punctul notat pe fir, in degete	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcul descris in ultima urcare, in degete	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Diferenţa arcelor proporţională cu mişcarea pierdută, in degete	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numărul de oscilaţii in apă			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numărul de oscilaţii in aer	$85\frac{1}{2}$	287	535						

În experienţa coloanei a patra, s-au pierdut mişcări egale cu 535 oscilaţii în aer, şi $1\frac{1}{5}$ în apă. În adevăr oscilaţiile în aer erau cu ceva mai repezi decît în apă. Dar dacă oscilaţiile în apă s-ar accelera într-un astfel de raport încît mişcările pendulelor în ambele medii să fie de viteze egale, ar rămîne acelaşi număr de $1\frac{1}{5}$ oscilaţii în apă, în care s-ar pierde aceeaşi mişcare ca mai înainte; din cauză că rezistenţa a crescut şi în acelaşi timp pătratul timpului a scăzut în acelaşi raport pătratic. Aşadar vitezele pendulelor fiind egale s-au pierdut mişcări egale în aer în 535 oscilaţii şi în apă în $1\frac{1}{5}$ oscilaţii; şi deci rezistenţa pendulului în apă este către rezistenţa lui în aer precum 535 către $1\frac{1}{5}$. Aceasta este proporţia rezistenţelor întregi în cazul coloanei a patra.

Căci să fie $AV+CV^2$ diferenţa arcelor descrise în coborîre şi în urcarea următoare de o sferă mişcată în aer cu viteza maximă V; şi cum viteză maximă în cazul coloanei a patra este către viteza maximă în cazul primei coloane, precum 1 către 8, iar diferenţa arcelor în cazul coloanei a patra către diferenţa în cazul primei coloane precum $\frac{2}{535}$ către $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, sau precum $85\frac{1}{2}$ către 4280; să scriem în aceste cazuri 1 şi 8 pentru viteze şi $85\frac{1}{2}$ şi 4280 pentru diferenţele arcelor, şi va fi $A+C=85\frac{1}{2}$ şi $8A+64C=4280$ sau

$A+8C=535$; și de aici prin reducerea ecuațiilor vom avea $7C=449\frac{1}{2}$ și $C=64\frac{3}{14}$ și $A=21\frac{2}{7}$: și de aceea rezistența, deoarece este precum $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$, va fi precum $13\frac{6}{11}V+48\frac{9}{56}V^2$. De aceea în cazul coloanei a patra, unde viteza era 1, rezistența întreagă este către partea sa proporțională cu pătratul vitezei, precum $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$ sau $61\frac{12}{17}$ către $48\frac{9}{56}$; și de aceea rezistența pendulului în apă este către acea parte a rezistenței în aer, care este proporțională cu pătratul vitezei, și care singură trebuie luată în considerare în mișcări mai repezi, precum $61\frac{12}{17}$ către $48\frac{9}{56}$ și 535 către $1\frac{1}{5}$ luate împreună, adică, precum 571 către 1. Dacă firul întreg al pendulului oscilînd în apă ar fi cufundat, rezistența lui ar fi cu mult mai mare; astfel că rezistența pendulului ce oscilează în apă, care este proporțională cu pătratul vitezei, și care singură trebuie considerată în corpurile mai repezi, este către rezistența aceluiași pendul întreg, oscilînd cu aceeași viteză în aer, precum aproximativ 850 către 1, adică, aproximativ precum densitatea apei către densitatea aerului.

În acest calcul ar fi trebuit să luăm în considerare acea parte a rezistenței pendulului în apă, care este proporțională cu pătratul vitezei, dar (ceea ce poate s-ar părea ciudat) rezistența în apă creștea după un raport mai mare ca pătratul vitezei. Cercetînd cauza acestui fapt, am aflat că cutia este prea mică față de mărimea sferei pendulului, și împiedica prea mult din cauza îngustimii sale mișcarea apei care ceda. Căci dacă sfera pendulară, a cărui diametru era de un deget, era cufundată, rezistența creștea aproape în raportul pătratului vitezei. Am probat aceasta construind un pendul din două sfere, dintre care cea inferioară și mai mică oscila în apă, cea superioară și mai mare era fixată de fir aproape deasupra apei, și oscilînd în aer, ajuta mișcarea pendulului și o făcea mai lungă. Iar experiențele aranjate în acest fel rezultau după cum se descrie în tabloul următor.

Arcul descris în prima coborîre	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcul descris în a doua urcare	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Diferența arcelor proporțională în mișcarea pierdută n	4	2	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
Numărul de oscilații	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Comparînd rezistențele mediilor între ele, am pus de asemenea ca pendule de fier să oscileze în mercur. Lungimea firului de fier era de aproape trei picioare, și diametrul sferei pendulului aproape a treia parte a unui deget. Iar imediat deasupra mercurului era atîrnată o altă sferă de plumb de ajuns de mare ca să poată continua mișcarea pendulului mai mult timp. Apoi am umplut un vas, care cuprindea aproape trei funți de mercur, alternativ cu mercur și apă obișnuită, astfel ca pendulul oscilînd succesiv în amîndouă fluidele, să aflu proporția rezistențelor: și a rezultat rezistența mercurului către rezistența apei precum aproximativ 13 sau 14 către 1: adică

precum densitatea mercurului către densitatea apei. Dacă foloseam o sferă pendulară ceva mai mare, anume al cărei diametru era aproape $\frac{1}{3}$ sau $\frac{2}{3}$ părţi a unui deget, se obţinea rezistenţa mercurului în acel raport cu rezistenţa apei, pe care-l are aproximativ numărul 12 sau 10 către 1. Dar trebuie să avem mai multă încredere în prima experienţă, deoarece în acestea din urmă vasul era prea îngust faţă de mărimea sferei cufundate. Mărind sfera, ar fi trebuit mărit şi vasul. Intenţionam, ce este drept să repet experienţele de acest fel în vase mai mari şi cu fluide atît ale metalelor topite, cît şi cu altele atît calde cît şi reci: dar nu am avut timp să le experimentez pe toate, şi din cele deja descrise este destul de evident că rezistenţa corpurilor mişcate mai repede este aproximativ proporţională cu densitatea fluidelor în care se mişcă. Nu zic exact. Căci fluidele mai tenace, pe lîngă densitatea egală, rezistă fără îndoială mai mult decît cele mai lichide, astfel uleiul rece mai mult decît cel cald, cel cald mai mult decît apa de ploaie, apa decît spirtul de vin. Într-adevăr în lichide, care pentru simţ sînt destul de fluide, precum în aer, în apa fie dulce, fie sărată, în spirturile de vin, de terebentină şi săruri. În uleiul curăţit de murdării prin distilare şi încălzit, în uleiul de vitriol şi mercur, în metale lichefiate şi în altele de acest fel, care sînt atît de fluide încît agitate în vase păstrează mai mult timp mişcarea imprimată, şi vărsate curgînd în jos se desfac foarte uşor în picături, nu mă îndoiesc că regula stabilită este satisfăcută destul de precis: în deosebi dacă se fac experienţe cu pendule şi mai mari şi mişcate mai repede.

În sfîrşit cum unii sînt de părerea, că există un mediu oarecare eteric şi foarte subtil, care pătrunde liber prin toţi porii şi canalele tuturor corpurilor; dar din partea unui astfel de mediu ce curge prin porii corpurilor ar trebui să se nască o rezistenţă: pentru a afla dacă rezistenţa, pe care o constatăm în mişcările corpurilor, se află întreagă pe suprafaţa lor externă, sau dacă şi părţile interne simt pe suprafeţele proprii o rezistenţă importantă, am imaginat următoarea experienţă. Cu un fir de unsprezece picioare lungime, am atîrnat de un cui de oţel destul de solid, cu ajutorul unui inel de oţel o cutie rotundă de brad, încît să constituie un pendul de lungimea menţionată. Cuiul era foarte ascuţit, în partea de sus cu o muchie concavă, astfel că inelul apăsînd cu arcul său superior pe muchie să se mişte cît se poate de liber. Iar de arcul inferior era atîrnat firul. Pendulul astfel preparat îl îndepărtam de perpendiculară la o distanţă de aproape şase picioare. şi aceasta într-un plan perpendicular pe muchia cuiului, încît inelul, în timpul oscilaţiei pendulului, să nu poată aluneca încoace şi încolo deasupra muchiei cuiului. Căci punctul de suspensiune, în care inelul atinge cuiul, trebuie să rămînă nemişcat. Aşadar am notat precis locul, la care scoteam pendulul, apoi lăsînd liber pendulul, am notat alte trei locuri la care se întorcea la sfîrşitul oscilaţiei întîi, a doua şi a treia. Aceasta o repetam adesea, ca să pot afla locurile cît se poate de precis. Apoi umpleam cutia cu plumb şi cu greutăţi metalice, care îmi erau la îndemînă. Dar mai întîi cîntăream cutia goală, împreună cu partea firului care era înfăşurată în jurul cutiei şi cu jumătatea părţii rămase care era întinsă între cui şi cutia pendulară. Căci firul întins totdeauna, acţionează cu jumătatea greutăţii sale asupra pendulului scos din poziţia perpendiculară. La această greutate adăugam greutatea aerului conţinut de vas. Şi greutatea întreagă era aproape a 78-a parte a cutiei plină

cu metale. Atunci deoarece cutia plină cu metale, întinzînd firul prin greutatea sa, mărea lungimea pendulului, scurtam firul așa fel ca lungimea pendulului oscilant să fie aceeași ca mai înainte. Apoi ducînd pendulul la locul notat mai înainte și lăsîndu-l liber, număram aproape 77 de oscilații, pînă ce cutia se întorcea la locul notat a doua oară, apoi tot de atîtea ori pînă ce cutia se întorcea la locul notat a treia oară, și apoi din nou tot de atîtea ori pînă ce cutia în revenirea sa ajungea la locul al patrulea. De unde conchid că rezistența întreagă a cutiei pline nu avea o proporție mai mare către rezistența cutiei goale decît 78 către 77. Căci dacă rezistențele ambelor ar fi egale, cutia plină din cauza forței sale inerente de 78 ori mai mare decît forța inerentă a cutiei goale, ar trebui să-și păstreze mișcarea oscilatoare cu atît mai mult timp, și de aceea completînd totdeauna 78 de oscilații să revină la locurile notate. Dar a revenit la ele la capătul a 77 de oscilații.

Prin urmare fie A rezistența cutiei pe suprafața ei externă, și B rezistența cutiei goale în părțile interne; și dacă rezistențele corpurilor de viteze egale în părțile lor interne sînt precum materia, sau numărul particulelor cărora li se rezistă, $78B$ va fi rezistența cutiei pline în părțile ei interne, și deci rezistența întreagă $A+B$ a cutiei goale va fi către rezistența întreagă $A+78B$ a cutiei pline precum 77 către 78, și separînd $A+B$ către $77B$, precum 77 către 1, și deci $A+B$ către B precum 77×77 către 1, și separînd A către B precum 5928 către 1. Așadar rezistența cutiei goale în părțile interne este de cinci mii de ori mai mică decît rezistența ei pe suprafața externă, și mai bine. Într-adevăr aceasta o deducem din ipoteza că rezistența mai mare a cutiei pline, nu provine dintr-o altă cauză latentă, ci numai din acțiunea unui fluid oarecare subtil închis în metal.

Această experiență am relatat-o din memorie. Căci hîrtia, în care am descris-o cîndva, s-a pierdut. De aceea părțile fracționare de numere care au dispărut din memorie, am fost silit să le omit.

Căci nu am timp să le încerc toate din nou. Întîia dată, deoarece m-am folosit de un cui nu de ajuns de solid, cutia plină era întîrziată mai repede. Cercetînd cauza, am aflat că cuiul puțin solid ceda greutății cutiei și urmînd oscilațiilor lui se îndoia în toate părțile. Mi-am procurat deci un cui solid, pentru ca punctul de suspensiune să rămînă nemișcat, și atunci toate s-au întîmplat după cum le-am descris mai sus.

SECŢIUNEA VII

Despre mişcarea fluidelor şi rezistenţa proiectilelor

PROPOZIŢIA XXXII. TEOREMA XXVI

Dacă două sisteme asemenea de corpuri constau dintr-un număr egal de particule, şi particulele corespunzătoare sînt asemenea şi proporţionale, fiecare dintr-un sistem cu fiecare din celălalt, şi situate asemenea între ele, şi au între ele un raport dat de densitate, şi încep să se mişte în mod asemănător între ele în timpuri proporţionale (cele dintr-un sistem între ele şi cele din celălalt iarăşi între ele) şi dacă cele din acelaşi sistem nu se ating între ele, decît în momentele de reflexie, şi nici nu se atrag sau se resping reciproc, decît cu forţele acceleratoare care sînt în raport invers cu diametrele particulelor corespunzătoare şi în raport direct cu pătratele vitezelor: zic că particulele sistemelor continuă să se mişte între ele în mod asemănător în timpuri proporţionale.

Corpurile asemenea şi situate asemenea, zic că se mişcă în mod asemănător în timpuri proporţionale, dacă poziţiile lor reciproce la sfîrşitul acelor timpuri totdeauna sînt asemenea: anume dacă asemănăm particulele unui sistem cu particulele corespunzătoare ale celuilalt. De unde timpurile în care particule corespunzătoare descriu părţi asemenea şi proporţionale ale figurilor asemenea vor fi proporţionale. Aşadar dacă avem două sisteme de acest fel, particulele corespunzătoare, din cauza asemănării mişcărilor începute, continuă a se mişca în mod asemănător, pînă ce se întîlnesc. Căci dacă nu sînt acţionate de nici o forţă, vor progresa uniform în linii drepte potrivit legii I a mişcării. Dacă se acţionează reciproc cu forţe oarecare, şi forţele sînt în raport invers cu diametrele particulelor corespunzătoare şi direct cu pătratele vitezelor; deoarece poziţiile particulelor sînt asemenea iar forţele proporţionale, forţele întregi cu care sînt acţionate particulele corespunzătoare, compuse din diversele forţe active (potrivit corolarului II al legilor), vor avea determinări asemenea, ca şi cînd ar privi centre situate asemenea între particule; şi forţele întregi vor fi între ele precum diversele forţe componente, adică în raport invers cu diametrele particulelor corespunzătoare, şi în acelaşi raport cu pătratele vitezelor: şi de aceea vor face ca particulele corespunzătoare să continue a descrie figuri asemenea. Acestea se vor întîmpla astfel (potrivit corolarelor 1 şi 8, propoziţia IV, Cartea I) dacă centrele sînt în repaus. Dacă însă se mişcă, fiindcă din cauza asemănării translaţiilor, situaţiile lor între particulele sistemelor rămîn asemenea, se vor introduce schimbări asemenea în figurile pe care le descriu particulele. Prin urmare mişcările particulelor corespunzătoare şi asemenea vor fi asemenea pînă la primele lor întîlniri, şi de aceea vor fi asemenea întîlnirile, şi reflexiile, şi apoi (potrivit celor arătate) asemenea mişcările între ele pînă ce se vor întîlni din nou şi aşa mai departe la infinit. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă două corpuri oarecare, care sînt asemenea şi situate asemenea faţă de particulele corespunzătoare ale sistemelor, încep

să se mişte între ele în mod asemănător în timpuri proporţionale şi mărimile şi densităţile lor între ele sînt precum mărimile şi densităţile particulelor corespunzătoare: acestea vor continua să se mişte în mod asemănător în timpuri proporţionale. Căci raportul părţilor mai mari ale ambelor sisteme şi ale particulelor este acelaşi.

COROLARUL 2. Şi dacă toate părţile asemenea şi situate asemenea ale sistemelor sînt în repaus între ele: şi dacă două din ele, care sînt mai mari ca celelalte, şi se corespund reciproc în fiecare sistem, încep să se mişte după linii situate asemenea cu mişcările asemenea într-un fel oarecare: acestea vor excita mişcări asemenea în celelalte părţi ale sistemelor şi vor continua să se mişte în mod asemănător între ele în timpuri proporţionale; şi de aceea să descrie spaţii proporţionale cu diametrele lor.

PROPOZIŢIA XXXIII. TEOREMA XXVII

Presupunînd aceleaşi, zic că părţilor mai mari ale sistemelor li se opune o rezistenţă după un raport compus din pătratul raportului vitezelor lor şi pătratul raportului diametrelor şi raportul densităţii părţilor sistemelor.

Căci rezistenţa se naşte parte din forţele centripete sau centrifuge prin care se acţionează reciproc particulele sistemelor, parte din întîlnirile şi reflexiile particulelor şi părţilor mai mari. Dar rezistenţele de primul gen sînt între ele precum forţele motoare întregi din care provin, adică precum forţele acceleratoare întregi şi cantităţile de materie în părţile corespunzătoare; adică (prin ipoteză) precum pătratele vitezelor şi în raport invers cu distanţele particulelor corespunzătoare şi în acelaşi raport cu cantităţile de materie în părţile corespunzătoare; şi deci cum distanţele particulelor unui sistem sînt către distanţele corespunzătoare ale particulelor celuilalt, precum diametrul particulei sau părţii în sistemul de mai sus către diametrul particulei sau părţii corespunzătoare în celălalt, şi cantităţile de materie sînt precum densităţile părţilor şi cuburile diametrelor; rezistenţele sînt între ele precum pătratele vitezelor şi pătratele diametrelor şi densităţile părţilor sistemelor. Q.E.D. Rezistenţele de felul din urmă sînt precum numerele şi forţele reflexiilor corespunzătoare luate împreună. Dar numerele reflexiilor sînt între ele precum vitezele părţilor corespunzătoare, şi în raport invers cu spaţiile dintre reflexiile lor. Şi forţele de reflexie sînt precum vitezele şi mărimile şi densităţile părţilor corespunzătoare luate împreună; adică precum vitezele şi cuburile diametrelor şi densităţilor părţilor. Şi unind toate aceste rapoarte, rezistenţele părţilor corespunzătoare sînt între ele precum pătratele vitezelor şi pătratele diametrelor şi densităţile părţilor luate împreună. Q. E. D.

COROLARUL 1. Prin urmare, dacă sistemele sînt două fluide elastice la fel cu aerul, şi părţile lor sînt în repaus între ele: iar două corpuri, asemenea şi proporţionale cu părţile fluidelor în ce priveşte mărimea şi densitatea, şi situate asemenea între părţi, se proiectează oarecum după linii situate asemenea; iar forţele acceleratoare, prin care se agită reciproc particulele fluidelor, sînt în raport invers cu diametrele corpurilor proiectate, şi în acelaşi raport cu pătratele vitezelor: corpurile în timpuri proporţionale

vor excita mişcări asemenea în fluide, şi vor descrie spaţii asemenea şi proporţionale cu diametrele lor.

COROLARUL 2. Aşadar în acelaşi fluid un proiectil rapid întîlneşte o rezistenţă, care este aproximativ în raportul pătratului vitezei. Căci dacă forţele, cu care se acţionează reciproc particulele distante, s-ar mări în raportul pătratului vitezei, rezistenţa va fi în acelaşi raport pătratic; şi deci într-un mediu, ale cărui părţi distanţate între ele nu se acţionează reciproc cu nici o forţă, rezistenţa este exact în raportul pătratului vitezei. Fie deci trei medii *A*,*B*,*C*, constînd din părţi asemenea şi egale şi dispuse în mod regulat la distanţe egale. Părţile mediilor *A* şi *B* să se respingă reciproc cu forţe care sînt între ele precum *T* şi *V*, iar părţile mediului *C* să fie lipsite de orice astfel de forţe. Şi dacă patru corpuri egale *D*,*E*,*F*,*G*, se mişcă în aceste medii, primele două *D* şi *E* în primele două *A* şi *B*, şi celelalte două *F* şi *G* în al treilea *C*; şi fie viteza corpului *D* către viteza corpului *E*, şi viteza corpului *F* către viteza corpului *G* precum rădăcina pătrată a raportului forţelor *T* către forţele *V*: rezistenţa corpului *D* va fi către rezistenţa corpului *E* şi rezistenţa corpului *F* către rezistenţa corpului *G*, în raportul pătratelor vitezelor; şi de aceea rezistenţa corpului *D* va fi către rezistenţa corpului *F* precum rezistenţa corpului *E* către rezistenţa corpului *G*. Fie corpurile *D* şi *F* de aceeaşi viteză cu corpurile *E* şi *G*; şi mărind vitezele corpurilor *D* şi *F* într-un raport oarecare, şi micşorînd forţele particulelor mediului *B* în acelaşi raport pătratic, mediul *B* se va apropia de forma şi condiţia mediului *C* după voie şi deci rezistenţele corpurilor egale şi de viteze egale *E* şi *G* în aceste medii, se vor apropia necontenit de egalitate, astfel că diferenţa lor în sfîrşit va deveni mai mică decît oricare dată. Astfel cum rezistenţele corpurilor *D* şi *F* sînt între ele precum rezistenţele corpurilor *E* şi *G*, acestea de asemenea se vor apropia în mod analog de raportul egalităţii. Aşadar, rezistenţele corpurilor *D* şi *F*, cînd se mişcă foarte repede, sînt aproximativ egale; şi de aceea cum rezistenţa corpului *F* este proporţională cu pătratul vitezei, rezistenţa corpului *D* va fi aproximativ în acelaşi raport.

COROLARUL 3. Rezistenţa unui corp ce se mişcă foarte repede într-un fluid elastic este oarecum aceeaşi ca şi cînd părţile fluidului ar fi lipsite de forţele centrifuge, şi nu ar fugi una de alta: dacă numai forţa elastică a fluidului se naşte din forţele centrifuge ale particulelor, şi viteza este atît de mare încît forţele nu au timp de ajuns să acţioneze.

COROLARUL 4. Dar cum rezistenţele corpurilor asemenea şi de viteze egale, într-un mediu ale cărui părţi distante nu fug una de alta, sînt precum pătratele diametrelor; rezistenţele corpurilor de viteze egale şi în mişcare foarte rapidă într-un mediu elastic de asemenea sînt aproximativ precum pătratele diametrelor.

COROLARUL 5. Şi cum corpurile asemenea, egale şi de viteză egală în medii de aceeaşi densitate, ale căror particule nu fug deodată, fie că particulele sînt mai multe şi mai mici, fie că sînt mai puţine şi mai mari, lovesc o cantitate de materie egală în timpuri egale, şi îi imprimă o cantitate de mişcare egală şi la rîndul lor (potrivit legii III a mişcării) suferă din partea ei o reacţiune egală, adică li se opune o rezistenţă egală: este evident de asemenea că în fluide elastice de aceeaşi densitate cînd se mişcă foarte repede, rezistenţele lor sînt aproape egale; fie că fluidele constau din particule

mai mari, fie din cele mai mici din toate. Din cauza subtilităţii mediului rezistenţa proiectilelor mişcate foarte repede nu se micşorează mult.

COROLARUL 6. Toate acestea se întîmplă astfel în fluidele ale căror forţă elastică îşi are originea în forţele centrifuge ale particulelor. Căci dacă forţa provine de alt undeva, cum ar fi expansiunea particulelor la fel cu lîna şi ramurile arborilor, sau din altă cauză oarecare, prin care mişcările particulelor între ele devin mai puţin libere: rezistenţa, din cauza fluidităţii mai mici a mediului, va fi mai mare ca în corolarele de mai sus.

PROPOZIŢIA XXXIV. TEOREMA XXVIII

Dacă o sferă şi un cilindru descrise cu diametrele egale se mişcă în direcţia axei cilindrului cu o viteză egală, într-un mediu rar constînd din particule egale şi aşezate în mod liber la distanţe egale unul de altul: rezistenţa sferei va fi de două ori mai mică decît rezistenţa cilindrului.

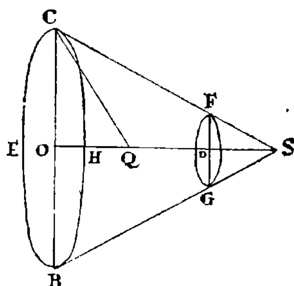
În adevăr deoarece acţiunea mediului asupra corpului este aceeaşi (potrivit corolarului V al legilor) fie că corpul se mişcă într-un mediu în repaus, fie că particulele mediului acţionează cu aceeaşi viteză asupra corpului în repaus: să considerăm corpul în repaus, şi să vedem de ce forţă va fi acţionat de către mediul în mişcare. Fie deci *ABKI* un corp sferic descris din centrul *C* cu semidiametrul *CA*, şi să cadă particulele mediului cu o viteză dată asupra corpului sferic, după drepte paralele cu *AC*: şi fie *FB* o dreaptă de acest fel. Să luăm pe ea *LB* egală cu semidiametrul *CB*, şi să ducem *BD* care să atingă sfera în *B*. Pe *KC* şi *BD* să coborîm perpendicularele *BE*, *LD*, şi forţa cu care o particulă a mediului, căzînd în direcţia dreptei *FB* în mod oblic, împinge sfera în *B*, va fi către forţa cu care aceeaşi particulă ar duce cilindrul *ONGQ* descris cu axa *ACI* în jurul sferei perpendicular în *b*, precum *LD* către *I B* sau *BE* către *BC*. La fel eficacitatea acestei forţe către sfera ce trebuie să se mişte în direcţia incidentei sale *FB* sau *AC*, este către eficacitatea aceleiaşi către sfera ce trebuie să se mişte în direcţia determinării sale, adică, în direcţia dreptei *BC* în care ea acţionează sfera în mod direct precum *BE* către *BC*. Şi unind rapoartele, eficacitatea particulei asupra sferei în direcţia dreptei *FB* ce cade în mod oblic, pentru a o mişca în direcţia incidentei sale, este către eficacitatea aceleiaşi particule în direcţia aceleiaşi drepte căzînd perpendicular pe cilindru, pentru a-l mişca în aceeaşi direcţie, precum BE^2 către BC^2. De aceea dacă pe *bE*, care este perpendiculară pe baza circulară *NAO* a cilindrului şi egală cu raza *AC*, luăm *bH* egal cu $\frac{BE^2}{CB}$: *bH* va fi către *bE*, precum efectul particulei asupra sferei către efectul particulei asupra cilindrului. Şi de aceea solidul care este cuprins de toate dreptele *bH* va fi către solidul care este cuprins de toate dreptele *bE*, precum efectul tuturor particulelor asupra

sferei către efectul tuturor particulelor asupra cilindrului. Dar primul solid este un paraboloid descris cu vîrful C, axa CA şi parametrul CA, şi solidul din urmă este un cilindru circumscris paraboloidului: şi se ştie că paraboloidul este jumătatea cilindrului circumscris. Aşadar forţa întreagă a mediului asupra sferei este de două ori mai mică decît forţa ei întreagă asupra cilindrului. Şi de aceea dacă particulele mediului sînt în repaus, şi cilindrul şi sfera se mişcă cu viteză egală, rezistenţa sferei va fi de două ori mai mică decît rezistenţa cilindrului. Q.E.D.

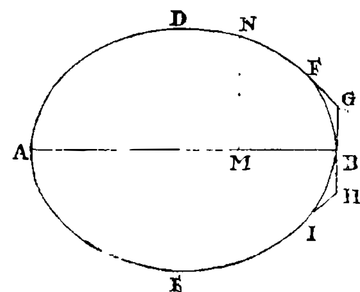
SCOLIE

În acelaşi fel se pot compara între ele alte figuri în ce priveşte rezistenţa, şi se pot afla acelea care sînt mai potrivite pentru a continua mişcările lor în medii rezistente.

Astfel dacă pe baza circulară $CEBH$, care este descrisă din centrul O, cu raza OC, şi înălţimea OD, se construieşte bucata de con $CBGF$, care dintre toate fragmentele construite pe aceeaşi bază şi înălţime şi înaintînd în direcţia axei sale spre D rezistă mai puţin: să bisectăm înălţimea OD în Q şi să prelungim OQ pînă în S astfel ca QS să fie egal cu QC, şi S va fi vîrful conului al cărui trunchi se caută.



De unde în treacăt, deoarece unghiul CSB este totdeauna ascuţit, urmează că dacă solidul $ADBE$, s-ar naşte prin rotirea figurii eliptice sau ovale $ADBE$ în jurul axei AB, şi ar atinge figura generatoare de cele trei drepte FG, GH, HI în punctele F, B şi I, în aşa fel încît GH să fie perpendicular pe axă în punctul de contact b, şi FG, HI să formeze unghiurile FGB, BHI de 135 grade cu GH, solidul, care este generat de rotirea figurii $ADFGHIE$ în jurul axei AB, întîmpină o rezistenţă mai mică decît primul solid; dacă amîndouă progresează în direcţia axei lor AB, şi extremitatea B a fiecăruia merge înainte. Această propoziţie cred că nu va fi fără folos la construcţia corăbiilor.



Căci dacă figura $DNFG$ este o astfel de curbă, cît, dacă dintr-un punct oarecare N al ei se coboară pe axa AB perpendiculara NM, şi din punctul dat G se duce dreapta GR care este paralelă cu dreapta care atinge figura în N, şi taie axa prelungită în R, atunci MN va fi către GR precum GR^3 către $4BR \times GB^2$; solidul care se descrie prin revoluţia acestei figuri în jurul axei AB, mişcîndu-se în mediul rar menţionat mai sus de la A spre B, va avea mai puţină rezistenţă decît oricare alt solid circular descris de aceeaşi lungime şi lăţime.

PROPOZIŢIA XXXV. PROBLEMA VII

Dacă un mediu rar constă din particule foarte mici în repaus de mărimi egale şi liber dispuse la distanţe egale între ele: să se afle rezistenţa unei sfere ce progresează în mod uniform în acest mediu.

CAZUL 1. Să ne închipuim că un cilindru descris cu acelaşi diametru şi înălţime înaintează cu aceeaşi viteză în direcţia lungimii sale în acelaşi mediu. Şi să presupunem că particulele mediului, în care cade sfera sau cilindrul, se întorc cu o viteză de reflexie cît se poate de mare. Şi cum rezistenţa sferei (potrivit propoziţiei celei mai noi) este jumătate din rezistenţa cilindrului, şi sfera este către cilindru precum doi către trei, şi cilindrul căzînd perpendicular pe particule, şi reflectîndu-le cît se poate de tare, le va comunica viteza sa dublă: cilindrul, în timpul în care descrie jumătatea lungimii axei sale înaintînd în mod uniform, va comunica particulelor o mişcare, care este către mişcarea întreagă a cilindrului precum densitatea mediului către densitatea cilindrului; şi sfera în timpul în care descrie lungimea întreagă a diametrului său înaintînd în mod uniform, va comunica aceeaşi mişcare particulelor, şi în care timp descrie două treimi ale diametrului său, va comunica particulelor o mişcare, care este către mişcarea întreagă a sferei precum densitatea mediului către densitatea sferei. Şi de aceea sfera suferă o rezistenţă, care este către forţa cu care mişcarea ei întreagă poate fi sau anulată sau generată în timpul în care descrie două treimi ale diametrului său înaintînd în mod uniform, precum densitatea mediului către densitatea sferei.

CAZUL 2. Să presupunem că particulele mediului căzînd pe sferă sau pe cilindru nu se reflectă; şi cilindrul căzînd în mod perpendicular pe particule le va comunica viteza sa simplă şi deci suferă o rezistenţă de două ori mai mică decît în primul caz, şi rezistenţa sferei de asemenea va fi de două ori mai mică decît în primul caz.

CAZUL 3. Să presupunem că particulele mediului se întorc de la sferă cu o forţă de reflexie care nu este nici maximă nici nulă, ci una mijlocie oarecare; şi rezistenţa sferei va fi în acelaşi raport mijlociu între rezistenţa din primul caz şi rezistenţa din al doilea. Q.E.I.

COROLARUL 1. De aici dacă sfera şi particulele sînt infinit de dure, şi lipsite de orice forţă elastică şi deci şi de orice forţă de reflexie: rezistenţa sferei va fi către forţa cu care întreaga ei mişcare poate fi sau anulată sau generată, în care timp sfera descrie patru treimi de părţi ale diametrului său, precum densitatea mediului către densitatea sferei.

COROLARUL 2. Rezistenţa sferei, celelalte fiind egale, este precum pătratul vitezei.

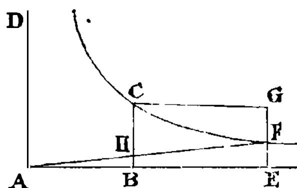
COROLARUL 3. Rezistenţa sferei, celelalte fiind egale, este precum pătratul diametrului.

COROLARUL 4. Rezistenţa sferei, celelalte fiind egale, este precum densitatea mediului.

COROLARUL 5. Rezistenţa sferei este într-un raport care se compune din raportul pătratului vitezei şi al pătratului diametrului şi din raportul diametrului densităţii mediului.

COROLARUL 6. Şi mişcarea sferei împreună cu rezistenţa ei se pot exprima astfel. Fie AB timpul în care sfera din cauza rezistenţei sale uni-

form continuată își poate pierde întreaga sa mișcare. Să ridicăm pe AB perpendicularele AD, BC. Și fie BC întreaga mișcare, și prin punctul C cu asimptotele AD, AB să descriem hiperbola CF. Să prelungim pe AB pînă într-un punct oarecare E. Să ridicăm perpendiculara EF întîlnind hiperbola în F. Să completăm paralelogramul $CBEG$, și să ducem AF care să întîlnească pe BC în H. Și dacă sfera într-un timp oarecare BE, continuînd prima sa mișcare BC în mod uniform, descrie într-un mediu fără rezistență spațiul $CBEG$ reprezentat prin aria paralelogramului, într-un mediu rezistent ea va descrie spațiul reprezentat prin aria hiperbolei, $CBEF$, și mișcarea ei la sfîrșitul acelui timp se va reprezenta prin ordonata EF a hiperbolei, pierzîndu-se partea FG a mișcării sale. Și rezistența ei la sfîrșitul aceluiași timp se va exprima prin lungimea BH, pierzîndu-se partea CH a rezistenței. Toate acestea rezultă din corolarele 1 și 3 propoziția V, Cartea II.



COROLARUL 7. De aici dacă sfera în timpul T din cauza rezistenței R continuată în mod uniform își pierde întreaga sa mișcare M: aceeași sferă în timpul t într-un mediu rezistent, descrescînd din cauza rezistenței R în raportul pătratului vitezei, va pierde partea $\frac{tM}{T+t}$ a mișcării sale M, rămînînd partea $\frac{TM}{T+t}$; și va descrie un spațiu care este către spațiul descris cu mișcarea uniformă M în același timp t, precum logaritmul numărului $\frac{T+t}{T}$ înmulțit cu numărul 2,302585092994 este către numărul $\frac{t}{T}$, fiindcă aria hiperbolică $BCFE$ este către dreptunghiul $BCGE$ în această proporție.

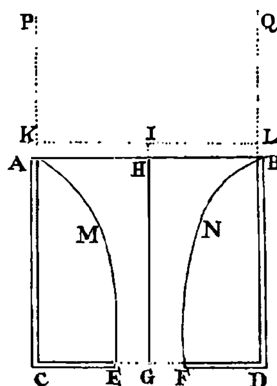
SCOLIE

În această propoziție am expus rezistența și întîrzierea proiectilelor sferice în medii fără continuitate, și am arătat că această rezistență este către forța cu care întreaga mișcare a sferei poate fi sau nimicită sau generată în timpul în care sfera poate descrie două treimi din diametrul său cu o viteză continuată în mod uniform, precum densitatea mediului către densitatea sferei, dacă sfera și particulele mediului sînt foarte elastice și posedă forța maximă de reflexie: și că această forță este de două ori mai mică cînd sfera și particulele mediului sînt infinit de dure și direct lipsite de forța de reflexie. În mediile continue însă, cum este apa, uleiul cald și mercurul, în care sfera nu cade imediat în toate particulele fluidului ce produc rezistență, ci apasă numai particulele apropiate și acestea apasă altele și acestea altele, rezistența este încă de două ori mai mică. În general o sferă în medii foarte fluide de acest fel suferă o rezistență care este către forța cu care întreaga ei mișcare poate fi sau anulată sau generată în timpul în care continuînd acea mișcare în mod uniform, poate descrie opt treimi din diametrul său, precum densitatea mediului către densitatea sferei. Ceea ce ne vom sili a demonstra în cele următoare.

PROPOZIŢIA XXXVI. PROBLEMA VIII

Să se afle mişcarea apei ce curge dintr-un vas cilindric printr-o deschidere efectuată în fund.

Fie *ACDB* un vas cilindric, *AB* orificiul său superior, *CD* fundul paralel cu orizontul, *EF* o deschidere circulară în mijlocul fundului, *G* centrul deschiderii, şi *GH* axa cilindrului perpendicular pe orizont. Şi să ne închipuim un cilindru de gheaţă *APQB* avînd aceeaşi lăţime cu cavitatea vasului, şi aceeaşi axă, şi coborînd în mod continuu cu o mişcare uniformă şi că părţile sale imediat ce ating suprafaţa *AB* se lichefiază, şi prefăcîndu-se în apă curg în vas din cauza greutăţii lor, şi căzînd formează o cataractă sau coloană de apă *ABNFEM*, şi trec prin deschiderea *EF* şi o umple complet. Fie în adevăr viteza uniformă a gheţii descendente şi a apei vecine în cercul *AB*, aceea pe care o poate cîştiga apa căzînd şi descriind în căderea sa înălţimea *IH*; şi fie *IH* şi *HG* situate în aceeaşi direcţie, şi prin punctul *I* să ducem dreapta *KL* paralelă cu orizontul şi întîlnind laturile gheţii în *K* şi *L*. Şi viteza apei ce curge prin deschiderea *EF* va fi aceea pe care o poate cîştiga apa căzînd din *I* şi descriind în căderea sa înălţimea *IG*. Şi deci potrivit teoremei lui G a l i l e u *IG* va fi către *IH* în raportul pătratului vitezei apei ce curge prin deschidere către viteza apei în cercul *AB*, adică, în raportul pătratului cercului *AB* către cercul *EF*; căci aceste cercuri sînt în raport invers cu vitezele apelor care trec complet prin ele, în acelaşi timp şi în cantităţi egale. Aici este vorba de viteza apei către orizont. Şi mişcarea paralelă cu orizontul în care părţile apei ce cade se apropie una de alta, deoarece nu provine din greutate, şi nici nu schimbă mişcarea perpendiculară pe orizont provenită din cauza gravităţii, aici nu se ia în considerare. Presupunem într-adevăr că părţile apei întrucîtva sînt coherente, şi prin coeziunea lor în timpul căderii se apropie una de alta prin mişcări paralele cu orizontul, astfel că formează o singură cataractă şi nu se divid în mai multe cataracte: dar aici nu considerăm mişcarea paralelă cu orizontul născută din acea coeziune.



CAZUL 1. Să ne închipuim că întreaga cavitate a vasului, care înconjoară apa curgătoare *ABNFEM*, este plină cu gheaţă, astfel că apa trece prin gheaţă ca printr-o pîlnie. Şi dacă apa numai că nu atinge gheaţa sau, ceea ce este acelaşi lucru, dacă o atinge şi din cauza netezimii ei foarte mari alunecă pe gheaţă foarte liber şi fără orice rezistenţă, ea se va scurge prin deschiderea *EF* cu aceeaşi viteză ca mai înainte, şi greutatea totală a coloanei de apă *ABNFEM* va fi folosită în producerea curgerii ei ca mai sus, şi fundul vasului va susţine greutatea gheţii ce înconjoară coloana.

Să lăsăm acum să se topească gheaţa în vas; şi scurgerea apei, în ce priveşte viteza, va rămîne aceeaşi ca mai înainte. Nu va fi mai mică, deoarece gheaţa topită în apă va tinde să coboare: nu mai mare, fiindcă gheaţa topită în apă nu se poate coborî decît împiedicînd coborîrea altei ape egală cu

coborîrea sa. Aceeaşi forţă trebuie să producă aceeaşi viteză a apei curgătoare. Dar orificiul din fundul vasului, din cauza mişcărilor oblice ale particulelor apei curgătoare, trebuie să fie cu ceva mai mare decît mai înainte. Căci nu toate particulele apei trec perpendicular prin orificiu, ci adunîndu-se din toate părţile laturilor vasului, şi convergînd în orificiu, trec prin mişcări oblice; şi îndoindu-şi cursul în jos se întîlnesc în vîna apei ţîşnitoare, care dincoace de orificiu este mai îngustă decît în însuşi orificiul, diametrul ei către diametrul deschiderii fiind precum 5 către 6 sau $5\frac{1}{2}$ către $6\frac{1}{2}$ aproximativ, dacă am măsurat corect diametrele. Căci am pregătit o lamă plană foarte subţire găurită la mijloc, avînd diametrul orificiului circular de cinci optimi de deget. Şi pentru ca vîna apei ţîşnitoare căzînd să nu fie accelerată şi prin acceleraţie să nu devină mai îngustă, nu am fixat lama de fund ci pe latura vasului astfel ca vîna să iasă după o linie paralelă cu orizontul. Apoi cînd vasul era plin cu apă, am deschis orificiul ca apa să se scurgă; şi diametrul vînei, măsurat la o distanţă de aproape o jumătate de deget de la deschidere cu precizie cît se poate de mare, era de 21 pe 40 dintr-un deget. Prin urmare diametrul acestei deschideri circulare era către diametrul vînei precum 25 către 21 aproximativ. Deci apa trecînd prin deschidere, converge din toate părţile, şi după ce se scurge din vas, devine mai îngustă convergînd, şi prin îngustare se accelerează pînă ce ajunge la distanţa de o jumătate de deget de la orificiu şi la acea distanţă este mai îngustă şi mai rapidă decît în deschiderea însăşi, aproximativ în raportul 25×25 către 21×21 sau 17 la 12, adică aproape precum raportul lui $\sqrt{2}$ către 1. Dar prin experienţă se constată că, cantitatea de apă ce se scurge printr-un orificiu circular făcut în fundul unui vas, este aceea care trebuie să se scurgă în acelaşi timp cu viteza prezisă, nu prin acel orificiu, ci printr-o deschidere circulară, al cărei diametru este către diametrul acelei deschideri precum 21 către 25. Şi de aceea apa curgînd are o viteză îndreptată în jos în însuşi orificiul pe care aproximativ o poate cîştiga un corp greu, căzînd şi descriind în căderea sa jumătatea înălţimii apei ce stagnează în vas. Dar după ce a ieşit din vas, se accelerează convergînd pînă ce ajunge la o distanţă de orificiu aproape egală cu diametrul orificiului şi cîştigă o viteză mai mare aproape în raportul lui $\sqrt{2}$ către 1; pe care aproximativ o poate cîştiga un corp greu căzînd şi descriind în căderea sa întreaga înălţime a apei ce stagnează în vas. Aşadar în cele ce urmează să reprezentăm diametrul vînei prin acea deschidere mai mică pe care am numit-o EF. Şi să ne închipuim că paralel cu planul deschiderii EF ducem un alt plan superior VW la o distanţă aproape egală cu diametrul deschiderii şi străbătut de o deschidere mai mare ST; prin care să treacă o vînă, care să umple exact orificiul inferior EF, şi al cărei diametru de aceea este către diametrul orificiului inferior aproape ca 25 către 21. Căci astfel vîna va trece perpendicular prin deschiderea inferioară; şi cantitatea apei ce se scurge, potrivit mărimii acestei deschideri, va fi aproximativ aceea pe care o pretinde soluţia problemei. Iar spaţiul care este închis de două plane şi vîna ce cade, se poate considera ca fundul vasului. Dar pentru ca soluţia problemei să fie mai simplă şi mai matematică, este avantajos să luăm numai planul inferior ca fundul vasului, şi să ne închipuim că apa care curgea peste gheaţă ca printr-o pîlnie, şi ieşea din vas prin deschiderea EF făcută în planul inferior, îşi păstrează totdeauna

mișcarea, și gheața repausul său. Deci în cele ce urmează fie ST diametrul deschiderii circulare descrise din centrul Z prin care se scurge cataracta din vas, cînd toată apa din vas este fluidă. Și fie EF diametrul orificiului prin care cataracta căzînd trece cu totul, fie că apa iese din vas prin deschiderea superioară ST, fie că ea cade prin mijlocul gheții din vas ca printr-o pîlnie. Și fie diametrul orificiului superior ST către diametrul celui inferior EF aproximativ ca 25 către 21, și distanța perpendiculară dintre planele orificiului egal cu diametrul orificiului inferior EF. Și viteza apei, ce iese din vas prin deschiderea ST va fi în deschiderea însăși aceea, pe care o poate cîștiga un corp căzînd de la jumătatea înălțimii IZ: iar viteza ambelor cataracte căzînd în orificiul EF va fi aceea, pe care o va cîștiga un corp căzînd de la înălțimea întreagă IG.

Cazul 2. Dacă deschiderea EF nu este în mijlocul fundului vasului ci fundul este perforat în alt loc: apa se va scurge cu aceeași viteză ca mai înainte, dacă numai mărimea orificiului este aceeași. Căci este adevărat că un corp greu se coboară într-un timp mai mare la aceeași adîncime pe o linie oblică decît pe o linie perpendiculară, dar căzînd cîștigă aceeași viteză în ambele cazuri, după cum a demonstrat Galileu.

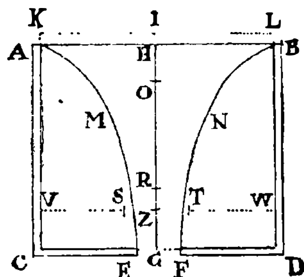
Cazul 3. Viteza apei curgătoare este aceeași printr-o deschidere în latura vasului. Căci dacă deschiderea este mică, astfel încît intervalul dintre suprafața AB și KL poate dispare ca înțeles și vîna apei ce iese orizontal ia o formă parabolică: din parametrul acestei parabole rezultă că viteza apei curgătoare este aceea pe care o poate cîștiga căzînd de la înălțimea HG sau IG a apei, ce stagnează în vas. Căci făcînd experiența am aflat că, dacă înălțimea apei stagnante deasupra orificiului este de douăzeci de degete și înălțimea orificiului deasupra planului paralel cu orizontul este iarăși de douăzeci de degete, vîna apei ce iese, cade pe acel plan la o distanță de aproape 37 degete de perpendiculara coborîtă pe plan de la deschidere. Căci fără rezistență, vîna ar trebui să cadă pe plan la o distanță de 40 de degete, parametrul vînei parabolice fiind de 80 de degete.

Cazul 4. Dar apa ce se scurge, dacă este împinsă în sus, iese tot cu aceeași viteză. Căci vîna îngustă a apei ce iese se urcă cu o mișcare perpendiculară la înălțimea GH sau GI a apei ce stagnează în vas, dacă nu cumva urcarea ei este împiedicată întrucîtva de rezistența aerului; și deci aceea ce se scurge cu viteza pe care ar fi putut-o cîștiga căzînd de la acea înălțime. Fiecare particulă a apei stagnante este apăsată din toate părțile în mod egal (potrivit propoziției XIX, Cartea a II-a) și cedînd presiunii este împinsă în toate părțile cu o forță egală, fie că descinde printr-un orificiu din fundul vasului, fie că se scurge orizontal printr-o deschidere laterală, fie că iese printr-un canal și apoi se urcă printr-o mică deschidere făcută în partea superioară a canalului. Și că viteza cu care curge apa este aceea pe care am arătat-o în această propoziție, rezultă nu numai din raționament, ci este evidentă și prin experiențele foarte cunoscute descrise mai înainte.

Cazul 5. Viteza apei în scurgere este aceeași fie că forma orificiului este circulară, fie că este pătratică sau triunghiulară sau alta oarecare egală

cu cea circulară. Căci viteza în scurgere nu depinde de forma orificiului ci provine din înălţimea lui sub planul *KL*.

CAZUL 6. Dacă partea inferioară a vasului *ABDC* se cufundă în apă stătătoare, şi înălţimea apei stătătoare deasupra fundului vasului este *GR*; viteza cu care apa ce se află în vas se scurge prin orificiul *EF* în apa stătătoare, va fi aceea pe care o poate cîştiga apa căzînd şi descriind în căderea sa înălţimea *IR*. Căci greutatea întregei ape din vas care este inferioară suprafeţei apei stătătoare, va fi susţinută în echilibru prin greutatea apei stătătoare şi deci va accelera foarte puţin mişcarea apei ce coboară în vas. Acest caz de asemenea va fi clar prin experienţe, măsurînd anume timpurile în care se scurge apa.



COROLARUL 1. De aici dacă prelungim înălţimea *CA* a apei pînă în *K*, astfel ca *AK* să fie către *CK* precum pătratul raportului ariei deschiderii făcute într-o parte oarecare a fundului, către aria cercului *AB*; viteza apei curgătoare va fi egală cu viteza pe care o poate cîştiga apa căzătoare şi descriind în căderea sa înălţimea *KC*.

COROLARUL 2. Şi forţa, prin care se poate genera mişcarea întreagă a apei ce ţîşneşte, este egală cu greutatea unei coloane cilindrice de apă, a cărei bază este orificiul *EF*, şi înălţimea 2*GI* sau 2*CK*. Căci apa curgătoare în timpul în care egalează această coloană, căzînd din cauza greutăţii sale de la înălţimea *GI*, îşi poate cîştiga viteza, cu care ţîşneşte.

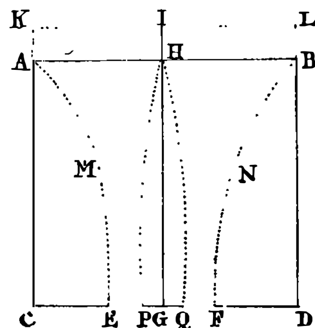
COROLARUL 3. Greutatea întregei ape în vasul *ABDC* este către partea greutăţii, care se întrebuinţează la scurgerea apei, precum suma cercurilor *AB* şi *EF* către dublul cercului *EF*. Căci fie *IO* media proporţională între *IH* şi *IG*; şi apa ieşind prin deschiderea *EF*, în timp ce o picătură căzînd din *I* ar putea descrie înălţimea *IG*, va fi egală cu cilindrul a cărui bază este cercul *EF* şi înălţimea 2*IG*, adică, cu cilindrul a cărui bază este cercul *AB* şi înălţimea 2*IO*, căci cercul *EF* este către cercul *AB* precum rădăcina patrată a raportului înălţimii *IH* către înălţimea *IG*, adică în raportul simplu al mediei proporţionale *IO* către înălţimea *IG*; şi în timp ce o picătură căzînd din *I* poate descrie înălţimea *IH*, apa ce iese va fi egală cu un cilindru a cărui bază este cercul *AB* şi înălţimea 2*IH*; şi în timp ce o picătură căzînd din *I* prin *H* în *G* descrie diferenţa *HG* a înălţimilor, apa ce iese, adică apa întreagă din solidul *ABNFEM* va fi egală cu diferenţa cilindrilor, adică, cu cilindrul a cărui bază este *AB* şi înălţimea 2*HO*. Şi de aceea apa întreagă din vasul *ABDC* este către apa întreagă ce cade din solidul *ABNFEM* precum *HG* către 2*HO*, adică, precum $HO + OG$ către 2*HO*, sau $IH + IO$ către 2*IH*. Dar greutatea apei întregi din solidul *ABNFEM* se întrebuinţează la scurgerea apei; şi de aceea greutatea apei întregi din vas este către partea care se foloseşte la curgerea apei, precum $IH+IO$ către 2*IH*, şi de aceea precum suma cercurilor *EF* şi *AB* către dublul cercului *EF*.

COROLARUL 4. Şi de aici greutatea apei întregi din vasul *ABDC* este către cealaltă parte pe care o susţine fundul vasului, precum suma cercurilor *AB* şi *EF* către diferenţa aceloraşi cercuri.

COROLARUL 5. Şi partea greutăţii pe care o susţine fundul vasului este către partea cealaltă a greutăţii, care se foloseşte la scurgerea apei, precum diferenţa cercurilor *AB* şi *EF* către dublul cercului mai mic *EF*, sau precum aria fundului către dublul deschiderii.

COROLARUL 6. Iar partea greutăţii, care singură apasă fundul, este către greutatea apei întregi, care apasă perpendicular pe fund, precum cercul *AB* către suma cercurilor *AB* şi *EF*, sau precum cercul *AB* către excesul dublului cercului *AB* asupra fundului. Căci partea greutăţii, care singură acţionează fundul, este către greutatea apei întregi în vas, precum diferenţa cercurilor *AB* şi *EF* către suma aceloraşi cercuri, potrivit corolarului 4; şi greutatea apei întregi din vas este către greutatea apei întregi care apasă perpendicular asupra fundului, precum cercul *AB* către diferenţa cercurilor *AB* şi *EF*. Prin urmare prin egalitate perturbată, partea greutăţii, care singură apasă fundul, este către greutatea apei întregi, care apasă fundul perpendicular, precum cercul *AB* către suma cercurilor *AB* şi *EF* sau excesul dublului cercului *AB* faţă de fund.

COROLARUL 7. Dacă în mijlocul orificiului *EF* aşezăm un mic cerc *PQ* descris din centrul *G* şi paralel cu orizontul; greutatea apei pe care o susţine acel cerc, este mai mare ca greutatea părţii a treia a unui cilindru de apă a cărui bază este acel mic cerc şi înălţimea *GH*. Căci fie *ABNFEM* cataracta sau coloana apei căzînde avînd axa *GH* ca mai sus, şi să ne închipuim toată apa îngheţată în vas, atît în circuitul cataractei cît şi deasupra cercului cel mic, a cărei fluiditate nu joacă rol la coborîrea foarte promptă şi rapidă a apei. Şi fie *PHQ* coloana de apă îngheţată deasupra cercului cel mic, avînd vîrful *H* şi înălţimea *GH*. Şi să ne închipuim că această cataractă cade cu întreaga sa greutate, şi nu apasă pe *PHQ* nici nu se sprijină pe ea, ci alunecă liber şi fără frecare pe lîngă ea, decît poate în însuşi vîrful gheţii în care cataracta la începutul căderii începe să fie concavă. Şi cum apa *AMEC*, *BNFD* îngheţată în jurul cataractei are suprafaţa internă *AME*, *BNF* convexă înspre cataracta căzătoare, tot astfel şi coloana *PHQ* va fi convexă spre cataractă, şi de aceea mai mare decît conul a cărui bază este cercul cel mic *PQ* şi înălţimea *GH*, adică, mai mare decît a treia parte a cilindrului descris cu aceeaşi bază şi înălţime. Dar cercul cel mic susţine greutatea acestei coloane, adică, o greutate care este mai mare decît greutatea canalului sau a părţii a treia a cilindrului.



COROLARUL 8. Greutatea apei pe care o susţine cercul foarte mic *PQ*, pare a fi mai mică decît greutatea a două treimi din cilindrul apei a cărei bază este acel cerc mic şi înălţimea *HG*. Căci menţinînd cele presupuse, să ne închipuim descrisă jumătatea sferoidului a cărui bază este acel cerc mic şi semiaxa sau înălţimea *HG*. Şi această figură va fi egală cu două treimi ale acelui cilindru şi va cuprinde coloana de apă îngheţată *PHQ* a cărui greutate o susţine cercul mic. Căci pentru ca mişcarea apei să fie mai directă, suprafaţa externă a coloanei va concura cu baza *PQ* într-un unghi puţin ascuţit, fiindcă apa căzînd incontinuu este accelerată şi din cauza accelerării

devine mai îngustă; şi cum acel unghi este mai mic decît unul drept, această coloană la părţile ei inferioare va fi situată în interiorul jumătăţii sferoidului. Iar în partea de sus ea va fi ascuţită sau cu un vîrf, ca nu cumva mişcarea orizontală a apei spre vîrful sferoidului să fie infinit mai rapidă decît mişcarea ei spre orizont. Şi cu cît este mai mic cercul PQ, cu atît va fi mai ascuţit vîrful coloanei; şi cercul cel mic descrescînd la infinit, unghiul PHQ va scădea la infinit, şi de aceea coloana va fi situată în interiorul jumătăţii sferoidului. Aşadar această coloană este mai mică decît jumătatea sferoidului, sau decît două treimi din cilindrul a cărui bază este acel cerc mic şi înălţimea GH. Dar cercul mic susţine forţa apei egală cu greutatea acestei coloane, în timp ce greutatea apei ambiante se foloseşte la curgerea ei.

COROLARUL 9. Greutatea apei pe care o susţine cercul foarte mic PQ, este egală cu greutatea cilindrului de apă a cărui bază este acel cerc mic şi înălţimea aproximativ $\frac{1}{2}\,GH$. Căci această greutate este media aritmetică între greutăţile conului şi a jumătăţii sferoidului menţionat. Dar dacă cercul acela nu este foarte mic, ci se măreşte pînă ce egalează orificiul EF; acesta va susţine greutatea apei întregi ce apasă perpendicular pe el, adică, greutatea cilindrului apei a cărui bază este acel cerc şi înălţimea este GH.

COROLARUL 10. Şi (după cît judec) greutatea pe care o susţine cercul cel mic este totdeauna către greutatea cilindrului de apă, a cărui bază este cercul acela şi înălţimea este $\frac{1}{2}\,GH$, precum EF^2 către $EF^2 - \frac{1}{2}\,PQ^2$, sau aproximativ precum cercul EF către surplusul cercului acestuia faţă de jumătatea cercului PQ.

LEMA IV

Rezistenţa cilindrului care înaintează în mod uniform de-a lungul lungimii sale, nu se schimbă dacă lungimea lui creşte sau descreşte, şi deci este aceeaşi cu rezistenţa cercului descris cu acelaşi diametru şi care înaintează cu aceeaşi viteză după o linie dreaptă perpendiculară pe planul său.

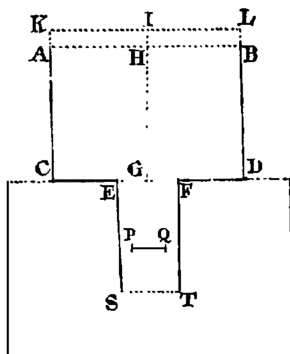
Căci laturile cilindrului se opun foarte puţin mişcării lui: şi cilindrul, micşorîndu-se lungimea lui la infinit, devine un cerc.

PROPOZIŢIA XXXVII. TEOREMA XXIX

Rezistenţa unui cilindru, care înaintează în mod uniform în direcţia lungimii sale, într-un fluid comprimat infinit şi neelastic, rezistenţa produsă de mărimea secţiunii transversale, este către forţa prin care întreaga lui mişcare poate fi nimicită sau generată, în timp ce descrie cvadruplul lungimii sale, precum densitatea mediului către densitatea cilindrului aproximativ.

Căci dacă vasul $ABDC$ atinge cu fundul său CD suprafaţa apei stătătoare, şi apa curge din acest vas prin canalul cilindric $EFTS$ perpendicular pe orizont în apa stătătoare, iar cercul cel mic PQ se plasează paralel cu orizontul undeva în mijlocul canalului; şi se prelungeşte CA în K, încît AK să fie către CK precum pătratul raportului pe care-l are surplusul orificiului

canalului EF față de cercul cel mic PQ către cercul AB: este evident (potrivit cazului 5, cazului 6 și corolarului 1, propoziția XXXVI) că viteza apei ce trece prin spațiul inelar dintre cercul cel mic și laturile vasului, va fi aceea pe care o poate cîștiga apa căzînd și descriind în căderea sa înălțimea KC sau IG. Și (potrivit corolarului X, propoziția XXXVI) dacă lățimea vasului este infinită, astfel că linioara HI să dispară și înălțimea IG, HG să devină egale: forța apei curgătoare în cercul cel mic va fi către greutatea cilindrului a cărui bază este cercul mic și înălțimea $\frac{1}{2}IG$, precum aproximativ EF^2 către $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$. Căci forța apei, ce curge cu o mișcare uniformă prin canalul întreg, va fi aceeași în cercul cel mic PQ în oricare parte a canalului ar fi situat. Căci să închidem acum orificiile EF, ST ale canalului, și cercul cel mic să se urce în fluidul comprimat din toate părțile și în urcarea sa să silească apa superioară să coboare prin spațiul inelar dintre cercul cel mic și laturile canalului: și viteza cercului cel mic ascendent va fi către viteza apei descendente precum diferența cercurilor EF și PQ către cercul PQ, și viteza cercului ascendent către suma vitezelor, adică, către viteza relativă a apei descendente cu care trece pe lîngă cercul cel mic ascendent, precum diferența cercurilor EF și PQ către cercul EF, sau precum $EF^2 - PQ^2$ către EF^2. Fie viteza relativă egală cu viteza, cu care am arătat mai sus că trece apa prin spațiul inelar pînă ce cercul cel mic rămîne nemișcat, adică, cu viteza pe care o poate cîștiga apa căzînd și descriind în căderea sa înălțimea IG; și forța apei în cercul cel mic ascendent va fi aceeași ca mai sus (potrivit corolarului V), adică rezistența cercului celui mic ascendent va fi către greutatea cilindrului de apă a cărui bază este cercul cel mic și înălțimea este $\frac{1}{2}IG$, precum EF^2 către $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$. Dar viteza cercului mic va fi către viteza pe care o cîștigă apa căzînd și descriind în căderea sa înălțimea IG, precum $EF^2 - PQ^2$ către EF^2.



Să presupunem că amplitudinea canalului crește la infinit: și rapoartele dintre $EF^2 - PQ^2$ și EF^2, și dintre EF^2 și $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, vor deveni în cele din urmă rapoarte de egalitate. Și de aceea viteza cercului mic va fi aceea pe care apa o poate cîștiga căzînd și descriind în căderea sa înălțimea IG, iar rezistența lui va deveni egală cu greutatea cilindrului a cărui bază este cercul cel mic și înălțimea jumătatea înălțimii IG, de la care trebuie să cadă cilindrul pentru ca să cîștige viteza cercului mic ascendent; și cu această viteză cilindrul, în timpul căderii, va descrie cvadruplul lungimii sale. Dar rezistența cilindrului, ce progresează cu această viteză de-a lungul lungimii sale, este aceeași cu rezistența cercului mic (potrivit lemei IV) și deci este egală aproximativ cu forța cu care mișcarea lui, în timp ce descrie cvadruplul lungimii sale, poate fi generată.

Dacă lungimea cilindrului se mărește sau se micșorează: mișcarea lui, ca și timpul în care descrie cvadruplul lungimii sale, se vor mări sau micșora în același raport; și deci forța, cu care mișcarea mărită sau micșorată într-un

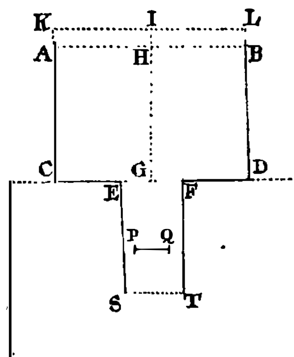
timp de asemenea mărit sau micşorat, poate fi generată sau nimicită, nu se va schimba; şi de aceea şi acum este egală cu rezistenţa cilindrului, căci şi aceasta rămîne neschimbată, potrivit lemei IV.

Dacă densitatea cilindrului se măreşte sau se micşorează: mişcarea lui ca şi forţa prin care mişcarea poate fi produsă sau anulată în acelaşi timp se va mări sau micşora în acelaşi raport. Aşadar rezistenţa unui cilindru oarecare va fi către forţa cu care întreaga lui mişcare poate fi produsă sau anulată, în timp ce descrie cvadruplul lungimii sale, precum densitatea mediului către densitatea cilindrului aproximativ. Q.E.D.

Dar fluidul trebuie comprimat ca să fie continuu, apoi trebuie să fie continuu şi neelastic pentru ca toată presiunea, care se naşte din comprimarea lui, să se propage instantaneu; şi acţionînd în toate părţile corpului în mod egal să nu schimbe rezistenţa.

Presiunea care se naşte din mişcarea corpului, se foloseşte la producerea mişcării părţilor fluidului şi creează rezistenţa. Iar presiunea care se naşte din compresiunea fluidului, oricît ar fi de intensă, dacă se propagă instantaneu, nu dă naştere nici unei mişcări în părţile fluidului continuu, nici nu produce nici o variaţie a mişcării: şi deci nici nu măreşte nici nu micşorează rezistenţa. Desigur acţiunea fluidului, care se naşte din compresiunea lui, nu poate fi mai intensă în părţile posterioare ale corpului mişcat decît în părţile lui anterioare şi deci nu poate diminua rezistenţa descrisă în această propoziţie: şi nu va fi mai intensă în părţile anterioare decît în cele posterioare, dacă propagarea ei este infinit mai rapidă decît mişcarea corpului apăsat. Dar va fi infinit mai rapid şi se va propaga instantaneu, dacă fluidul este continuu şi neelastic.

COROLARUL 1. Rezistenţele cilindrilor, care înaintează în mod uniform în direcţia lungimilor lor în medii continue infinite, sînt într-un raport care se compune din raportul pătratului vitezelor şi raportul pătratului diametrelor şi din raportul densităţii mediilor.

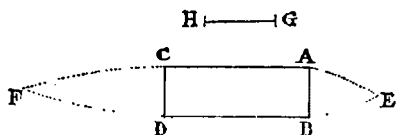


COROLARUL 2. Dacă amplitudinea canalului nu creşte la infinit, ci cilindrul înaintează în direcţia lungimii sale într-un mediu închis în repaus şi axa lui coincide tot timpul cu axa canalului: rezistenţa lui va fi către forţa cu care poate fi produsă sau anulată întreaga lui mişcare, în timpul în care el descrie cvadruplul lungimii sale, după un raport care se compune din raportul simplu al lui EF^2 către $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, din raportul dublu al lui EF^2 către $EF^2 - PQ^2$, şi din raportul densităţii mediului către densitatea cilindrului.

COROLARUL 3. Presupunînd aceleaşi, şi că lungimea L este către cvadruplul lungimii cilindrului într-un raport care se compune din raportul simplu al lui $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ către EF^2, şi din dublul raportului lui $EF^2 - PQ^2$ către EF^2, rezistenţa cilindrului va fi către forţa cu care poate fi anulată sau produsă întreaga lui mişcare, în timp ce descrie lungimea L, precum densitatea mediului către densitatea cilindrului.

SCOLIE

În această propoziţie am studiat rezistenţa născută numai din mărimea secţiunii transversale a cilindrului, neglijînd partea rezistenţei ce poate proveni din oblicitatea mişcărilor. Căci după cum în primul caz al propoziţiei XXXVI oblicitatea mişcărilor, cu care părţile apei din vas convergeau din toate părţile în orificiul *EF*, a împiedicat curgerea apei prin orificiu: tot astfel în această propoziţie, oblicitatea mişcărilor, cu care părţile apei presate de extremitatea anterioară a cilindrului, cedează presiunii şi diverg în toate părţile, întîrzie trecerea lor prin locuri situate în jurul extremităţii aceleia spre părţile posterioare ale cilindrului, şi face ca fluidul să se mişte la o distanţă mai mare şi să mărească rezistenţa, şi aceasta aproape în raportul în care descreşte scurgerea apei din vas, adică, aproape în pătratul raportului lui 25 către 21. Şi după cum, în primul caz al acelei propoziţii, am făcut ca părţile apei să treacă perpendicular prin orificiul *EF* şi în cea mai mare cantitate, presupunînd că toată apa din vas care era îngheţată în jurul cataractei, şi a cărei mişcare era oblică şi inutilă, rămîne fără mişcare: astfel în această propoziţie, ca să anulăm oblicitatea mişcărilor, şi părţile apei cedîndu-i cu mişcarea cea mai directă şi mai scurtă să lase trecerea cea mai liberă cilindrului şi să rămînă numai rezistenţa, care se naşte din mărimea secţiunii transversale, şi care nu se poate micşora decît micşorînd diametrul cilindrului, trebuie să presupunem că părţile fluidului, ale cărui mişcări sînt oblice şi inutile şi crează o rezistenţă, sînt în repaus între ele la ambele extremităţi ale cilindrului, şi sînt coerente şi se unesc la cilindru. Fie *ABCD* un dreptunghi, şi fie *AE* şi *BE* două arce parabolice descrise cu axa *AB*, şi cu parametrul care este către spaţiul *HG*, descris de cilindru în cădere pînă ce îşi cîştigă viteza, precum *HG* către $\frac{1}{2}AB$. Fie de asemenea *CF* şi *DF* alte două arce parabolice, descrise cu axa *CD* şi cu parametrul care este cvadruplul parametrului precedent; prin învîrtirea figurii în jurul axei *EF*, se naşte solidul a cărui parte mijlocie *ABDC* este cilindrul de care vorbim şi părţile extreme *ABE* şi *CDF* conţin părţile fluidului în repaus între ele, formînd două corpuri rigide, care aderă la cilindru din toate părţile cum ar fi capul şi coada. Şi rezistenţa solidului *EACFDB*, ce înaintează de-a lungul lungimii axei sale *FE* înspre *E*, va fi aproximativ aceea pe care am descris-o în această propoziţie, adică avînd raportul către forţa cu care întreaga mişcare a cilindrului poate fi sau anulată sau produsă, în timp ce lungimea $4AC$ este descrisă cu mişcarea continuată în mod uniform, pe care-l are aproximativ densitatea fluidului către densitatea cilindrului. Şi faţă de această forţă rezistenţa nu poate fi mai mică decît în raportul lui 2 la 3, potrivit corolarului 7 al propoziţiei XXXVI.



LEMA V

Dacă un cilindru, o sferă şi un sferoid, ale căror lăţimi sînt egale, sînt situate succesiv în mijlocul canalului cilindric astfel încît axele lor să coincidă cu axa canalului: aceste corpuri vor împiedica în mod egal curgerea apei prin canal.

Căci spaţiile dintre canal și cilindru, sferă și sferoid prin care trece apa, sînt egale, și apa prin spaţii egale trece în mod egal.

Acestea au loc astfel din ipoteza că toată apa deasupra cilindrului, sferei sau sferoidului, a cărei fluiditate nu joacă nici un rol la trecerea foarte rapidă a apei, este înghețată, după cum am explicat în corolarul VII, propoziția XXXVI.

LEMA VI

Fiind presupuse aceleași, corpurile menționate sînt acționate în mod egal de apa ce curge prin canal.

Aceasta este evident din lema V și legea III a mișcării. Căci apa și corpurile se acționează între ele în mod egal.

LEMA VII

Dacă apa este în repaus în canal, și aceste corpuri sînt duse prin canal în părți contrarii cu viteze egale: rezistențele lor reciproce vor fi egale.

Aceasta apare din lema de mai sus, căci mișcările relative rămîn aceleași între ele.

SCOLIE

Același este cazul tuturor corpurilor convexe și rotunde, ale căror axe coincid cu axa canalului. O diferență oarecare se poate produce dintr-o frecare mai mare sau mai mică; dar în aceste leme presupunem că corpurile sînt foarte netede, și tenacitatea și frecarea mediului sînt nule și că părțile fluidului, care prin mișcările lor oblice și superflue pot perturba, împiedica și întîrzia fluxul apei prin canal, sînt în repaus între ele ca și cînd ar fi fixate prin înghețare și aderă la corpuri la părțile lor anterioare și posterioare, după cum am spus în scolia propoziției precedente. Căci în cele ce urmează este vorba de rezistența cea mai mică dintre toate pe care o pot întîmpina corpurile rotunde, descrise cu secțiunile transversale maxime.

Corpurile ce înoată în fluide, cînd se mișcă în direcție, fac ca fluidul la partea anterioară să se urce, la cea posterioară să se coboare, îndeosebi dacă figurile sînt obtuze; și de aceea întîmpină o rezistență ceva mai mare decît dacă la capăt și la coadă ar fi ascuțite. Și corpurile mișcate în fluide elastice, dacă sînt obtuze înainte și înapoi, condensează fluidul cu ceva mai mult la partea anterioară și îl relaxează cu ceva mai mult la cea posterioară; și de aceea întîmpină o rezistență cu ceva mai mare decît dacă ar fi ascuțite la capăt și la coadă. Dar noi în aceste leme și propoziții nu tratăm despre fluidele elastice, ci despre cele neelastice; nu despre cele ce plutesc pe fluid, ci despre cele cufundate adînc. Și dacă se cunoaște rezistența corpurilor în fluide neelastice, această rezistență trebuie întrucîtva mărită atît în fluidele elastice, cum este aerul, cît și pe suprafețele fluidelor stătătoare, cum sînt mările și bălțile.

PROPOZIŢIA XXXVIII. TEOREMA XXX

Rezistenţa unei sfere ce înaintează în mod uniform într-un fluid comprimat infinit şi neelastic, este către forţa cu care întreaga lui mişcare poate fi anulată sau produsă, în timp ce descrie opt treimi din diametrul său, aproximativ precum densitatea fluidului către densitatea sferei.

Căci sfera este către cilindrul circumscris precum doi către trei, şi de aceea forţa, care poate anula întreaga mişcare a cilindrului în timp ce cilindrul descrie lungimea a patru diametre, anulează toată mişcarea sferei în timp ce sfera descrie două treimi din această lungime, adică, opt treimi din diametrul propriu. Dar rezistenţa cilindrului este către această forţă aproximativ precum densitatea fluidului către densitatea cilindrului sau a sferei potrivit propoziţiei XXXVII şi rezistenţa sferei este egală cu rezistenţa cilindrului potrivit lemelor V, VI, VII. Q.E.D.

COROLARUL 1. Rezistenţele sferelor, în medii comprimate infinite, sînt într-un raport ce se compune din pătratul raportului vitezei, şi pătratul raportului diametrului, şi raportul densităţii mediilor.

COROLARUL 2. Viteza maximă cu care o sferă poate coborî într-un fluid rezistent sub acţiunea greutăţii sale comparative este aceea pe care o poate cîştiga sfera, căzînd cu aceeaşi greutate, fără rezistenţă şi în căderea sa descriind un spaţiu care este către patru treimi din diametrul său precum densitatea sferei către densitatea fluidului. Căci sfera în timpul căderii sale, cu viteza cîştigată în cădere, va descrie un spaţiu care va fi către opt treimi din diametrul său, precum densitatea sferei către densitatea fluidului; şi forţa greutăţii ce produce această mişcare, va fi către forţa care poate produce aceeaşi mişcare, în timp ce sfera descrie opt treimi din diametrul său cu aceeaşi viteză, precum densitatea fluidului către densitatea sferei: şi deci potrivit acestei propoziţii, forţa greutăţii va fi egală cu forţa rezistenţei, şi de aceea nu poate accelera sfera.

COROLARUL 3. Fiind dată atît densitatea sferei cît şi viteza ei la începutul mişcării, precum şi densitatea fluidului comprimat în repaus în care se mişcă sfera, se dă în fiece moment şi viteza sferei şi rezistenţa ei şi spaţiul descris de ea, potrivit corolarului 7, propoziţia XXXV.

COROLARUL 4. O sferă mişcîndu-se într-un fluid comprimat în repaus de aceeaşi densitate cu el, va pierde jumătate din mişcarea sa înainte de a fi descris lungimea a două din diametrele sale, potrivit aceluiaşi corolar 7.

PROPOZIŢIA XXXIX. TEOREMA XXXI

Rezistenţa unei sfere ce înaintează printr-un fluid închis într-un canal cilindric şi comprimat în mod uniform, este către forţa, prin care întreaga ei mişcare, poate fi sau produsă sau anulată în timp ce descrie opt treimi din diametrul său, într-un raport ce se compune din raportul orificiului canalului către excesul acestui orificiu faţă de jumătatea cercului maxim al sferei, şi din pătratul raportului orificiului canalului către excesul acestui orificiu faţă de cercul maxim al sferei, şi din aproximativ raportul densităţii fluidului către densitatea sferei.

Aceasta apare evident din corolarul 2, propoziţia XXXVII căci demonstraţia se face la fel ca în propoziţia precedentă.

ŞCOLIE

În ultimele două propoziţii (ca şi în lema V) presupun că îngheaţă toată apa care precedă sfera şi a cărei fluiditate măreşte rezistenţa sferei. Dacă toată apa aceea se lichefiază, rezistenţa va creşte întrucîtva. Dar creşterea în aceste proporţii va fi mică şi se poate neglija, deoarece suprafaţa convexă a sferei va face aproape întreg serviciul gheţii.

PROPOZIŢIA XL. PROBLEMA IX

Să aflăm prin experienţă rezistenţa unei sfere, ce înaintează într-un mediu comprimat perfect fluid.

Fie A greutatea sferei din vid, B greutatea ei într-un mediu rezistent, D diametrul sferei, F spaţiul care este către $\frac{4}{3}D$ precum densitatea sferei către densitatea mediului, adică, precum A către $A-B$, G timpul în care sfera de greutatea B căzînd fără rezistenţă descrie spaţiul F, şi H viteza pe care o cîştigă această sferă în căderea sa. Şi H va fi viteza maximă cu care sfera, poate descinde într-un mediu rezistent, sub influenţa greutăţii sale B, potrivit corolarului 2, propoziţia XXXVIII, şi rezistenţa, pe care o întîlneşte sfera ce coboară cu acea viteză, va fi egală cu greutatea ei B: iar rezistenţa, pe care o întîlneşte avînd o altă viteză oarecare, va fi către greutatea B, ca pătratul raportului acestei viteze către viteza maximă H, potrivit corolarului 1, propoziţia XXXVIII.

Aceasta este rezistenţa ce provine din inerţia materiei fluide. Iar aceea care se naşte din elasticitate, tenacitate, şi frecarea părţilor ei, se va afla astfel.

Să lăsăm sfera să cadă în fluid prin greutatea sa; şi fie P timpul căderii, şi anume în secunde dacă timpul G se dă în secunde. Să aflăm numărul absolut N al cărui logaritm este $0.4342944819\frac{2P}{G}$, şi fie L logaritmul numărului $\frac{N+1}{N}$: şi viteza obţinută căzînd va fi $\frac{N-1}{N+1}H$, iar înălţimea descrisă va fi $\frac{2PF}{G}-1{,}3862943611\,F+4{,}605170186\,LF$. Dacă fluidul este destul de adînc, se poate neglija termenul $4.605170186FL$; şi $\frac{2PF}{G}-1{,}3862943611\,F$ va fi aproape înălţimea descrisă. Acestea sînt evidente din propoziţia IX a Cărţii a II-a şi corolarele ei, în ipoteza că sfera nu întîlneşte altă rezistenţă decît aceea care provine din inerţia materiei. Iar dacă ea întîlneşte afară de aceea o altă rezistenţă, coborîrea va fi mai înceată, şi din întîrziere se cunoaşte mărimea acestei rezistenţe.

Pentru a cunoaşte mai uşor viteza şi coborîrea unui corp ce cade într-un fluid, am compus tabloul următor, în care coloana întîi denotă timpurile de coborîre, a doua arată vitezele cîştigate în cădere, viteza maximă fiind 100 000 000, a treia indică spaţiile descrise în acele timpuri în cădere, $2F$ fiind spaţiul pe care-l descrie corpul în timpul G cu viteza maximă, şi a patra

ne dă spaţiile descrise în aceleaşi timpuri cu viteza maximă. Numerele din coloana a patra sînt $\frac{2P}{G}$, şi scăzînd numărul 1,3862944—4,6051702 *L*, aflăm numerele din coloana a treia, şi trebuie să înmulţim aceste numere cu spaţiul *F* ca să avem spaţiile descrise în cădere. Pe lîngă acestea, s-a mai adăugat coloana a cincea care cuprinde spaţiile descrise în aceleaşi timpuri, de un corp ce cade în vid, sub acţiunea greutăţii sale comparative *B*.

Timpurile *P*	Vitezele corpului ce cade în vid	Spaţiile descrise căzînd în fluid	Spaţiile descrise cu mişcarea maximă	Spaţiile descrise în căderea în vid
0,001 *G*	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 *F*	0,002 *F*	0,000001 *F*
0,01 *G*	999967	0,0001 *F*	0.02 *F*	0,0001 *F*
0,1 *G*	9966799	0,0099834 *F*	0,2 *F*	0,01 *F*
0,2 *G*	19737532	0,0397361 *F*	0,4 *F*	0,04 *F*
0,3 *G*	29131261	0,0886815 *F*	0.6 *F*	0,09 *F*
0.4 *G*	37994896	0,1559070 *F*	0,8 *F*	0.16 *F*
0,5 *G*	46211716	0,2402290 *F*	1,0 *F*	0,25 *F*
0,6 *G*	53704957	0,3402706 *F*	1.2 *F*	0,36 *F*
0,7 *G*	60436778	0,4545405 *F*	1,4 *F*	0.49 *F*
0 8 *G*	66403677	0,5815071 *F*	1,6 *F*	0,64 *F*
0,9 *G*	71629787	0,7196609 *F*	1,8 *F*	0,81 *F*
1 *G*	76159416	0,8675617 *F*	2 *F*	1 *F*
2 *G*	96402758	2,6500055 *F*	4 *F*	4 *F*
3 *G*	99505475	4.6186570 *F*	6 *F*	9 *F*
4 *G*	99932930	6,6143765 *F*	8 *F*	16 *F*
5 *G*	99990920	8,6137964 *F*	10 *F*	25 *F*
6 *G*	99998771	10.6137179 *F*	12 *F*	36 *F*
7 *G*	99999834	12.6137073 *F*	14 *F*	49 *F*
8 *G*	99999980	14 6137059 *F*	16 *F*	64 *F*
9 *G*	99999997	16,6137057 *F*	18 *F*	81 *F*
10 *G*	99999999	18,6137056 *F*	20 *F*	100 *F*

SCOLIE

Ca să aflu rezistenţele fluidelor prin experienţe, am pregătit un vas pătratic de lemn, avînd lungimea şi lăţimea internă de nouă degete de picior londonez, adîncimea de nouă picioare şi jumătate, şi l-am umplut cu apă de ploaie; şi făcînd sfere de ceară şi cu plumb înăuntru, am notat timpurile de coborîre a sferelor, înălţimea coborîrii fiind de 112 degete de picioare. Un picior solid cubic londonez conţine 76 funţi romani de apă de ploaie, şi un deget cubic al acestui picior conţine $\frac{19}{36}$ uncii ale acestui funt sau $253\frac{1}{3}$ grăunţe; şi o sferă de apă descrisă cu un diametru de un deget cîntăreşte 132,645 grăunţe în aer sau 132,8 grăunţe în vid; şi o altă sferă oarecare este precum excesul greutăţii ei în vid faţă de greutatea ei în apă.

Experienţa 1. O sferă, a cărei greutate era de $156\frac{1}{4}$ grăunţe în aer şi 77 grăunţe în apă, a descris toată înălţimea de 112 degete în timp de patru secunde. Şi repetînd experienţa, sfera din nou a căzut în acelaşi timp de patru secunde.

Greutatea sferei în vid este de $156\frac{13}{38}$ grăunţe şi surplusul acestei greutăţi asupra greutăţii sferei în apă este de $79\frac{13}{38}$ grăunţe. De unde rezultă diametrul sferei de 0,84224 degete. Dar după cum excesul acela către greutatea sferei în

vid, tot așa densitatea apei către densitatea sferei, și tot așa opt treimi din diametrul sferei (adică 2,24597 degete) către spațiul $2F$, care va fi deci 4,4256 degete. O sferă căzînd în timpul unei secunde în vid, sub acțiunea greutății sale întregi de $156\frac{13}{38}$ grăunțe, va descrie $193\frac{1}{3}$ degete; și căzînd în apă fără rezistență cu greutatea de 77 grăunțe, în același timp, va descrie 95,219 degete; și în timpul G, care este către o secundă precum rădăcina pătrată a raportului spațiului F sau 2,2128 degete către 95,219 degete va descrie 2,2128 degete și va obține viteza maximă H, cu care poate descinde în apă. Prin urmare timpul G este $0'',15244$. Și în acest timp G, cu viteza maximă H, sfera va descrie spațiul $2F$ de 4,4256 degete; și deci în timp de 4 secunde va descrie spațiul de 116,1245 degete. Să scădem spațiul 1,3862944 F sau 3,0676 degete și va rămîne spațiul de 113,0569 degete, pe care sfera căzînd în apă într-un vas foarte larg, îl va descrie în patru secunde. Acest spațiu, din cauza îngustimii vasului de lemn menționat, trebuie să se micșoreze după un raport care se compune din rădăcina pătrată a raportului orificiului vasului către excesul acestui orificiu față de semicercul maxim al sferei și din raportul simplu al aceluiași orificiu către excesul lui asupra cercului maxim al sferei, adică în raportul de 1 la 0,9914. Ceea ce fiind făcut, vom avea spațiul de 112,08 degete, pe care sfera căzînd în apă în acest vas de lemn a trebuit să-l descrie aproximativ în timp de patru secunde conform teoriei. Dar în experiență a descris 112 degete.

EXPERIENȚA 2. Trei sfere egale, ale căror greutăți separate erau de $76\frac{1}{3}$ grăunțe în aer și $5\frac{1}{16}$ grăunțe în apă, erau lăsate să cadă succesiv; și fiecare a căzut în apă în timp de cincisprezece secunde, descriind în cădere înălțimea de 112 degete.

Făcînd calculul se obține greutatea sferei în vid $76\frac{5}{12}$ grăunțe, excesul acestei greutăți față de greutatea în apă $71\frac{17}{48}$ grăunțe, diametrul sferei 0,81296 degete, opt treimi din acest diametru 2,16789 degete, spațiul $2F$ de 2,3217 degete, spațiul pe care o sferă de greutate $5\frac{1}{16}$ grăunțe căzînd în timp de 1^s fără rezistență va descrie 12,808 degete și timpul G de $0^s,301056$. Așadar sfera, cu viteza maximă cu care poate coborî în apă sub acțiunea greutății de $5\frac{1}{16}$ grăunțe, în timpul $0^s,301056$ va descrie spațiul 2,3217 degete și în timpul de 15^s spațiul de 115,678 degete. Să scădem spațiul 1,3862944 F sau 1,609 degete și va rămîne spațiul 114,069 degete pe care deci sfera trebuie să-l descrie în același timp căzînd într-un vas foarte lat. Din cauza îngustimii vasului nostru trebuie scăzut aproximativ spațiul de 0,895 degete. Și astfel va rămîne spațiul de 113,174 degete pe care sfera căzînd în vasul acesta, conform teoriei ar fi trebuit să-l descrie aproximativ în timpul de 15^s. Dar în experiență a descris 112 degete. Diferența este insensibilă.

EXPERIENȚA 3. Trei sfere egale, ale căror greutăți separate erau de 121 grăunțe în aer și 1 grăunte în apă, erau lăsate să cadă succesiv; și cădeau în apă în timpurile 46″, 47″ și 50″, descriind o înălțime de 112 degete.

Conform teoriei aceste sfere ar fi trebuit să cadă aproximativ în timp de 40″. Faptul că au căzut mai încet trebuie atribuit, fie proporției mai

mici a rezistenței, care se naște din forța de inerție în mișcările întîrziate, către rezistența ce provine din alte cauze; sau îndeosebi unor bule aderente sferei, sau răririi cerii provocată de căldură sau a aerului sau a mînei ce lasă să cadă sfera, sau erorilor insensibile în cîntărirea sferei în apă, nu sînt sigur. Și deci greutatea sferei în apă trebuie să fie de mai multe grăunțe, pentru ca experiența să fie sigură și demnă de încredere.

Experiența 4. Am început experiențele descrise pînă aici, pentru a studia rezistențele fluidelor, înainte de a fi cunoscut teoria expusă în propozițiile imediat precedente. Mai tîrziu, pentru a examina teoria aflată, mi-am pregătit un vas de lemn avînd lățimea interioară de $8\frac{2}{3}$ degete, adîncimea de cincisprezece picioare și o treime. Apoi am făcut patru sfere de ceară avînd plumb înăuntru, fiecare de cîte o greutate de $139\frac{1}{4}$ grăunțe în aer și $7\frac{1}{8}$ grăunțe în apă. Și le-am lăsat libere ca să măsor timpurile de cădere în apă cu ajutorul pendulului, oscilînd la o jumătate de secundă. Sferele, în momentul cînd se cîntăreau și apoi cînd cădeau, erau reci și rămîneau cîtva timp reci; deoarece căldura rarefiază ceara, și prin rarefiere micșorează greutatea sferei în apă, și ceara rarefiată nu revine prin răcire la densitatea de mai înainte. Înainte de a cădea se cufundau complet în apă; ca nu cumva prin greutatea unei părți oarecare ce ieșea afară din apă coborîrea lor la început să se accelereze. Și cînd cufundate complet erau în repaus, se lăsau să cadă cu cea mai mare precauție, ca nu cumva să capete vreun impuls din partea mîinii ce le dă drumul. Dar au căzut succesiv în timpurile de $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 și 51 oscilații, descriind înălțimea de cincisprezece picioare și două degete. Dar timpul era cu ceva mai rece decît atunci cînd am cîntărit sferele și deci am repetat experiența în altă zi, și sferele au căzut în timpurile de 49, $49\frac{1}{2}$, 50 și 53 oscilații și a treia oară în timpurile de $49\frac{1}{2}$, 50, 51 și 53 oscilații. Și făcînd experiența mai des, sferele au căzut în cea mai mare parte în timpurile de $49\frac{1}{2}$ și 50 oscilații. Cînd cădeau mai încet, bănuiesc că ele au fost întîrziate din cauza atingerii de pereții vasului.

Făcînd acum calculul prin teorie, se obține pentru greutatea sferei în vid $139\frac{2}{5}$ grăunțe. Excesul acestei greutăți față de greutatea sferei în apă $132\frac{11}{40}$ grăunțe. Diametrul sferei 0,99868 degete. Opt treimi din diametru 2,66315 degete. Spațiul $2F$ de 2,8066 degete. Spațiul pe care sfera de greutate $7\frac{1}{8}$ grăunțe îl descrie căzînd fără rezistență, în timp de o secundă, 9,88164 degete. Și timpul G de $0^s,376843$. Așadar sfera, cu viteza maximă cu care poate coborî în apă cu forța greutății de $7\frac{1}{8}$ grăunțe, în timpul $0^s,376843$ descrie spațiul de 2,8066 degete, și în timp de 1^s spațiul de 7,44766 degete, și în timp de 25^s sau în 50 de oscilații spațiul de 186,1915 degete. Să scădem spațiul 1,386294 F sau 1,9454 degete și va rămîne spațiul 184,2461 degete pe care sfera îl va descrie în același timp într-un vas foarte lat. Din cauza îngustimii vasului nostru, să micșorăm acest spațiu într-un raport care se compune din rădăcina pătrată a raportului orificiului vasului către excesul acestui orificiu față de semicercul maxim al sferei, și din raportul

simplu al aceluiaşi orificiu faţă de excesul lui faţă de cercul maxim al sferei; şi vom avea spaţiul de 181,86 degete, pe care conform teoriei a trebuit să-l descrie sfera în acest vas în timp de aproximativ 50 oscilaţii. În experienţă însă a descris spaţiul de 182 degete în timp de $49\frac{1}{2}$ sau 50 de oscilaţii.

EXPERIENŢA 5. Lăsînd să cadă de mai multe ori patru sfere de greutate de $154\frac{3}{8}$ grăunţe în aer şi $21\frac{1}{2}$ grăunţe în apă, ele cădeau în timp de $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ şi 30 de oscilaţii, şi uneori de 31, 32 şi 33, descriind înălţimea de cincisprezece picioare şi două degete.

Teoretic trebuiau să cadă în timp de aproximativ 29 de oscilaţii.

EXPERIENŢA 6. Lăsînd de mai multe ori să cadă cinci sfere de greutatea $212\frac{3}{8}$ grăunţe în aer şi $79\frac{1}{2}$ în apă, ele cădeau în timp de 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 şi 18 oscilaţii, descriind înălţimea de cincisprezece picioare şi două degete.

Potrivit teoriei trebuia să cadă aproximativ în timp de 15 oscilaţii.

EXPERIENŢA 7. Lăsat să cadă de mai multe ori patru sfere de greutatea $293\frac{3}{8}$ grăunţe în aer şi $35\frac{7}{8}$ grăunţe în apă, cădeau în timp de $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 şi 33 oscilaţii, descriind înălţimea de cincisprezece picioare şi un deget şi jumătate.

Teoretic trebuiau să cadă în timp de 28 de oscilaţii aproximativ.

Cercetînd cauza pentru ce dintre sferele, de aceeaşi greutate, unele cădeau mai repede altele mai încet, am aflat următoarele: că sferele, cînd mai întîi erau lăsate libere şi începeau să cadă, oscilau în jurul centrelor, coborînd mai întîi partea care era mai grea şi dînd naştere la o mişcare oscilatorie. Prin oscilaţiile sale sfera comunică apei o mişcare mai mare, decît dacă ar coborî fără oscilaţii; şi comunicînd, pierde partea mişcării proprii cu care ar trebui să cadă, şi din cauza oscilaţiei mai mari sau mai mici, este întîrziată mai mult sau mai puţin. Fiindcă sfera totdeauna se îndepărtează de partea sa care descinde prin oscilaţii, şi îndepărtîndu-se se apropie de pereţii vasului şi adeseori se ciocneşte de pereţi. Şi această oscilaţie la sferele mai grele este mai intensă şi la cele mai mari agită apa mai mult. Deci, pentru a face oscilaţia sferelor mai mică, am construit sfere noui din ceară şi plumb, înfigînd plumbul într-o parte oarecare a sferei aproape de suprafaţa ei; şi am lăsat sfera liberă astfel, ca partea mai grea, întrucît s-a putut, să fie mai mică la începutul căderii. Astfel oscilaţiile făcute sînt cu mult mai mici decît mai înainte, şi sferele au căzut în timpuri mai puţin neegale, întocmai ca în experienţele următoare.

EXPERIENŢA 8. Lăsînd de mai multe ori să cadă patru sfere avînd greutatea de 139 grăunţe în aer şi $6\frac{1}{2}$ în apă, ele au căzut în timpuri de oscilaţii nu mai multe ca 52, nu mai puţine ca 50, şi cea mai mare parte în timp de aproape 51 de oscilaţii, descriind înălţimea de 182 degete.

Teoretic trebuiau să cadă în timp de aproape 52 de oscilaţii.

EXPERIENŢA 9. Lăsînd în repetate rînduri să cadă patru sfere, avînd greutatea de $273\frac{1}{4}$ grăunţe în aer şi $140\frac{3}{4}$ în apă, ele au căzut în timpuri de nu mai puţin de 12 oscilaţii, nu mai multe de 13, descriind înălţimea de 182 degete.

Teoretic aceste sfere trebuiau să cadă aproximativ în timp de $11\frac{1}{3}$ oscilaţii.

EXPERIENŢA 10. Lăsînd să cadă de mai multe ori patru sfere, avînd greutatea de 384 grăunţe în aer şi $119\frac{1}{2}$ în apă, ele au căzut în timpurile de $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ şi 19 oscilaţii, descriind înălţimea de $181\frac{1}{2}$ degete. Şi cînd cădeau în timp de 19 oscilaţii, uneori auzeam ciocnirea lor de laturile vasului înainte de a fi ajuns la fund.

Conform teoriei trebuia să cadă în timp de aproximativ $15\frac{5}{9}$ oscilaţii.

EXPERIENŢA 11. Lăsînd de mai multe ori să cadă trei sfere egale, avînd o greutate de 48 grăunţe în aer şi $3\frac{29}{32}$ în apă, ele au căzut în timpurile de oscilaţii $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 şi 46, şi de cele mai multe ori în 44 şi 45, descriind înălţimea de aproximativ $182\frac{1}{2}$ degete.

Potrivit teoriei ele trebuia să cadă în timp de aproximativ $46\frac{5}{9}$ oscilaţii.

EXPERIENŢA 12. Lăsînd să cadă de cîteva ori, trei sfere egale, avînd o greutate de 141 grăunţe în aer şi $4\frac{3}{8}$ în apă, ele au căzut în timpurile de 61, 62, 63, 64 şi 65 oscilaţii, descriind înălţimea de 182 degete.

Iar în mod teoretic ar fi trebuit să cadă aproximativ în timp de $64\frac{1}{2}$ oscilaţii.

Din această experienţă este evident că, atunci cînd sferele cădeau tîrziu, ca în experienţa 2, 4, 5, 8, 11 şi 12 timpurile de cădere sînt obţinute corect prin teorie: iar cînd sferele cădeau mai repede, ca în experienţa a şasea, a noua şi a zecea, rezistenţa era cu ceva mai mare decît în raportul pătratului vitezei. Căci sferele oscilează întrucîtva în timpul căderii; şi această oscilaţie în sferele mai uşoare şi care cad mai încet, din cauza slăbiciunii mişcării încetează repede; pe cînd în cele mai grele şi mai mari, din cauza intensităţii mişcării durează mai mult timp, şi abia după mai multe oscilaţii poate fi oprită de apa ambiantă. Fiindcă sferele, cu cît sînt mai repezi, cu atît sînt mai puţin împinse de fluid la părţile lor posterioare; şi dacă viteza se măreşte necontenit, în cele din urmă ele vor lăsa la spate un spaţiu vid, dacă nu cumva în acelaşi timp creşte compresiunea fluidului. Dar compresiunea fluidului trebuie să crească (potrivit propoziţiilor XXXII şi XXXIII) în raportul pătratului vitezei, pentru ca rezistenţa să fie în acelaşi raport pătratic. Deoarece aceasta nu are loc, sferele mai rapide sînt împinse cu ceva mai puţin de la spate, şi în lipsa acestei presiuni, rezistenţa lor este ceva mai mare decît în raportul pătratului vitezei.

Aşadar teoria coincide cu fenomenele corpurilor ce cad în apă, mai rămîne să examinăm fenomenele celor ce cad în aer.

EXPERIENŢA 13. Din vîrful catedralei Sf. Paul din oraşul Londra, în luna iunie 1710 au fost lăsate să cadă simultan două sfere de sticlă, una plină cu mercur, cealaltă cu aer; şi căzînd au descris înălţimea de 220 picioare londoneze. O tablă de lemn era atîrnată la unul din capetele ei cu ajutorul unor ţîţîni de fier, iar celălalt se sprijinea pe o bară de lemn; şi cele două sfere aşezate pe această tablă se lăsau să cadă deodată, trăgînd bara cu

ajutorul unei sîrme de fier ce ajungea pînă la pămînt astfel că tabla susţinută numai de ţîţînile de fier se învîrtea în jurul lor, şi în acelaşi timp pendulul oscilînd într-o secundă, tras de sîrma aceea de fier era lăsat liber şi începea să oscileze. În tabela următoare se arată diametrele şi greutăţile sferelor şi timpurile de cădere.

Sferele pline cu mercur			Sferele pline cu apă		
Greutăţi	Diametre	Timpurile de cădere	Greutăţi	Diametre	Timpurile de cădere
grăunţe	degete	secunde	grăunţe	degete	secunde
908	0,8	4	510	5,1	$8\frac{1}{2}$
983	0,8	4–	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

De altfel timpurile observate trebuie corectate. Căci sferele de mercur (potrivit teoriei lui Galileu) vor descrie în patru secunde 257 picioare londoneze, şi 220 picioare numai în 3″ 42‴. Deci trăgînd bara, tabla de lemn se învîrtea mai încet decît trebuia, şi prin învîrtirea sa întîrziată împiedica coborîrea sferelor la început. Căci sferele erau situate aproape de mijlocul tablei şi erau cu ceva mai aproape de axa ei decît de bară. Şi deci timpurile de cădere erau prelungite aproape cu 18 terţe, şi astfel trebuie corectate scăzînd acele terţe, îndeosebi pentru sferele mai mari care apăsau pe tabla roditoare mai mult timp din cauza mărimii diametrelor. Ceea ce fiind făcut, timpurile în care cădeau cele şase sfere mai mari, deveneau 8″12‴, 7″42‴, 7″42‴, 7″57‴, 8″12‴ şi 7″42‴.

Aşadar a cincea dintre sferele pline cu aer, construită cu un diametru de cinci degete avînd greutatea de 483 grăunţe, a căzut în timp de 8″12‴, descriind înălţimea de 220 picioare. Greutatea unui volum de apă egal cu această sferă este de 16600 grăunţe; şi greutatea unui volum de aer egal cu ea este $\frac{16600}{860}$ grăunţe sau $19\frac{3}{10}$ grăunţe şi deci greutatea sferei în vid este de $502\frac{3}{10}$ grăunţe şi această greutate este către greutatea volumului de aer egal cu sfera, precum $502\frac{3}{10}$ către $19\frac{3}{10}$, şi astfel sînt $2F$ către opt treimi din diametrul sferii, adică, către $13\frac{1}{3}$ degete. De unde spaţiul $2F$ devine 28 picioare 11 degete. Sfera căzînd în vid cu întreaga sa greutate de $502\frac{3}{10}$ grăunţe, în timp de o secundă descrie $193\frac{1}{3}$ degete, ca mai sus, şi cu greutatea de 483 grăunţe descrie 185,905 degete, şi cu aceeaşi greutate de 483 grăunţe în vid de asemenea descrie spaţiul F sau 14 picioare $5\frac{1}{2}$ degete în timpul de 57‴58⁗ şi cîştigă viteza maximă cu care poate cădea în aer. Cu această viteză sfera, în timp de 8″12‴, va descrie un spaţiu de 245 picioare, şi $5\frac{1}{3}$ degete. Să scădem $1{,}3863\ F$ sau 20 picioare $\frac{1}{2}$ degete şi vor rămîne 225 picioare 5 degete. Aşadar conform teoriei sfera a trebuit să

descrie acest spațiu căzînd în timp de 8″12‴. Iar în experiență a descris spațiul de 220 picioare. Diferența este insensibilă.

Aplicînd calcule asemănătoare și la sferele rămase pline cu aer, am compus tabela următoare:

Greutățile sferelor	Diametre	Timpurile de cădere de la înălțimea de 220 picioare		Spațiile ce trebuie descrise în mod teoretic		Excesul	
grăunțe	degete	secunde	terțe	picioare	degete	picioare	degete
510	5,1	8	12	226	11	6	11
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	37	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Experiența 14. În anul 1719, luna iulie, d-l Desaguliers a refăcut experiențele de acest fel, preparînd bășici de porc de formă sferică cu ajutorul unei sfere concave de lemn, care fiind umezite erau silite să umple cavitatea sferică umflîndu-se cu aer; și apoi fiind uscate erau scoase afară și lăsîndu-le să cadă din locul cel mai înalt al cupolei turnului aceluiași templu, anume de la înălțimea de 272 picioare; și în același moment lăsînd să cadă o sferă de plumb a cărei greutate era de aproximativ doi funți romani. Și în același timp unii stînd în partea cea mai de sus a templului, de unde erau lăsate să cadă sferele, notau timpurile întregi de cădere, și alții stînd pe pămînt notau diferența timpurilor dintre căderea sferei de plumb și căderea bășicii. Iar timpurile se măsurau cu pendule ce oscilau în jumătăți de secundă. Și unul dintre aceia care stăteau pe pămînt avea un orologiu cu spirală vibrînd de patru ori pe secundă; un altul avea o altă mașină abil construită cu un pendul care iarăși într-o secundă vibra de patru ori. Și o mașină asemănătoare avea unul dintre aceia care stăteau în vîrful templului. Și aceste instrumente erau astfel aranjate, ca mișcările lor să poată începe sau înceta după voie. Iar sfera de plumb cădea în timp de aproximativ patru secunde și un sfert. Și adăugînd acest timp la diferența de timp menționată, se obținea timpul întreg în care cădea bășica. Timpurile, în care au căzut cele cinci bășici mai întîi după căderea sferei de plumb, erau $14\frac{3''}{4}$, $12\frac{3''}{4}$, $14\frac{5''}{8}$, $17\frac{3''}{4}$ și $16\frac{7''}{8}$ și a doua oară $14\frac{1''}{2}$, $14\frac{1''}{4}$, 14″, 19″ și $16\frac{3''}{4}$. Să adunăm $4\frac{1''}{4}$, timpul în care a căzut sfera de plumb, și timpurile întregi în care au căzut cele cinci bășici, erau întîia dată 19″, 17″, $18\frac{7''}{8}$, 22″, și $21\frac{1''}{8}$, și a doua oară, $18\frac{3''}{4}$, $18\frac{1''}{2}$, $18\frac{1''}{4}$, $23\frac{1''}{4}$ și 21″. Iar timpurile notate în vîrful templului, erau prima oară $19\frac{3''}{8}$, $17\frac{1''}{4}$, $18\frac{3''}{4}$, $22\frac{1''}{8}$ și $21\frac{5''}{8}$ și a doua oară 19″, $18\frac{5''}{8}$, $18\frac{3''}{8}$, 24″ și $21\frac{1''}{4}$. De altfel bășicile nu totdeauna cădeau drept, ci uneori pluteau, și oscilau încoace și încolo în timp ce cădeau. Și prin aceste mișcări timpurile de cădere erau prelungite și mărite uneori cu o jumătate de secundă, uneori cu o secundă întreagă. Iar mai drept au căzut bășica

a doua şi a patra întîia dată; şi prima şi a treia a doua oară. Băşica a cincea era zbîrcită şi din cauza zbîrcelilor sale uneori era întîrziată. Am dedus diametrele băşicilor din circumferinţele lor măsurate cu un fir foarte subţire înfăşurat de două ori. Şi teoria am confruntat-o cu experienţele în tabela următoare, admiţînd că densitatea aerului este către densitatea apei de ploaie ca 1 la 860, şi calculînd spaţiile pe care au trebuit să le descrie sferele în cădere conform teoriei.

Greutăţile băşicilor	Diametre	Timpurile de cădere de la înălţimea de 172 picioare	Spaţiile aceloraşi timpuri ce trebuie descrise potrivit teoriei		Diferenţa între teorie şi experienţă	
grăunţe	degete	secunde	picioare	degete	picioare	degete
128	5,28	19	271	11	− 0	1
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,4	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+ 10	0

Aşadar rezistenţa sferelor ce se mişcă atît în aer cît şi în apă aproape întreagă se exprimă prin teoria noastră în mod corect, şi vitezele şi mărimile sferelor fiind egale, este proporţională cu densitatea fluidelor.

În scolia, anexată secţiunii a şasea, am arătat prin experienţele pendulelor, că rezistenţele sferelor egale şi de viteze egale ce se mişcă în aer, în apă şi în mercur sînt precum densităţile fluidelor. Acelaşi lucru îl arătăm aici mai precis prin experienţele corpurilor ce cad în aer şi în apă. Căci pendulele în diversele oscilaţii produc în fluid o mişcare totdeauna contrară mişcării pendulului ce se reîntoarce, şi rezistenţa ce se naşte din această mişcare, precum şi rezistenţa firului de care atîrnă pendulul, făceau rezistenţa întreagă a pendulului mai mare ca rezistenţa dedusă din experienţele corpurilor căzătoare. Căci prin experienţele pendulelor expuse în acea scolie, o sferă de aceeaşi densitate cu apa, descriind lungimea semidiametrului său în aer, ar trebui să piardă din mişcarea sa a $\frac{1}{3342}$-a parte. Dar prin teoria expusă în această a şaptea secţiune şi confirmată prin experienţele corpurilor căzătoare, aceeaşi sferă descriind aceeaşi lungime, ar trebui să piardă numai $\frac{1}{4586}$ din mişcarea sa, admiţînd că densitatea apei este către densitatea aerului ca 860 la 1. Deci rezistenţele aflate prin experienţele pendulelor sînt mai mari (din cauzele descrise mai sus) decît experienţele sferelor căzătoare şi anume aproape în raportul 4 la 3. Dar cum rezistenţele pendulelor ce oscilează în aer, apă şi mercur din cauze asemenea se măresc asemenea, proporţia rezistenţelor în aceste medii, atît prin experienţele pendulelor, cît şi prin experienţele corpurilor în cădere, va fi exprimată destul de corect. Şi de aici se poate conchide că rezistenţele corpurilor ce se mişcă în fluide oarecare, foarte fluide, celelalte mărimi fiind egale, sînt precum densităţile fluidelor.

Acestea fiind astfel stabilite, se poate spune aproximativ ce parte a mişcării sale poate pierde într-un timp dat o sferă oarecare, aruncată într-un

fluid oarecare. Fie D diametrul sferei, și V viteza ei la începutul mișcării, și T timpul, în care sfera cu o viteză V va descrie în vid un spațiu, care să fie către spațiul $\frac{8}{3}D$ precum densitatea sferei către densitatea fluidului: și sfera aruncată în acel fluid, într-un alt timp oarecare t, va pierde partea $\frac{tV}{T+t}$ a vitezei sale, rămînînd partea $\frac{TV}{T+t}$, și va descrie spațiul care este către spațiul descris în vid cu viteza uniformă V în același timp, precum logaritmul numărului $\frac{T+t}{T}$ înmulțit cu numărul 2,302585093 către numărul $\frac{t}{T}$ potrivit corolarului VII, propoziția XXXV. În mișcările încete rezistența poate fi cu ceva mai mică, fiindcă forma sferei este ceva mai potrivită cu mișcarea decît figura cilindrului descris cu același diametru. În mișcările repezi rezistența poate fi puțin mai mare, fiindcă elasticitatea și comprimarea fluidului, nu crește ca pătratul vitezei. Dar nu mă opresc asupra unor mărunțișuri de acest fel.

Și oricît s-ar subtiliza aerul, apa, mercurul și fluidele asemenea, prin diviziunea părților la infinit, și ar deveni medii infinit de fluide, totuși nu ar rezista mai puțin sferelor aruncate. Căci rezistența, de care este vorba în propozițiile precedente, se naște din inerția materiei; și inerția materiei es e esențială pentru corpuri și totdeauna proporțională cu cantitatea de materie. Prin diviziunea părților fluidului, rezistența ce se naște din tenacitatea și frecarea părților ce este drept poate fi în adevăr diminuată: dar cantitatea de materie nu se micșorează prin diviziunea părților ei; și cantitatea de materie menținîndu-se se menține forța ei de inerție, cu care rezistență, de care se vorbește aici, totdeauna este proporțională. Ca această rezistență să se micșoreze, trebuie să se micșoreze cantitatea de materie în spațiile prin care se mișcă corpurile. Și de aceea spațiile cerești, prin care sferele planetelor și cometelor se mișcă necontenit în toate părțile foarte liber și fără vreo micșorare sensibilă a mișcării, sînt lipsite de orice fluid material, dacă exceptăm poate vaporii foarte rari și razele de lumină.

Proiectilele înaintînd în fluide dau naștere unei mișcări și această mișcare se naște din excesul presiunii fluidului la părțile anterioare ale proiectilului față de presiunea la părțile lui posterioare și nu poate fi mai mică în mediile infinit de fluide decît în aer, apă și mercur în proporția densității materiei fiecăreia. Dar acest exces de presiune, în proporția cantității sale, nu produce numai mișcare în fluid, ci acționează și asupra proiectilului întîrziindu-i mișcarea: și de aceea rezistența în orice fluid este precum mișcarea excitată în fluid de proiectil, și nici nu poate fi mai mică în eterul foarte subtil în proporție cu densitatea eterului decît în aer, apă și mercur în proporție cu densitatea acestor fluide.

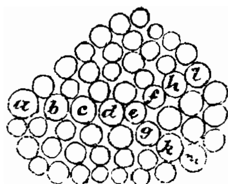
SECŢIUNEA VIII

Despre mişcarea propagată prin fluide

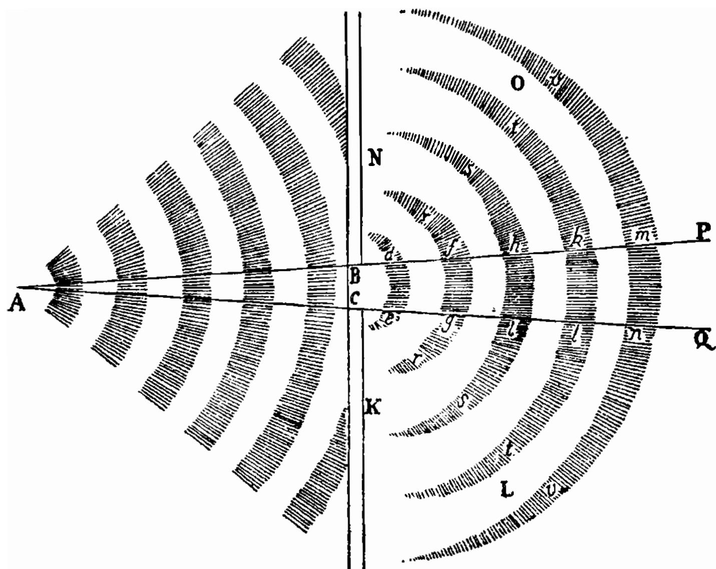
PROPOZIŢIA XLI. TEOREMA XXXII

Presiunea nu se propagă într-un fluid în linii drepte, decît dacă particulele fluidului sînt în linie dreaptă.

Dacă particulele *a,b,c,d,e* sînt situate în linie dreaptă, o presiune oarecare se poate propaga direct de la *a* la *e*; dar particula *e* va acţiona oblic particulele *f* şi *g* situate oblic, şi particulele *f* şi *g* nu vor susţine presiunea aplicată, decît dacă sînt susţinute de particulele din urmă *h* şi *k*; iar întrucît sînt susţinute, ele apasă asupra particulelor sprijinitoare; şi acestea nu pot susţine presiunea decît dacă sînt sprijinite de cele următoare *l* şi *m* şi le apasă, şi aşa mai departe la infinit. Prin urmare presiunea, care mai întîi se propagă asupra particulelor care nu sînt situate în aceeaşi direcţie, va începe să devieze şi se va propaga oblic la infinit; şi după ce începe să se propage oblic, dacă întîlneşte particule ulterioare, care nu sînt situate în aceeaşi direcţie va devia din nou şi aceasta de atîtea ori, de cîte ori va întîlni particule care nu sînt situate precis în aceeaşi direcţie. Q.E.D.



COROLAR. Dacă o parte oarecare a unei presiuni, ce se propagă de la un punct dat, într-un fluid, este împiedicată de un obstacol; partea rămasă,



care nu este împiedicată, va devia în spaţiile dinapoia obstacolului. Ceea ce se poate demonstra şi astfel.

Să presupunem că din punctul *A* se propagă o presiune în toate direcţiile, şi aceasta dacă se poate după linii drepte, şi că obstacolul *NBCK*

fiind găurit în *BC*, ea este împiedicată întreagă, afară de partea coniformă *APQ*, care trece prin deschiderea circulară *BC*. Prin planele transversale *de*, *fg*, *hi* să despărţim conul *APQ* în bucăţi; şi în timp ce conul *ABC*, propagînd presiunea, va acţiona partea conică ulterioară *degf* pe suprafaţa *de*, şi această bucată va acţiona bucata proximă *fgih* pe suprafaţa *fg*, şi acea bucată va acţiona bucata a treia, şi aşa mai departe la infinit; este evident (potrivit legii a treia a mişcării) că bucata întîia *degf* prin reacţiunea bucăţii a doua *fghi*, atîta va acţiona şi apăsa asupra suprafeţei *fg*, cît acţionează şi apasă bucata a doua. Aşadar bucata *degf* între conul *Ade* şi bucata *fhig* se comprimă din toate părţile, şi de aceea (potrivit corolarului 6, propoziţia XIX) nu-şi poate păstra forma decît dacă este comprimată din toate părţile cu aceeaşi forţă. Prin urmare cu aceeaşi forţă cu care este apăsată pe suprafeţele *de*,*fg*, va fi silită să cedeze pe laturile *df*,*eg*; şi acolo (cum nu este rigid, ci cu totul fluid) va curge şi se va dilata, pînă ce dă de un fluid ambiant, care se opune acestei tendinţe. De aceea prin tendinţa de curgere, va apăsa atît fluidul ambiant pe laturile *df*,*eg*, cît şi bucata *fghi* cu aceeaşi forţă; şi de aceea presiunea se va propaga nu mai puţin de la laturile *df*, *eg* în spaţiile *NO*, *KL* încoace şi încolo, decît se propagă de la suprafaţa *fg* spre *PQ*. Q.E.D.

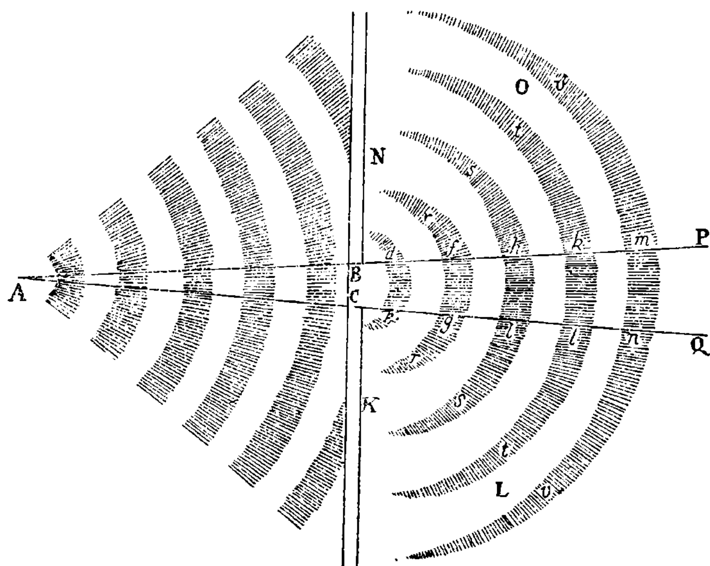
PROPOZIŢIA XLII. TEOREMA XXXIII

Orice mişcare ce se propagă într-un fluid diverge de la un drum drept în spaţiile nemişcate.

CAZUL 1. Să presupunem că o mişcare se propagă din punctul *A* prin deschiderea *BC*, şi înaintează, dacă se poate, în spaţiul conic *BCQP*, în direcţia liniilor drepte divergente de la punctul *A*. Şi să presupunem mai întîi că mişcarea este aceea a undelor pe suprafaţa apei stătătoare. Şi fie *de*, *fg*, *hi*, *kl* etc. părţile cele mai înalte ale diverselor unde, despărţite una de alta prin tot atîtea văi intermediare. Prin urmare, deoarece apa pe crestele undelor este situată mai sus decît în părţile nemişcate *LK*, *NO* ale fluidului, ea va curge din extremităţile *e*, *g*, *i*, *l* etc., *d*, *f*, *h*, *k* etc., ale crestelor încoace şi încolo spre *KL* şi *NO*: şi fiindcă în văile undelor este situată mai jos decît în părţile nemişcate *KL*, *NO* ale fluidului; ea va curge din părţile nemişcate înspre văile undelor. La primul reflux crestele undelor, la al doilea văile se dilată încoace şi încolo şi se propagă spre *KL* şi *NO*. Şi fiindcă mişcarea undelor de la *A* spre *PQ* are loc printr-o curgere continuă a crestelor în văile vecine, şi deci nu este mai rapidă ca în proporţia vitezei coborîrii; şi coborîrea apei de toate părţile spre *KL* şi *NO* trebuie să aibă loc cu aceeaşi viteză; dilatarea undelor se va propaga din toate părţile spre *KL* şi *NO* cu aceeaşi viteză cu care înaintează undele de la *A* spre *PQ* în linie dreaptă. Şi deci întreg spaţiul în toate sensurile spre *KL* şi *NO* va fi ocupat de undele dilatate *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv* etc. Q.E.D. Oricine poate afla făcînd experienţa într-o apă stătătoare că acestea au loc astfel.

CAZUL 2. Să presupunem acum că *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* reprezintă impulsuri propagate din punctul *A* succesiv printr-un mediu elastic. Să ne închipuim că impulsurile se propagă prin condensări şi răriri succesive ale mediului, astfel că partea cea mai densă a fiecărui impuls va ocupa o suprafaţă sferică

descrisă în jurul centrului *A*, şi între impulsuri succesive se află intervale egale. Să presupunem însă că liniile *de*, *fg*, *hi*, *kl* etc. reprezintă părţile cele mai dense ale impulsurilor, propagate prin deschiderea *BC*. Şi fiindcă mediul este acolo mai dens decît în spaţiile de dinspre *KL* şi *NO*, el se va dilata



atît spre spaţiile *KL*, *NO* situate oriunde, cît şi spre intervalele mai rari ale impulsurilor; şi astfel ieşind totdeauna mai rar din regiunea intervalelor şi mai dens din regiunea impulsurilor, va participa la mişcarea lor. Şi fiindcă mişcarea progresivă a impulsurilor provine din relaxarea perpetuă a părţilor mai dense spre intervalele mai rari antecedente; şi impulsurile trebuie să se relaxeze în toate sensurile aproape cu aceeaşi viteză în părţile în repaus *KL*, *NO* ale mediului; impulsurile se vor dilata aproape cu aceeaşi viteză în toate sensurile în spaţiile nemişcate *KL*, *NO*, cu care se propagă direct din centrul *A*; şi deci vor ocupa spaţiul întreg *KLON*. Q.E.D. Aceasta o experimentăm cu sunetele, care se aud fie că se interpune un munte, fie că lăsate să intre în cameră pe fereastră se împrăştie în toate părţile camerei, şi se aud în toate unghiurile, nu atît reflectate de pereţii opuşi, cît propagate direct de la fereastră, după cît putem judeca cu simţurile.

CAZUL 3. Să presupunem în sfîrşit că o mişcare de un fel oarecare se propagă din *A* prin deschiderea *BC*: şi fiindcă această propagare nu are loc, decît dacă părţile mediului mai aproape de centrul *A* acţionează şi mişcă părţile ulterioare; şi părţile acţionate sînt fluide, şi deci se îndepărtează în toate sensurile în regiunile unde sînt mai puţin apăsate: ele se îndepărtează în spre toate părţile în repaus ale mediului, atît laterale *KL* şi *NO*, cît şi anterioare *PQ*, şi în acest fel orice mişcare, imediat ce a trecut prin deschiderea *BC*, va începe să se dilate şi deci să se propage direct în toate sensurile ca de la un început şi centru. Q.E.D.

PROPOZIŢIA XLIII. TEOREMA XXXIV

Orice corp vibrant într-un mediu elastic va propaga mişcarea impulsurilor în linie dreaptă în toate sensurile; iar într-un mediu neelastic va da naştere unei mişcări circulare.

CAZUL 1. Căci părţile corpului vibrant mergînd şi revenind în mod alternativ, în mişcarea lor vor apăsa şi împinge părţile mediului cele mai apropiate, şi apăsîndu-le le vor comprima şi condensa; apoi prin întoarcerea lor permit ca părţile comprimate să se îndepărteze şi să se dilate. Prin urmare părţile mediului foarte apropiate de corpul vibrant vor merge şi se vor întoarce alternativ la fel cu părţile corpului vibrant: şi din acelaşi motiv pentru care părţile corpului agitau părţile mediului, cele agitate de vibraţii analoge vor agita părţile lor cele mai apropiate, şi cele agitate vor agita la fel pe cele ulterioare şi aşa mai departe la infinit. Şi după cum primele părţi ale mediului mergînd se condensează şi revenind se dilată, astfel părţile rămase de cîte ori merg se vor condensa şi de cîte ori se întorc se vor dilata. Şi de aceea nu toate vor merge şi se vor întoarce deodată (căci astfel păstrînd distanţe determinate între ele, nu se vor rarefia şi condensa alternativ) ci apropiindu-se una de alta cînd se condensează, şi îndepărtîndu-se cînd se rarefiază, unele din ele vor merge, în timp ce altele se întorc; şi aceasta în mod alternativ la infinit. Dar părţile care merg şi mergînd se condensează din cauza mişcării progresive, prin care înving obstacolele, sînt impulsuri; şi de aceea impulsurile succesive se propagă în linie dreaptă de la orice corp vibrant; şi anume la distanţe aproximativ egale unul de altul, din cauza intervalelor egale de timp în care un corp prin diversele sale vibraţii excită impulsuri diverse. Şi cu toate că părţile corpului vibrant merg şi revin după o direcţie oarecare sigură şi determinată, totuşi impulsurile propagate de acolo prin mediu se vor dilata spre laturi, conform propoziţiei precedente; şi de la acel corp vibrant ca de la un centru comun, se vor propaga în toate direcţiile, după suprafeţe aproape sferice şi concentrice. Un astfel de exemplu îl avem în undele care dacă se produc oscilînd un deget, nu numai merg încoace şi încolo în direcţia mişcării degetului, ci se propagă în toate sensurile sub formă de cercuri concentrice, înconjurînd necontenit degetul. Căci greutatea undelor înlocuieşte forţa elastică.

CAZUL 2. Căci dacă mediul nu este elastic: deoarece părţile lui nu pot fi condensate de presiunea părţilor vibrante ale corpului oscilant, mişcarea se va propaga instantaneu spre părţile în care mediul cedează foarte uşor, adică, spre părţile pe care corpul vibrant le lasă goale înapoi. Acelaşi este cazul unui corp aruncat într-un mediu oarecare. Mediul cedînd proiectilelor, nu se îndepărtează la infinit; ci mergînd în cerc, înaintează spre spaţii pe care le lasă corpul la spate. Aşadar de cîte ori corpul vibrant înaintează într-o direcţie oarecare, mediul cedînd va înainta în cerc spre părţile pe care le părăseşte corpul; şi de cîte ori corpul se întoarce la locul de mai înainte, mediul va fi împins de acolo şi va reveni la locul său de mai înainte. Şi cu toate că corpul vibrant nu este fix, ci flexibil în toate felurile, dacă totuşi rămîne dat în mărime, fiindcă prin vibraţiile sale nu poate acţiona mediul nicăieri, fără ca altundeva să-i cedeze simultan: va face ca mediul,

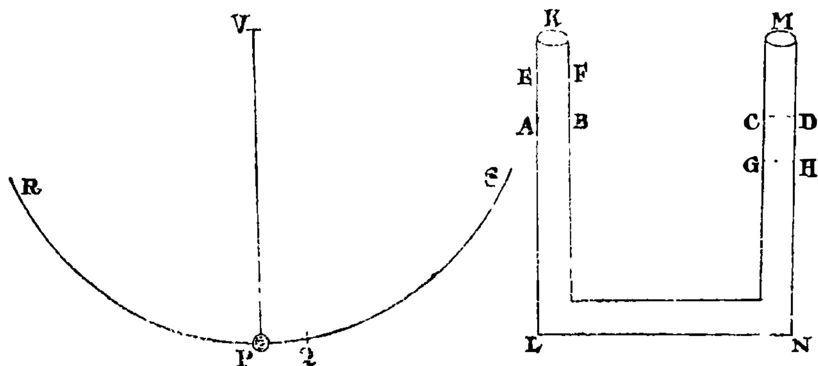
îndepărtîndu-se de părţile în care este apăsat, să meargă totdeauna pe orbită spre părţile care îi cedează. Q.E.D.

COROLAR. Aşadar halucinează aceia care cred că agitaţia părţilor flacării conduce la o presiune care se propagă în linie dreaptă prin mediul înconjurător. O astfel de presiune va trebui derivată nu numai de la agitaţia părţilor flăcării, ci de la dilatarea întregului.

PROPOZIŢIA XLIV. TEOREMA XXXV

Dacă apa se urcă şi coboară alternativ în canalele braţelor ridicate KL,MN; şi se construieşte un pendul a cărui lungime între punctul de suspensiune şi centrul de oscilaţie este egal cu jumătatea lungimii apei din canal: zic că apa se va urca şi cobori în aceleaşi timpuri în care oscilează pendulul.

Măsor lungimea apei după axele canalului şi ale braţelor, egalînd-o cu suma acestor axe; şi nu ţin seama aici de rezistenţa apei, care se naşte din frecarea canalului. Să reprezentăm deci prin *AB*, *CD* înălţimea mijlocie a apei în ambele braţe; şi cînd apa se urcă în braţul *KL* la înăţimea *EF*, se va cobori la înălţimea *GH* în braţul *MN*. Fie apoi *P* corpul pendular,



VP firul, *V* punctul de suspensiune, *RPQS* cicloida pe care o va descrie pendulul, *P* punctul ei cel mai de jos, *PQ* arcul egal cu înălţimea *AE*. Forţa, cu care mişcarea apei este alternativ accelerată şi întîrziată, este excesul greutăţii apei într-unul din braţe faţă de greutatea din celălalt, şi deci cînd apa din braţul *KL* se urcă la *EF*, şi în braţul celălalt se coboară la *GH*, forţa este dublul greutăţii apei *EABF*, şi de aceea este către greutatea apei întregi precum *AE* sau *PQ* către *VP* sau *PR*. De asemenea forţa, cu care greutatea *P* într-un loc oarecare *Q* este accelerată şi întîrziată pe cicloidă (potrivit corolarului propoziţiei LI) este către greutatea ei întreagă, precum distanţa ei *PQ* de la locul cel mai de jos *P*, către lungimea *PR* a cicloidei. Din care cauză forţele motoare ale apei şi pendulului, care descriu spaţiile egale *AE*, *PQ* sînt precum greutăţile ce trebuie mişcate; şi deci, dacă apa şi pendulul la început sînt în repaus, forţele le vor mişca în mod egal în timpuri egale şi vor face să meargă şi să se întoarcă simultan cu o mişcare reciprocă, Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare toate alternanţele ascendente şi descendente ale apei, fie că mişcarea este mai intensă fie că este mai slabă, sînt izocrone.

COROLARUL 2. Dacă lungimea întregei ape din canal este de $6\frac{1}{9}$ picioare pariziene: apa va coborî în timp de o secundă şi se va urca în timpul unei alte secunde; şi aşa mai departe alternativ la infinit. Căci un pendul de o lungime de $3\frac{1}{18}$ picioare oscilează în timp de o secundă.

COROLARUL 3. Dar mărind sau micşorînd lungimea apei, timpul mişcării reciproce creşte sau descreşte în raportul rădăcinii pătrate a lungimii.

PROPOZIŢIA XLV. TEOREMA XXXVI

Viteza undelor variază cu rădăcina pătrată a lăţimilor.

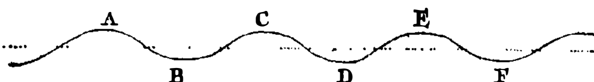
Aceasta rezultă din construcţia propoziţiei ce urmează.

PROPOZIŢIA XLVI. PROBLEMA X

Să aflăm viteza undelor

Să construim un pendul a cărui lungime, între punctul de suspensiune şi centrul de oscilaţie, este egal cu lăţimea undelor: şi în timpul în care pendulul execută diversele oscilaţii, undele avansînd vor parcurge aproape lăţimea lor.

Numesc lăţimea undelor măsura transversală care este situată sau între văile cele mai adînci, sau între culmile cele mai înalte. Să reprezentăm cu *ABCDEF* suprafaţa apei stătătoare, care se urcă şi se coboară cu unde succesive; şi fie *A*, *C*, *E* etc., culmile undelor şi *B*, *D*, *F* etc., văile intermediare. Şi fiindcă mişcarea undelor se face prin urcarea şi coborîrea succesivă a apei, astfel că părţile ei *A*, *C*, *E* etc., care, cînd sînt cele mai înalte, cînd devin cele mai joase; şi forţa motoare prin care părţile cele mai înalte coboară şi cele mai joase se urcă, este greutatea apei ridicate; urcarea şi coborîrea alternativă vor fi analoge cu mişcarea reciprocă a apei din canal, şi cu aceleaşi legi ale timpului: şi de aceea (potrivit propoziţiei XLIV) dacă distanţele dintre locurile cele mai înalte ale undelor *A*, *C*, *E* şi cele mai joase *B*, *D*, *F* dintre unde sînt egale cu lungimea dublă a pendulului; părţile cele mai înalte *A*, *C*, *E*, în timpul unei oscilaţii devin cele mai joase şi în timpul celeilalte oscilaţii iarăşi se vor urca. Prin urmare timpul dintre trecerea diverselor unde va fi de două oscilaţii; adică, unda va descrie lăţimea sa, în timp ce pendulul oscilează de două ori; dar în acelaşi timp pendulul a cărui lungime este cvadruplă, şi deci egalează lăţimea undelor, va oscila odată. Q.E.I.



COROLARUL 1. Aşadar undele, care au lăţimea de $3\frac{1}{18}$ picioare pariziene, înaintînd în timp de o secundă vor parcurge lăţimea lor; şi deci în timp de un minut vor parcurge $183\frac{1}{3}$ picioare şi în interval de o oră aproape 11 000 de picioare.

COROLARUL 2. Şi viteza undelor mai mari sau mai mici va creşte sau va descreşte în raportul rădăcinii pătrate a lăţimii.

Acestea se întîmplă astfel în ipoteza că părţile apei se urcă sau se coboară în linie dreaptă; dar urcarea şi coborîrea au loc în adevăr pe cerc şi deci afirm că timpul în această propoziţie este definit numai aproximativ.

PROPOZIŢIA XLVII. TEOREMA XXXVII

Propagîndu-se impulsuri printr-un fluid, diversele particule ale fluidului, mergînd şi întorcîndu-se printr-o mişcare reciprocă foarte scurtă, se accelerează şi se întîrzie totdeauna potrivit legii pendulului oscilant.

Să reprezentăm cu AB, BC, CD etc. distanţe egale ale impulsurilor succesive; ABC direcţia mişcării impulsurilor propagate de la A spre B; E, F, G trei puncte fizice ale mediului în repaus situate pe dreapta AC la distanţe egale unul de altul Ee, Ff, Gg spaţii egale foarte scurte în care acele puncte prin mişcare reciprocă merg şi vin în diversele oscilaţii; ε, φ, γ locuri oarecare intermediare ale aceloraşi puncte; şi EF, FG linioare fizice sau părţi liniare ale mediului situate între acele puncte, şi transferate succesiv în locurile, $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ şi ef, fg. Să ducem dreapta PS egală cu dreapta Ee. Să o bisectăm în O, şi din centrul O şi cu intervalul OP să descriem cercul $SIPi$. Prin circumferinţa ei întreagă împreună cu părţile sale să exprimăm timpul întreg al unei vibraţii cu părţile ei proporţionale; astfel că într-un timp complet oarecare PH sau $PHSh$, dacă coborîm pe PS perpendiculara HL sau hl, şi luăm $E\varepsilon$ egal cu PL sau Pl, punctul fizic E va fi reperat în ε. Un punct oarecare E, mergînd de la E prin ε la e, şi de aici întorcîndu-se prin ε la E conform acestei legi, va executa diversele vibraţii cu aceleaşi grade de acceleraţii şi întîrzieri ca pendulul oscilant. Trebuie să dovedim că diversele puncte fizice ale mediului trebuie să fie agitate cu o astfel de mişcare. Să ne închipuim deci că un mediu este excitat cu o astfel de mişcare dintr-o cauză oarecare. şi să vedem ce urmează de aici.

Pe circumferinţa $PHSh$ să luăm arcele egale HI, IK sau hi, ik, avînd acelaşi raport către întreaga circumferinţă pe care îl au dreptele egale EF, FG, către intervalul întreg BC al impulsurilor. Şi coborînd perpendicularele IM, KN sau im, kn; deoarece punctele E, F, G sînt agitate succesiv prin mişcări asemenea, şi efectuează vibraţiile lor întregi compuse din înaintare şi venire pînă cînd impulsul se tran-

sferă de la B la C; dacă PH sau $PHSh$ este timpul de la începutul mişcării punctului E, PI sau $PHSi$ va fi timpul de la începutul mişcării punctului F, şi PK sau $PHSk$ timpul de la începutul mişcării punctului G; şi de aceea $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ vor fi egale respectiv cu PL, PM, PN la înaintarea punctelor, sau cu Pl, Pm, Pn la întoarcerea punctelor. De unde $\varepsilon\gamma$ sau $EG + G\gamma - E\varepsilon$ la înaintarea punctelor va fi egal cu $EG - LN$, iar la întoarcere va fi egal cu $EG + ln$. Dar $\varepsilon\gamma$ este lăţimea sau expansiunea părţii EG în locul $\varepsilon\gamma$; şi de aceea expansiunea părţii, în înaintare este către expansiunea medie, precum $EG - LN$ către EG; iar la întoarcere precum $EG+ln$ sau $EG + LN$ către EG. De aceea cum LN este către KH precum IM către raza OP, şi KH către EG precum circumferinţa $PHShP$ către BC, adică, dacă punem V în locul razei cercului avînd circumferinţa egală cu intervalul impulsurilor BC, precum OP către V; şi prin egalitate LN către EG precum IM către V: expansiunea părţii EG sau a punctului fizic F în locul $\varepsilon\gamma$ va fi către expansiunea medie, pe care o are partea aceea în primul său loc EG, precum $V - IM$ către V la înaintare, şi precum $V + im$ către V la întoarcere. De unde forţa elastică a punctului F în locul $\varepsilon\gamma$ este către forţa ei elastică medie în locul EG, precum $\frac{1}{V-IM}$ către $\frac{1}{V}$ la înaintare, iar la întoarcere precum $\frac{1}{V+im}$ către $\frac{1}{V}$. Şi prin acelaşi raţionament forţele elastice ale punctelor fizice E şi G la înaintare, sînt precum $\frac{1}{V-HL}$, şi $\frac{1}{V-KN}$ către $\frac{1}{V}$; şi diferenţa forţelor către forţa elastică mijlocie a mediului, precum $\frac{HL-KN}{VV - V\times HL - V\times KN + HL\times KN}$ către $\frac{1}{V}$. Adică precum $\frac{HL-KN}{VV}$ către $\frac{1}{V}$ sau precum $HL-KN$ către V, dacă (din cauza limitelor înguste de vibraţii) presupunem că HL şi KN sînt infinit mai mici decît cantitatea V. De aceea cum cantitatea V este dată, diferenţa forţelor este precum $HL-KN$, adică (deoarece $HL - KN$ este proporţional cu HK, şi OM cu OI sau OP, şi fiind date HK şi OP) precum OM; adică, dacă Ff se bisectează în Ω, precum $\Omega\varphi$. Şi prin acelaşi raţionament diferenţa forţelor elastice ale punctelor fizice ε şi γ, la întoarcerea linioarei fizice $\varepsilon\gamma$ este precum $\Omega\varphi$. Dar diferenţa aceea (adică excesul forţei elastice a punctului ε faţă de forţa elastică a punctului γ) este forţa cu care linioara fizică interpusă $\varepsilon\gamma$ a mediului se accelerează la înaintare şi se întîrzie la întoarcere; şi de aceea forţa acceleratoare a linioarei fizice $\varepsilon\gamma$ este precum distanţa ei de la locul mediu de vibraţie Ω. De aceea timpul (potrivit propoziţiei XXXVIII, Cartea I) se exprimă corect prin arcul PI; şi partea liniară $\varepsilon\gamma$ a mediului se mişcă potrivit legii menţionate, adică, potrivit legii pendulului oscilant: şi la fel este cazul tuturor părţilor liniare din care se compune mediul întreg. Q.E.D.

COROLAR. De aici se vede că numărul impulsurilor propagate este acelaşi cu numărul vibraţiilor corpului vibrant, şi nici nu se înmulţeşte în progresarea lor. Căci linioara fizică $\varepsilon\gamma$, imediat ce ajunge la primul său loc, va fi în repaus; şi nici nu se va pune în mişcare, decît dacă va primi o nouă mişcare, fie de la impulsul corpului vibrant, fie de la forţa impulsurilor ce se propagă de la corpul vibrant. Prin urmare imediat ce impulsul încetează de a se propaga de la corpul vibrant, ea se opreşte.

PROPOZIŢIA XLVIII. TEOREMA XXXVIII

Vitezele impulsurilor propagate într-un fluid elastic sînt într-un raport compus din rădăcina pătrată a forţei elastice şi inversul rădăcinii pătrate a densităţii; dacă presupunem că forţa elastică a fluidului este proporţională cu condensarea lui.

CAZUL 1. Dacă mediile sînt omogene, şi distanţele impulsurilor în aceste medii sînt egale între ele, dar mişcarea într-un mediu este mai intensă: contracţiile şi dilataţiile părţilor analoge vor fi precum acele mişcări. Această propoziţie nu este tocmai exactă. Totuşi dacă contracţiile şi dilataţiile nu sînt foarte intense, eroare nu va fi sensibilă, şi deci în mod fizic poate fi considerată corectă. Dar forţele elastice motoare sînt precum contracţiile şi dilataţiile; şi vitezele părţilor egale născute simultan sînt precum forţele. Prin urmare părţile egale şi corespunzătoare ale impulsurilor corespunzătoare efectuează deodată înaintările şi întoarcerile lor prin spaţii proporţionale cu contracţiile şi dilataţiile, cu viteze care sînt precum spaţiile: şi de aceea impulsurile, care în timpul unei înaintări şi întoarceri înaintînd parcurg o lăţime, şi succed totdeauna în locurile impulsurilor imediat precedente, din cauza egalităţii distanţelor înaintează cu viteză egală în ambele medii.

CAZUL 2. Dacă distanţele sau lungimile impulsurilor sînt mai mari într-un mediu decît în altul; să presupunem că părţile corespunzătoare descriu spaţii proporţionale cu lăţimile impulsurilor, înaintînd şi întorcîndu-se alternativ: şi contracţiile şi dilataţiile lor vor fi egale. Şi deci dacă mediile sînt omogene, vor fi egale şi acele forţe elastice motoare prin care se agită cu mişcarea reciprocă. Dar materia care trebuie mişcată prin aceste forţe este precum lăţimea impulsurilor; şi în acelaşi raport este spaţiul prin care mergînd şi întorcîndu-se alternativ trebuie să se mişte. Şi timpul unei înaintări şi veniri este într-un raport compus din rădăcina pătrată a materiei şi rădăcina pătrată a spaţiului, şi deci precum spaţiul. Dar impulsurile mergînd în timpurile unei înaintări şi reveniri efectuează o lungime, adică parcurg spaţii proporţionale cu timpurile; şi de aceea sînt de viteze egale.

CAZUL 3. Aşadar în medii de densitate şi forţă elastică egale, toate impulsurile sînt de viteze egale. Căci dacă mărim fie densitatea fie forţa elastică a mediului, deoarece forţa motoare creşte în raport cu forţa elastică, şi materia ce trebuie mişcată va creşte în raportul densităţii; timpul în care acele mişcări se efectuează ca mai înainte, va creşte în raportul rădăcinii pătrate a densităţii, şi va scădea în raportul rădăcinii pătrate a forţei elastice. Şi de aceea viteza impulsurilor va fi într-un raport compus din rădăcina pătrată a raportului invers al densităţii mediului şi rădăcina pătrată a raportului direct. al forţei elastice. Q.E.D.

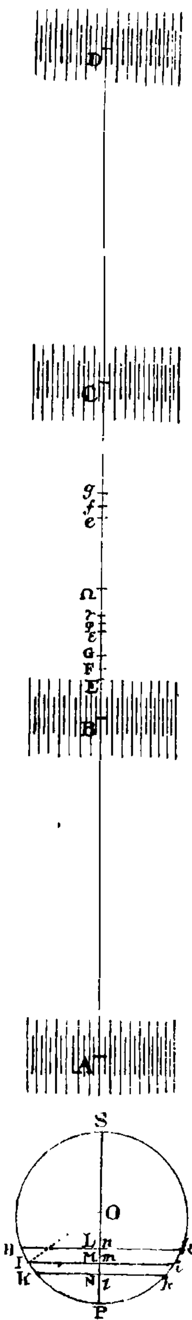
Această propoziţie se va clarifica prin construcţia celei ce urmează.

PROPOZIŢIA XLIX. PROBLEMA XI

Fiind dată densitatea şi forţa elastică a mediului, să aflăm viteza impulsurilor.

Să ne închipuim că mediul este comprimat de o greutate apăsătoare în felul aerului; şi fie A înălţimea mediului omogen, a cărui greutate să egaleze greutatea apăsătoare, şi a cărui densitate să fie aceeaşi cu densitatea me-

diului comprimat, în care se propagă impulsurile. Să ne închipuim construit un pendul, a cărui lungime între punctul de suspensiune și centrul de oscilație să fie A; și în timpul, în care pendulul efectuează o oscilație întreagă compusă dintr-o înaintare și întoarcere, impulsul mergînd va parcurge un spațiu egal cu circumferința unui cerc descris cu raza A.



Căci păstrînd cele construite în propoziția XLVII, dacă o linie fizică oarecare EF, descriind în diversele vibrații spațiul PS, este acționată în locurile extreme P și S ale unei înaintări și întoarceri oarecare, de o forță elastică ce este egală cu greutatea ei; ea va executa diversele oscilații în timpul în care ea poate oscila pe o cicloidă, al cărei perimetru întreg este egal cu lungimea PS: aceasta fiindcă forțe egale vor împinge corpuscule egale prin spații egale în același timp. De aceea cum timpurile de oscilații sînt în raportul rădăcinii pătrate a lungimii pendulelor; și lungimea pendulului este egală cu jumătatea arcului cicloidei întregi, timpul de vibrație al unuia va fi către timpul de oscilație al pendulului, a cărui lungime este A, în raportul rădăcinii pătrate a lungimii $\frac{1}{2}PS$ sau PO către lungimea A. Dar forța elastică, cu care este acționată linioara fizică EG, cînd se află în locurile sale extreme P, S, era (în demonstrația propoziției XLVII) către forța ei elastică întreagă precum $HL - KN$ către V, adică (fiindcă punctul K coincide cu P) precum HK către V; și forța întreagă adică greutatea apăsătoare, cu care este comprimată linioara EG, este către greutatea linioarei precum înălțimea A a greutății apăsătoare către lungimea EG a linioarei; și deci prin egalitate, forța cu care este acționată linioara EG în locurile sale P și S, este către greutatea linioarei precum $HK \times A$ către $V \times EG$, sau precum $PO \times A$ către VV, căci HK era către EG, precum PO către V. De aceea cum timpurile, în care corpuri egale sînt împinse prin spații egale, sînt în raport invers cu rădăcina pătrată a forțelor, timpul unei vibrații sub acțiunea forței elastice, va fi către timpul unei vibrații, sub acțiunea forței greutății, ca rădăcina pătrată a lui VV către $PO \times A$, și deci către timpul de oscilație a pendulului a cărui lungime este A precum rădăcina pătrată a raportului VV către $PO \times A$, și rădăcina pătrată a lui PO către A luate împreună; adică, în raportul întreg al lui V către A. Dar în timpul unei vibrații compuse dintr-o înaintare și întoarcere, impulsul înaintînd parcurge lățimea sa BC. Prin urmare timpul, în care impulsul parcurge spațiul BC, este către timpul unei oscilații compuse dintr-o înaintare și întoarcere, precum V către A, adică, precum BC către circumferința cercului a cărui rază este A. Dar timpul, în care impulsul va parcurge spațiul BC, este către timpul în care va parcurge o lungime egală

cu această circumferinţă, în acelaşi raport şi deci în timpul unei atari oscilaţii impulsul va parcurge o lungime egală cu această circumferinţă. Q. E. *D.*

COROLARUL 1. Viteza impulsurilor este aceea, pe care o cîştigă corpurile grele, căzînd cu o mişcare uniform accelerată, şi descriind în căderea lor jumătatea înălţimii *A*. Căci în timpul acestei căderi, cu viteza cîştigată în cădere, impulsul va pacurge spaţiul care va fi egal cu întreaga înălţime *A*; şi deci în timpul unei oscilaţii compuse dintr-o înaintare şi o revenire va parcurge un spaţiu egal cu circumferinţa unui cerc descris cu raza *A*: căci timpul căderii este către timpul de oscilaţie precum raza cercului către circumferinţa lui.

COROLARUL 2. De unde cum înălţimea *A* este precum forţa elastică a fluidului şi în raport invers cu densitatea lui; viteza impulsurilor va fi într-un raport compus din raportul invers al rădăcinii pătrate a densităţii şi din raportul direct al rădăcinii pătrate a forţei elastice.

PROPOZIŢIA I. PROBLEMA XII

Să aflăm distanţele impulsurilor.

Să aflăm numărul de vibraţii într-un timp dat al unui corp, prin a cărui vibraţie se produc impulsuri. Să împărţim cu acel număr spaţiul pe care-l poate parcurge impulsul în acelaşi timp, şi partea aflată va fi lăţimea unui impuls. Q.E.D.

SCOLIE

Propoziţiile ultime se referă la mişcarea luminii şi a sunetelor. Căci cum lumina se propagă în linii drepte, nu poate consta într-o singură acţiune (potrivit propoziţiilor XLI şi XLII). Iar sunetele fiindcă sînt născute de corpurile vibratoare, nu sînt altceva decît impulsurile propagate ale aerului potrivit propoziţiei XLIII. Aceasta se confirmă prin vibraţiile pe care le produc în corpurile ce le stau în cale, dacă sînt intense şi profunde, cum sînt sunetele tobelor. Căci vibraţiile mai repezi şi mai scurte se produc mai greu. Dar este bine cunoscut că şi orice fel de sunete, căzînd pe coarde unisone cu corpurile sonore, produc vibraţii. Acest lucru se confirmă şi prin viteza sunetelor. Căci cum greutăţile specifice ale apei de ploaie şi ale mercurului sînt între ele aproximativ ca 1 către $13\frac{2}{3}$, şi cînd mercurul atinge în *barometru* înălţimea de 30 degete englezeşti, greutatea specifică a aerului şi a apei de ploaie sînt între ele aproximativ precum 1 la 870: greutăţile specifice ale aerului şi mercurului vor fi precum 1 la 11 890. Aşadar cum înălţimea mercurului este de 30 degete, înălţimea aerului uniform, a cărui greutate ar putea comprima aerul nostru situat jos, va fi de 356 700 degete, sau de 29 725 picioare engleze. Această înălţime este aceea pe care în construcţia problemei de mai sus am numit-o *A*. Circumferinţa cercului descris cu raza de 29 725 picioare este de 186 768 picioare. Şi cum, după cum se ştie, un pendul lung de $39\frac{1}{5}$ degete face o oscilaţie compusă dintr-o înaintare şi o

revenire în timp de două secunde: un pendul lung de 29725 picioare sau 356700 degete ar trebui să execute o oscilație analogă în $190\frac{3}{4}$ secunde. Așadar sunetul înaintînd în acel timp va parcurge 186768 picioare, și deci în timpul unei secunde 979 picioare.

De altfel în acest calcul nu am luat în considerare grosimea particulelor solide ale aerului, prin care sunetul se propagă instantaneu. Cum greutatea aerului este către greutatea apei ca 1 către 870, și sărurile sînt aproape de două ori mai dense decît apa; dacă admitem că particulele de aer au aproape densitatea particulelor de apă sau de sare, și starea de rarefiere a aerului provine din intervalele particulelor: diametrul particulei de aer va fi către intervalul dintre centrele particulelor, precum aproape 1 către 9 sau 10, și către intervalul dintre particule precum 1 către 8 sau 9. Prin urmare la 979 picioare, pe care sunetul le face într-o secundă, după calculul de mai sus, putem adăuga $\frac{979}{9}$ picioare sau aproape 109, din cauza mărimii particulelor de aer: și astfel sunetul în timp de o secundă va parcurge aproximativ 1088 de picioare.

Mai adăugăm că vaporii, ascunși în aer, cum au altă elasticitate și alt ton abia participă la mișcarea aerului adevărat prin care se propagă sunetele. Dar aceștia fiind în repaus, mișcarea se va propaga mai repede numai prin aerul adevărat, și anume în raportul rădăcinii pătrate a materiei lipsă. Astfel dacă atmosfera constă din zece părți de aer adevărat și o parte vapori, mișcarea sunetelor va fi mai rapidă precum rădăcina pătrată a raportului lui 11 către 10, sau în raportul aproape întreg al lui 21 către 20, decît dacă s-ar propaga prin unsprezece părți ale aerului adevărat: și deci mișcarea sunetului aflată mai sus va trebui mărită în acest raport. În aceste condiții sunetul, în timpul unei secunde, va parcurge 1142 picioare.

Acestea trebuie să se întîmple astfel în timp de primăvară și toamnă, cînd aerul din cauza căldurii temperate se rărește și forța lui elastică crește întrucîtva. În timp de iarnă însă, cînd aerul se condensează din cauza frigului, și forța lui elastică se micșorează, mișcarea sunetelor trebuie să fie mai înceată în raportul rădăcinii pătrate a densității; și la rîndul său în timp de vară trebuie să fie mai rapidă.

Se constată însă prin experiență că sunetele mergînd în timpul unei secunde înaintează cam 1142 picioare londoneze, sau 1070 picoare pariziene.

Cunoscînd viteza sunetelor se cunosc și intervalele impulsurilor. Căci d-l Sauveur a aflat, făcînd experiențe, că un tub deschis, a cărui lungime este de aproximativ cinci picioare pariziene emite un sunet de același ton cu sunetul unei coarde care în timpul unei secunde vibrează de o sută de ori. Prin urmare sînt aproximativ o sută de impulsuri în spațiul de 1070 picioare pariziene, pe care sunetul le parcurge în timp de o secundă; și deci un impuls ocupă un spațiu de aproape $10\frac{7}{10}$ picioare pariziene, adică, aproape dublul lungimii tubului. De unde este verosimil că lățimile impulsurilor în sunetele tuturor tuburilor deschise, sînt egale cu dublul lungimilor tuburilor.

Apoi din corolarul propoziției XLVII a acestei Cărți reiese pentru ce încetează sunetele imediat după încetarea mișcării corpului sonor, și nu se

aud mai mult timp cînd stăm mai departe de corpurile sonore, decît dacă sîntem mai aproape. Dar din principiile stabilite apare evidentă şi cauza pentru ce se întăresc foarte mult sunetele în megafoane. Căci orice mişcare reciprocă se întăreşte la fiecare întoarcere de către cauza ce o produce. Iar în tuburi care împiedică dilatarea sunetelor, mişcarea se pierde mai tîrziu şi se reflectează mai tare, şi de aceea se măreşte mai mult prin noua mişcare imprimată în diversele întoarceri. Şi acestea sînt fenomenele mai importante ale sunetelor.

SECȚIUNEA IX

Despre mișcarea circulară a fluidelor

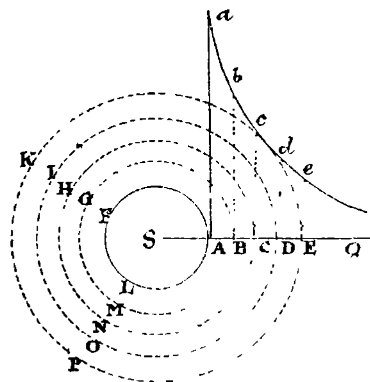
IPOTEZĂ

Rezistența ce provine din lipsa de lubricitate a părților fluidului, celelalte mărimi fiind egale, este proporțională cu viteza prin care părțile fluidului se separă una de alta.

PROPOZIȚIA LI. TEOREMA XXXIX

Dacă un cilindru solid infinit de lung se rotește într-un fluid uniform și infinit în jurul unei axe de poziție dată cu o mișcare uniformă, și fluidul este dus pe orbită numai prin impulsul acestuia, însă fiecare parte a fluidului persevererează în mod uniform în mișcarea sa; zic că timpurile periodice ale părților fluidului sînt precum distanțele lor de la axa cilindrului.

Fie *AFL* cilindrul dus pe o orbită în mod uniform în jurul axei *S*, și prin cercurile concentrice *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP* etc., să împărțim fluidul în orbite cilindrice nenumărate concentrice solide de aceeași grosime. Și fiindcă fluidul este omogen, acțiunile reciproce ale orbitelor vecine vor fi (prin ipoteză) precum translațiile lor reciproce, și suprafețele vecine în care au loc acțiunile. Dacă acțiunea pe o orbită oarecare este mai mare sau mai mică de partea concavă decît de partea convexă, va prevala acțiunea mai intensă, și sau va accelera sau va întîrzia mișcarea orbitei, după cum este dirijată în aceeași regiune cu mișcarea sau într-una contrară. Deci pentru ca fiecare orbită să persevereze în mișcarea sa uniformă, trebuie ca acțiunile din ambele părți să fie egale și să aibă loc în regiuni contrarii. De unde cum acțiunile sînt precum suprafețele vecine și translațiile lor reciproce, translațiile vor fi în raport invers cu suprafețele, adică, în raport invers cu distanțele suprafețelor de la axă. Dar diferențele mișcărilor unghiulare în jurul axei sînt precum aceste translații aplicate la distanțe, sau în raportul translațiilor și în raport invers cu distanțele, adică, unind rapoartele, în raport invers cu pătratele distanțelor. De aceea dacă la diversele părți ale dreptei infinite *SABCDEQ* se ridică perpendicularele *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* etc., invers proporționale cu pătratele lungimilor *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* etc., și prin capetele perpendicularelor ne închipuim dusă o linie curbă hiperbolică; sumele diferențelor, adică mișcările întregi unghiulare, vor fi precum sumele corespunzătoare ale liniilor *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, adică, dacă pentru a constitui un mediu fluid uniform, mărim numărul orbitelor și scădem lățimea la infinit, precum ariile hiperbolice *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*,



DdQ, *EeQ* etc., analoge cu aceste sume. Şi timpurile invers proporţionale cu mişcările unghiulare, vor fi de asemenea invers proporţionale cu aceste arii. Prin urmare timpul periodic al unei particule oarecare *D* este în raport invers cu aria *DdQ*, adică (din cauza cvadraturilor cunoscute ale curbelor) precum distanţa *SD*. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici mişcările unghiulare ale particulelor fluidului sînt în raport invers cu distanţele lor de la axa cilindrului, şi vitezele absolute sînt egale.

COROLARUL 2. Dacă un fluid este conţinut într-un vas cilindric de lungime infinită, şi conţine un alt cilindru interior, şi ambii cilindri se rotesc în jurul unei axe comune, şi timpurile de revoluţie sînt precum semidiametrele lor, şi fiecare parte a fluidului perseverează în mişcarea sa: timpurile periodice ale diverselor părţi vor fi precum distanţele lor de la axa cilindrilor.

COROLARUL 3. Dacă cilindrului şi fluidului într-o astfel de mişcare li se adună sau li se scade o mişcare unghiulară comună oarecare; deoarece prin această mişcare nouă nu se schimbă frecarea mutuală a părţilor fluidului, mişcările părţilor nu se vor schimba între ele. Căci translaţiile părţilor între ele depind de frecare. Orice parte va persevera în acea mişcare care, prin frecarea efectuată de ambele părţi în direcţii contrare, nu este mai mult accelerată decît întîrziată.

COROLARUL 4. De unde dacă din întregul sistem al cilindrilor şi fluidului se scade întreaga mişcare unghiulară a cilindrului exterior, vom avea mişcarea fluidului în cilindrul în repaus.

COROLARUL 5. Aşadar dacă fluidul şi cilindrul exterior fiind în repaus, cilindru se roteşte în mod uniform: mişcarea circulară se va comunica fluidului, şi încetul cu încetul se va propaga prin fluidul întreg; şi nici nu va înceta să crească mai înainte ca diversele părţi ale fluidului să obţină mişcarea definitivă prin corolarul al patrulea.

COROLARUL 6. Şi fiindcă fluidul tinde să propage mişcarea sa mai departe, prin impulsul acestuia se antrenează şi cilindrul exterior dacă nu este violent reţinut; şi mişcarea lui se va accelera pînă ce timpurile periodice ale ambilor cilindri vor fi egale între ele. Căci dacă cilindrul exterior este reţinut în mod violent, el va tinde să întîrzie mişcarea fluidului; şi dacă cilindrul interior păstrează mişcarea prin mijlocirea unei forţe oarecare imprimate dinafară, va face ca ea încetul cu încetul să înceteze.

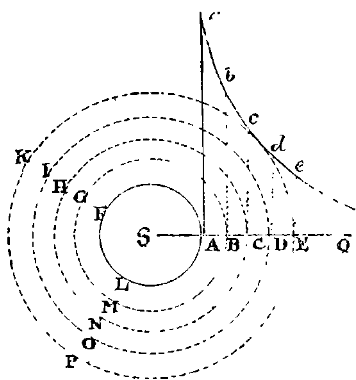
Toate acestea pot fi experimentate într-o apă adîncă stătătoare.

PROPOZIŢIA LII. TEOREMA XL

Dacă o sferă solidă, într-un fluid uniform şi infinit, se roteşte în jurul unei axe de poziţie dată cu o mişcare uniformă, şi fluidul este purtat pe orbită numai prin impulsul acesteia; şi fiecare parte a fluidului perseverează în mod uniform în mişcarea sa: zic că timpurile periodice ale părţilor fluidului vor fi precum pătratele distanţelor de la centrul sferei.

CAZUL 1. Fie *AFL* o sferă antrenată în mod uniform pe o orbită în jurul axei *S* şi prin cercurile concentrice *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP* etc., să

separăm fluidul în nenumărate orbite concentrice de aceeași grosime. Să ne închipuim că orbitele sînt solide; și fiindcă fluidul este omogen, acțiunile efectuate reciproc de orbite, vor fi (prin ipoteză) precum translațiile lor între ele și suprafețele vecine în care au loc acțiunile. Dacă acțiunea pe o orbită oarecare este mai mare sau mai mică de partea concavă decît de partea convexă; va prevala acțiunea mai tare, și sau va accelera sau va întîrzia viteza orbitei, după cum este dirijată în aceeași direcție cu mișcarea ei sau în direcție contrară. Prin urmare pentru ca o orbită oarecare să poată persevera în mișcarea sa în mod uniform, va trebui ca acțiunile din ambele părți să fie egale, și să aibă loc în direcții contrarii. De unde cum acțiunile sînt precum suprafețele vecine și translațiile lor reciproce; translațiile vor fi în raport invers cu suprafețele, adică, în raport invers cu pătratele distanțelor suprafețelor de la centru. Dar diferențele mișcărilor unghiulare în jurul axei sînt precum aceste translații aplicate la distanțe, sau precum translațiile și în raport invers cu distanțele, adică, unind rapoartele în raport invers cu cubul distanțelor. De aceea dacă la diversele părți ale dreptei infinite $SABCDEQ$ ridicăm perpendicularele Aa, Bb, Cc, Dd, Ee etc., invers proporționale cu cuburile lui SA, SB, SC, SD, SE etc., sumele diferențelor, adică mișcările unghiulare întregi, vor fi precum sumele corespunzătoare ale liniilor Aa, Bb, Cc, Dd, Ee: adică (dacă pentru a constitui un mediu fluid uniform, numărul orbitelor crește și lățimea scade la infinit) precum ariile hiperbolice AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ etc., analoge cu aceste sume. Și timpurile periodice invers proporționale cu mișcările unghiulare vor fi de asemenea invers proporționale cu aceste arii. Așadar timpul periodic al unei orbite oarecare DIO este în raport invers cu aria DdQ, adică, din cauza cvadraturilor cunoscute ale curbelor, precum pătratul distanței SD. Ceea ce am voit mai întîi să demonstrez.



CAZUL 2. Din centrul sferei să ducem cît de multe drepte infinite, care să cuprindă cu axa unghiuri date, întrecîndu-se reciproc cu diferențe egale; și cu aceste drepte învîrtite în jurul axei să ne închipuim orbitele tăiate în nenumărate inele; și fiecare inel va avea patru inele vecine cu el, unul interior, altul exterior și două laterale. Fiecare din aceste inele nu poate fi acționat printr-o frecare interioară și exterioară în mod egal și de părți contrarii, decît dacă mișcarea este efectuată potrivit legii primului caz. Aceasta apare evident din demonstrația primului caz. Și de aceea orice serie de inele înaintînd de la sferă la infinit pe o dreaptă, se va mișca conform legii cazului întîi, dacă nu este împiedicată de frecarea inelelor laterale. Dar în mișcarea efectuată după această lege, frecarea inelelor laterale este nulă, și de aceea nici nu va împiedica mișcarea, care are loc mai puțin după această lege. Dacă inelele, care sînt distanțate egal de la centru, se vor învîrti, fie mai repede fie mai încet în apropierea polilor decît în apropierea eclipticei; cele mai încete vor fi accelerate, și cele mai repezi vor fi întîrziate de frecarea

reciprocă, și astfel timpurile periodice totdeauna se vor apropia de egalitate, potrivit legii primului caz. Prin urmare această frecare nu împiedică mișcarea să aibă loc după legea primului caz, și de aceea legea va fi valabilă: adică, timpurile periodice ale diverselor inele vor fi precum pătratele distanțelor de la centrul sferei. Ceea ce voiam să demonstrez în al doilea rînd.

CAZUL 3. Să împărțim acum fiecare inel prin secțiuni transversale în particule nenumărate formînd o substanță în mod absolut și uniform fluidă; și fiindcă aceste secțiuni nu aparțin legii mișcării circulare, ci conduc numai la construcția fluidului, mișcarea secțiunii circulare va rămînea circulară ca mai sus. Prin aceste secțiuni toate inelele oricît de mici sau nu vor schimba asperitatea și forța de frecare mutuală, sau le vor schimba în mod egal. Și rămînînd proporția cauzelor va rămîne proporția efectelor, adică proporția mișcărilor și timpurilor periodice. Q.E.D. De altfel cum mișcarea circulară, și forța centrifugă născută din ea, este mai mare la ecliptică decît la poli; va trebui să fie o cauză oarecare prin care diversele particule să fie reținute pe cercurile lor; ca nu cumva materia care este la ecliptică, să se îndepărteze totdeauna de centru și prin vîrtejuri exterioare să emigreze la poli, și de aici să se întoarcă prin axă la ecliptică printr-o circulație perpetuă.

COROLARUL 1. De aici mișcările unghiulare ale părților fluidului în jurul axei sferei, sînt în raport invers cu pătratele distanțelor de la centrul sferei, și vitezele absolute în raport invers cu aceleași pătrate aplicate la distanțele de axă.

COROLARUL 2. Dacă o sferă se învîrtește în jurul unei axe de poziție dată cu o mișcare uniformă într-un fluid în repaus similar și infinit, mișcarea se va comunica fluidului, în felul vîrtejului, și mișcarea se va propaga cu încetul la infinit; și nici nu va înceta de a fi accelerată în diversele părți ale fluidului, pînă ce timpurile periodice ale diverselor părți nu sînt precum pătratele distanțelor de la centrul sferei.

COROLARUL 3. Deoarece părțile interioare ale vîrtejului din cauza vitezei sale mai mari freacă și apasă pe cele exterioare, și prin acea acțiune le comunică necontenit mișcarea, și cele exterioare transferă aceeași cantitate de mișcare simultan asupra altora pînă acum exterioare, și prin acea acțiune păstrează cantitatea sa de mișcare neschimbată, este evident că mișcarea este transportată necontenit de la centru la circumferința vîrtejului; și va fi absorbită prin infinitatea circumferinței. Materia dintre două suprafețe sferice oarecare concentrice cu vîrtejul nu va fi niciodată accelerată, fiindcă orice mișcare primită de la materia interioară trece totdeauna la cea exterioară.

COROLARUL 4. Prin urmare pentru a păstra vîrtejul în mod constant în aceeași stare de mișcare, se cere un principiu oarecare activ, de la care sfera să primească totdeauna aceeași cantitate de mișcare, pe care o imprimă asupra materiei vîrtejului. Fără un astfel de principiu este necesar ca sfera și părțile interioare ale vîrtejului, propagînd totdeauna mișcarea lor în exterior, și neprimind vreo mișcare nouă oarecare, se mișcă din ce în ce mai încet și încetează de a merge pe orbită.

COROLARUL 5. Dacă o altă sferă ar înota în acest vîrtej la o anumită distanță de centrul lui, și în același timp s-ar roti în mod constant cu o forță oarecare în jurul unei axe de înclinare dată, prin mișcarea acestuia fluidul ar fi antrenat în vîrtej, și mai întîi s-ar învîrti acest vîrtej nou și îngust împreună cu sfera în jurul centrului celuilalt, și în același timp mișcarea lui

s-ar răspîndi mai departe, şi încetul cu încetul s-ar propaga la infinit, în felul primului vîrtej. Şi din aceeaşi cauză, pentru care sfera acestuia este antrenată de mişcarea vîrtejului celeilalte, s-ar antrena şi sfera celuilalt prin mişcarea acestuia, astfel că cele două sfere s-ar roti în jurul unui punct oarecare intermediar, şi ar fugi una de alta din cauza acelei mişcări circulare, dacă nu cumva sînt reţinute de o forţă oarecare. După aceea dacă forţele imprimate în mod constant, prin care sferele persevereazǎ în mişcările lor, ar înceta, şi toate ar fi abandonate legilor mecanice, mişcările sferelor ar încezi încetul cu încetul (din cauza menţionată în corolarele 3 şi 4) şi vîrtejele în sfîrşit ar ajunge în stare de repaus.

COROLARUL 6. Dacă mai multe sfere în locuri date s-ar roti în mod constant în jurul unor axe de poziţie dată cu viteze determinate, se vor forma tot atîtea vîrtejuri înaintînd la infinit. Căci diversele sfere, din cauză pentru care una dintre ele propagă mişcarea sa la infinit, vor propaga şi mişcările lor la infinit, astfel încît fiecare parte a fluidului infinit va fi acţionată de mişcarea care rezultă din acţiunile tuturor sferelor. De unde vîrtejurile nu sînt îngrădite între anumite limite, ci încetul cu încetul trec unul în altul; şi sferele prin acţiunile vîrtejurilor între ele se vor mişca necontenit din locurile lor, după cum am expus în corolarul de mai sus; şi nici nu vor păstra o poziţie sigură oarecare între ele, decît dacă sînt reţinute de o forţă oarecare. Încetînd însă acele forţe care în sferele imprimate în mod constant păstrează aceste mişcări, materia din cauza menţionată în corolarul al treilea şi patrulea, încetul cu încetul va ajunge în stare de repaus şi va înceta de a se mişca în vîrtejuri.

COROLARUL 7. Dacă un fluid asemănător se închide într-un vas sferic, şi prin rotaţia uniformă a unei sfere situate în centru este antrenat în vîrtej iar sfera şi vasul se rotesc de aceeaşi parte în jurul aceleeaşi axe, şi timpurile lor periodice sînt precum pătratele semidiametrelor: părţile fluidului nu vor persevera mai departe în mişcările lor fără acceleraţie şi întîrziere, pînă ce timpurile lor periodice sînt precum pătratele distanţelor de la centrul vîrtejului. Nici o altă constituţie a vîrtejului nu poate fi permanentă.

COROLARUL 8. Dacă vasul, fluidul închis şi sfera păstrează această mişcare, şi se rotesc cu o mişcare unghiulară comună în jurul unei axe oarecare date, deoarece prin această mişcare nouă nu se schimbă frecarea reciprocă a părţilor fluidului, nu se vor schimba mişcările părţilor între ele. Căci translaţiile părţilor între ele depind de frecare. O parte oarecare va persevera în mişcarea, care se întîmplă astfel încît prin frecarea dintr-o parte nu este mai întîrziată decît este accelerată prin frecarea din cealaltă.

COROLARUL 9. De unde dacă vasul este în repaus şi se dă mişcare sferei, va fi dată mişcarea fluidului. Căci să ne închipuim că planul trece prin axa sferei şi se învîrteşte cu o mişcare contrară; şi să presupunem că suma timpului acestei revoluţii şi a revoluţiei sferei este către timpul de revoluţie a sferei, precum pătratul semidiametrului vasului către pătratul semidiametrului sferei: şi timpurile periodice ale părţilor fluidului faţă de acest plan vor fi precum pătratele distanţelor lor de la centrul sferei.

COROLARUL 10. Prin urmare dacă un vas se mişcă fie în jurul aceleiaşi axe cu sfera, fie în jurul alteia oarecare cu o viteză dată, va fi dată mişcarea fluidului. Căci dacă din întreg sistemul se scade mişcarea unghiulară a vasului, vor rămîne toate mişcările aceleaşi între ele ca mai sus, potrivit corolarului 8. Şi aceste mişcări vor fi date potrivit corolarului 9.

COROLARUL 11. Dacă vasul și fluidul sînt în repaus și sfera se roteşte cu mișcare uniformă, mișcarea se va propaga încetul cu încetul prin întreg fluidul din vas, și vasul va fi purtat împrejur, dacă nu va fi reţinut în mod forţat, și fluidul și vasul nu vor înçeta de a fi accelerate, înainte ca timpurile lor periodice să fie egale cu timpurile periodice ale sferei. Căci dacă vasul este reţinut cu o forţă oarecare sau este învîrtit cu o mișcare oarecare constantă și uniformă, mediul va ajunge încetul cu încetul la starea mişcării definite în corolarele 8, 9 și 10, și nici nu va persevera vreodată în vreo stare oarecare. Apoi dacă, încetînd forţele prin care vasul și sfera se învîrteau cu anumite mișcări, întreg sistemul este abandonat legilor mecanice; vasul și sfera acţionează unul asupra celuilalt prin mijlocirea fluidului, și nici nu vor înceta să propage mișcările lor unul altuia prin fluid, înainte ca timpurile lor periodice să fie egale între ele, și sistemul întreg se învîrtește deodată ca și cînd ar fi un singur solid.

SCOLIE

În toate acestea presupun că fluidul constă dintr-o materie uniformă în ceea ce privește densitatea și fluiditatea. De acest fel este fluidul în care aceeaşi sferă poate propaga cu aceeași mișcare în același interval de timp, mișcări asemenea și egale la distanţe totdeauna egale de ea, oriunde ar fi situată în fluid. Căci materia tinde ca prin mișcarea sa circulară să se îndepărteze de axa vîrtejului, și de aceea apasă toată materia posterioară. Din cauza acestei presiuni frecarea părţilor este mai intensă și separarea mai dificilă, și în consecinţă se micșorează fluiditatea materiei. Dacă părţile fluidului undeva sînt mai groase sau mai mari, acolo fluiditatea va fi mai mică, din cauză că sînt mai puţine suprafeţe în care părţile se separă una de alta. În astfel de cazuri presupunem că lipsa de fluiditate se suplinește fie prin lubricitatea părţilor fie prin încetineală sau altă condiţie oarecare. Dacă aceasta nu are loc, materia unde este mai puţin fluidă va fi mai coerentă și mai inertă, și deci va primi mișcarea mai tîrziu și o va propaga timp mai îndelungat decît prin raportul menţionat mai sus. Dacă figura vasului nu este sferică, particulele se vor mișca în linii necirculare dar conforme cu forma vasului și timpurile periodice vor fi precum aproximativ pătratele distanţelor mijlocii de centru. În părţile dintre centru și circumferinţă, unde spaţiile sînt mai late, mișcările vor fi mai încete, unde sînt mai înguste, mai rapide, totuși particulele mai repezi nu tind spre circumferinţă. Căci vor descrie arce mai puţin curbe, și tendinţa de îndepărtare de centru nu se va micșora mai puţin prin descreșterea acestei curburi decît va crește prin creșterea vitezei. Înaintînd de la spaţiile mai înguste la cele mai late se vor îndepărta ceva mai mult de centru, dar în această îndepărtare vor întîrzia; și apropiindu-se după aceea dinspre cele mai late către cele mai înguste vor fi accelerate, și astfel în mod alternativ diversele particule vor întîrzia și vor fi accelerate necontenit. Acestea se vor petrece astfel într-un vas rigid. Căci într-un fluid infinit constituţia vîrtejurilor se cunoaște prin corolarul al șaselea al acestei propoziţii.

Am încercat să studiez în această propoziţie proprietăţile vîrtejurilor, pentru a vedea dacă fenomenele cerești se vor explica prin vîrtejuri. Căci este un fenomen, că timpurile periodice ale planetelor ce se rotesc în jurul

lui Jupiter sînt precum puterea 3/2 a distanţelor de la centrul lui Jupiter; şi aceeaşi regulă este valabilă în cazul planetelor care se rotesc în jurul Soarelui. Dar aceste reguli sînt valabile în mod foarte precis pentru ambele feluri de planete, întrucît o arată observaţiile astronomice de pînă acum. Şi deci dacă acele planete ar fi antrenate de vîrtejuri ce se învîrtesc în jurul lui Jupiter şi al Soarelui, ar trebui ca şi aceste vîrtejuri să se rotească după această lege. De fapt timpurile periodice ale părţilor vîrtejurilor s-au găsit a fi precum pătratul distanţelor de la centrul mişcării: şi nici nu se poate micşora acel raport şi reduce la raportul 3/2, decît dacă sau materia vîrtejului este cu atît mai fluidă cu cît este mai depărtată de centru, sau rezistenţa care se naşte din lipsa lubricităţii părţilor fluidului, deoarece viteza cu care părţile fluidului se separă una de alta merge crescînd, creşte într-un raport mai mare decît acela în care creşte viteza. Dar nici una din acestea nu pare a fi rezonabilă. Părţile mai groase şi mai puţin fluide, dacă nu cumva sînt grele spre centru, tind spre circumferinţă; şi este verosimil că, deşi pentru demonstraţie am propus o astfel de ipoteză la începutul acestei secţiuni pentru ca rezistenţa să fie proporţională cu viteza, totuşi, rezistenţa este într-un raport mai mic decît acela al vitezei. Ceea ce admiţînd, timpurile periodice ale părţilor vîrtejului vor fi într-un raport mai mare decît acela al pătratului distanţelor de centru. Căci dacă vîrtejurile (după cum cred unii) se mişcă mai repede în apropiere de centru, apoi mai încet pînă la o anumită limită, apoi iarăşi mai repede lîngă circumferinţă; desigur nici raportul 3/2 şi nici un alt raport oarecare sigur şi determinat nu se poate obţine. Să vadă deci filozofii cum se poate explica acel fenomen al raportului 3/2 prin vîrtejuri.

PROPOZIŢIA LIII. TEOREMA XLI

Corpurile, care purtate într-un vîrtej se mişcă pe o orbită, au aceeaşi densitate cu vîrtejul, şi se mişcă în ceea ce priveşte viteza şi direcţia mişcării cu părţile lui.

Căci dacă presupunem că o parte foarte mică a vîrtejului, ale cărei particule sau puncte fizice păstrează o poziţie dată între ele, îngheaţă: aceasta, deoarece nici în ce priveşte densitatea sa, nici în ce priveşte forţa inerentă, nici figura nu se schimbă, se va mişca după aceeaşi lege ca mai sus: şi invers dacă partea îngheţată şi solidă a vîrtejului are aceeaşi densitate cu vîrtejul rămas, şi trece în stare fluidă; ea se va mişca după aceeaşi lege ca mai sus, dacă nu cumva particulele ei prefăcute în fluid se mişcă între ele. Să neglijăm deci mişcarea particulelor între ele, atît întrucît priveşte mişcarea progresivă a întregului, şi mişcarea întregului va fi aceeaşi ca mai înainte. Dar mişcarea va fi aceeaşi cu mişcarea altor părţi ale vîrtejului situate la distanţe, egale de centru, fiindcă solidul trecut în fluid devine o parte a vîrtejului asemenea cu celelalte părţi. Prin urmare solidul, dacă are aceeaşi densitate cu materia vîrtejului, se va mişca cu aceeaşi mişcare cu părţile lui, fiind în repaus relativ în materia din vecinătatea imediată. Dacă însă este mai dens, va tinde să se îndepărteze mai mult de centrul vîrtejului decît mai înainte; şi deci întrecînd forţa aceea a vîrtejului, cu care mai înainte era reţinut pe orbita sa ca şi cînd ar fi ţinut în stare de echilibru, se va îndepărta de centru şi rotindu-se va descrie o spirală, fără a mai reveni pe aceeaşi orbită. Şi prin acelaşi raţionament dacă este mai puţin dens se va apropia de

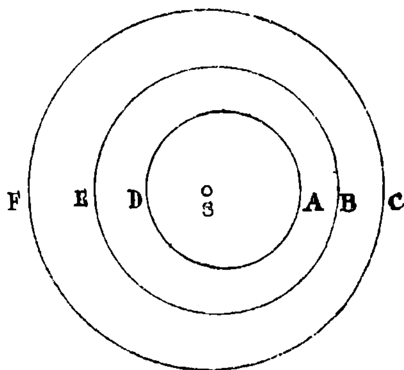
centru. Aşadar nu va reveni pe aceeaşi orbită decît dacă are aceeaşi densitate cu fluidul. Dar în acel caz s-a arătat, că s-ar învîrti după aceeaşi lege cu părţile fluidului egal depărtate de centrul vîrtejului . Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare solidul ce se roteşte în vîrtej şi revine totdeauna pe aceeaşi orbită, este în repaus relativ în fluidul în care înoată.

CORORARUL 2. Şi dacă vîrtejul este uniform în ce priveşte densitatea, acelaşi corp se poate roti la orice distanţă de centrul vîrtejului.

SCOLIE

De aici este evident că planetele nu sînt antrenate de vîrtejuri materiale. Căci planetele după ipoteza lui Copernic purtate în jurul Soarelui se rotesc pe elipse avînd focarul în Soare, şi cu razele duse la Soare descriu arii proporţionale cu timpurile. Dar părţile vîrtejului nu se pot roti cu o astfel de mişcare. Fie *AD*,*BE*,*CF*, trei orbite descrise în jurul Soarelui *S*, dintre care cercul exterior *CF* să fie concentric cu Soarele, şi fie *A*,*B* afeliile celor două intericare, iar *D*,*F* periheliile. Deci corpul ce se învîrteşte pe orbita *CF*, descriind cu raza dusă la Soare arii proporţionale cu timpurile, se va mişca cu o mişcare uniformă. Iar corpul, ce se roteşte pe orbita *BE*, se va mişca mai încet în afeliul *B* şi mai repede în periheliul *E*, potrivit legilor astronomice; pe cînd după legile mecanice materia vîrtejului în spaţiul mai îngust dintre *A* şi *C* ar trebui să se mişte mai repede decît în spaţiul mai lat dintre *D* şi *F*; adică în afeliu mai repede decît în periheliu. Aceste două ipoteze se contrazic. Astfel la începutul semnului Fecioarei, unde se află acum afeliul lui Marte, distanţa dintre orbitele lui Marte şi Venus este către distanţa aceloraşi orbite la începutul semnului Peştilor precum aproximativ trei la doi, şi de aceea materia vîrtejului între acele orbite la începutul Peştilor trebuie să fie mai rapidă decît la începutul Fecioarei în raportul de trei la doi. Căci cu cît este mai îngust spaţiul prin care aceeaşi cantitate de materie trece în acelaşi timp al unei revoluţii, trebuie să treacă cu o viteză cu atît mai mare. Aşadar dacă Pămîntul fiind în repaus relativ în această materie cerească ar fi antrenat de ea, şi s-ar învîrti împreună cu ea în jurul Soarelui, viteza lui la începutul Peştilor ar fi către viteza lui la începutul Fecioarei în raportul de 3/2. De unde mişcarea diurnă aparentă a Soarelui la începutul Fecioarei ar fi mai mare de şaptezeci de minute, şi la începutul Peştilor mai mică decît patruzeci şi opt de minute, cum însă (conform experienţei) mişcarea aceasta aparentă a Soarelui este mai mare la începutul Peştilor decît la începutul Fecioarei, şi de aceea Pămîntul este mai repede la începutul Fecioarei decît la începutul Peştilor. Aşadar ipoteza vîrtejurilor este cu totul în contrazicere cu fenomenele astronomice, şi conduce nu atît la explicarea cît la încurcarea mişcărilor cereşti. Iar în ce fel se întîmplă aceste mişcări în spaţiile libere fără vîrtejuri se poate înţelege din Cartea I, şi se va trata acum mai complet în sistemul lumii.



CARTEA A III-A

DESPRE SISTEMUL LUMII

În Cărţile precedente am expus principiile filozofiei, nu filozofice ci numai matematice, cu ajutorul cărora se poate discuta în chestiuni filozofice. Acestea sînt legile şi condiţiile mişcărilor şi forţelor, care se referă mai ales la filozofie. Totuşi, ca ele să nu pară sterile le-am ilustrat cu oarecare scolii filozofice, în care am tratat chestiunile generale, şi pe care se pare a se întemeia îndeosebi filozofia, precum densitatea şi rezistenţa corpurilor, spaţiile vide ale corpurilor, şi mişcarea luminii şi a sunetelor. Mai rămîne ca cu ajutorul aceloraşi principii să expunem constituţia sistemului lumii. Asupra acestui subiect am compus Cartea a treia în mod popular ca să fie citită de mai mulţi. Dar cei care nu înţeleg îndeajuns de bine principiile expuse, aceia înţeleg foarte puţin puterea consecinţelor, şi nici nu vor abandona prejudecăţile, cu care s-au obişnuit de mai mulţi ani: şi de aceea ca să nu se ajungă la discuţii, am dat forma de propoziţii esenţialului acelei Cărţi, după obiceiul matematicii, ca să fie citit numai de aceia care au înţeles principiile anterioare. Totuşi deoarece acolo intervin foarte des propoziţii, care pot răpi mult timp chiar şi cititorilor cunoscători ai matematicilor, nu vreau să îndemn pe nimeni ca să le pătrundă pe toate; va fi deajuns dacă cineva va citi cu atenţie definiţiile, legile mişcărilor şi primele trei secţiuni ale Cărţii întîia şi apoi va trece la această Carte asupra sistemului lumii, consultînd după voie celelalte propoziţii citate aici, ale Cărţilor precedente.

REGULI DE FILOZOFARE

REGULA I

Nu trebuie să admitem mai multe cauze pentru lucrurile naturale, decît atîtea cîte sînt și adevărate și suficiente pentru explicarea aparențelor lor.

Căci filozofii zic: Natura nu lucrează în zadar, și mai mult este zadarnic cînd mai puțin este deajuns. Căci natura este simplă și nu face lux cu cauze superflue ale lucrurilor.

REGULA II

Și de aceea efectelor naturale de același fel trebuie să le atribuim întrucît se poate, aceleași cauze.

Astfel respirația la om și animal; căderea pietrelor în *Europa* și în *America*; lumina focului din sobă și a Soarelui; reflexia luminii pe Pămînt și pe planete.

REGULA III

Calitățile corpurilor care nu pot fi nici intensificate și nici slăbite, și care aparțin tuturor corpurilor cu care se pot face experiențe, trebuie considerate drept calități ale tuturor corpurilor.

Căci calitățile corpurilor nu se cunosc decît prin experiențe, și deci trebuie considerate ca generale acelea care în general sînt de acord cu experiențele; și acelea care nu pot fi micșorate, nu pot fi făcute să dispară. Desigur evidenței experiențelor nu se pot opune visuri superficiale, și nici nu trebuie să ne îndepărtăm de analogia naturii, deoarece ea obișnuiește să fie simplă și totdeauna de acord cu ea însăși. Extinderea corpurilor se cunoaște numai prin simțuri, și nu se observă în toate: dar fiindcă ea aparține tuturor celor sensibile, o afirmăm despre toate. Știm din experiență că cele mai multe corpuri sînt dure. Dar duritatea întregului se naște din duritatea părților, și de aici cu drept cuvînt conchidem că nu numai particulele nedivizate ale

corpurilor pe care le simţim ci şi ale tuturor celorlalte sînt dure. Că toate corpurile sînt impenetrabile nu o deducem din raţionamente ci prin simţuri. Constatăm că acelea pe care le întîlnim, sînt impenetrabile, şi de aici deducem că impenetrabilitatea este o proprietate a tuturor corpurilor. Că toate corpurile sînt mobile, şi că înzestrate cu anumite forţe (pe care le numim forţe de inerţie) ele perseverează în mişcare sau repaus, o deducem din proprietăţi de acest fel ale corpurilor văzute. Extinderea, duritatea, impenetrabilitatea, mobilitatea şi forţa de inerţie a întregului, provin din extinderea, duritatea, impenetrabilitatea, mobilitatea şi forţele de inerţie ale părţilor; şi de aici conchidem că părţile cele mai mici ale tuturor corpurilor au întindere, sînt dure şi impenetrabile şi mobile, şi înzestrate cu forţe de inerţie. Şi acesta este fundamentul întregii filozofii. Apoi ştim din fenomene că părţile divizate ale corpurilor şi în contact una cu alta se pot separa între ele, şi este cunoscut din matematici că părţile nedivizate se pot împărţi cu mintea în părţi din ce în ce mai mici. Dar este nesigur că părţile acelea distincte şi nedivizate s-ar putea divide şi separa una de alta prin forţele naturii. Dacă însă printr-o singură experienţă s-ar constata că oarecare particule nedivizate, prin sfărîmarea unui corp dur şi solid, suferă o diviziune: prin această regulă am conchide că nu numai părţile divizate sînt separabile, ci că şi cele nedivizate se pot divide la infinit.

În sfîrşit, dacă prin experienţe şi observaţii astronomice se constată în mod universal că toate corpurile din apropierea Pămîntului sînt grele faţă de Pămînt, şi anume în raport cu cantitatea de materie din fiecare, şi că Luna este grea faţă de Pămînt în raport cu cantitatea materiei sale, şi că la rîndul său marea este grea faţă de Lună, şi că toate planetele sînt grele una faţă de alta, şi cometele la fel sînt grele faţă de Soare; trebuie să zicem potrivit acestei reguli că toate corpurile gravitează unul spre altul. Căci argumentul va fi mai tare pentru fenomenele de gravitate universală, decît pentru impenetrabilitatea corpurilor, despre care nu avem nici o experienţă, nici o observaţie directă în corpurile cereşti. Totuşi nu afirm că gravitatea este esenţială corpurilor. Prin forţa inerentă înţeleg numai forţa de inerţie. Aceasta este invariabilă. Îndepărtîndu-ne de Pămînt gravitatea se micşorează.

REGULA IV

În filozofia experimentală, propoziţiile deduse prin inducţiune din fenomene, trebuie considerate sau precis sau aproximativ adevărate, chiar dacă le stau împotrivă ipoteze contrare, pînă ce se vor ivi alte fenomene prin care devin sau mai precise sau supuse excepţiilor.

Aceasta trebuie să aibă loc pentru ca nu cumva argumentul inducţiei să fie nimicit prin ipoteze.

FENOMENE

FENOMENUL I

Planetele din jurul lui Jupiter descriu, cu razele duse la centrul lui Jupiter, arii proporționale cu timpurile, și timpurile lor periodice, stelele fixe fiind în repaus, sînt în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a distanțelor de la centrul lui.

Aceasta rezultă din observațiile astronomice. Orbitele acestor planete nu diferă în mod sensibil de cercuri concentrice ale lui Jupiter, și mișcările lor pe aceste cercuri se constată a fi uniforme. Iar astronomii sînt de acord că timpurile periodice sînt în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a semidiametrelor orbitelor; și acest lucru se vede din tabloul următor:

Timpurile periodice ale sateliților lui Jupiter

$1^d\ 18^h\ 27'\ 34''$. $3^d\ 13^h\ 13'\ 42''$. $7^d\ 3^h\ 42'\ 36''$. $16^d\ 16^h\ 32'\ 9''$

Distanțele sateliților de la centrul lui Jupiter

Din observațiile lui	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiametrul lui Jupiter
Townly *prin micrometru*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini *prin telescop*	5	8	13	23	
Cassini *prin eclipsa sateliților*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Din timpurile periodice.	5,667	9,017	14,384	25,299	

Pound a determinat elongațiile sateliților lui Jupiter și diametrul lui cu cele mai bune micrometre după cum urmează. Elongația maximă heliocentrică a satelitului al patrulea de la centrul lui Jupiter a fost determinată cu un micrometru într-un tub de 15 picioare lungime și s-a obținut la distanța mijlocie a lui Jupiter de Pămînt aproape $8'16''$. Iar a satelitului al treilea s-a determinat cu un micrometru într-un telescop de 123 picioare lungime, și s-a obținut la aceeași distanță a lui Jupiter de Pămînt $4'42''$.

Elongaţiile maxime ale celorlalţi sateliţi la aceeaşi distanţă a lui Jupiter de Pămînt din timpurile periodice s-a aflat a fi 2′56″ 47‴ şi 1′51″6‴.

Diametrul lui Jupiter a fost determinat de cîteva ori cu micrometrul într-un telescop de 123 picioare lungime, şi reduse la distanţa mijlocie a lui Jupiter de Soare sau de Pămînt, a rezultat totdeauna mai mic de cît 40″, niciodată mai mic decît 38″, în general 39″. În telescoapele mai scurte acest diametru este de 40″ sau 41″. Căci lumina lui Jupiter este puţin lărgită din cauza refracţiei neegale, şi această lărgire are un raport mai mic către diametrul lui Jupiter în telescoapele mai lungi şi mai perfecte decît în cele mai scurte şi mai puţin perfecte. Timpurile în care doi sateliţi, primul şi al treilea, treceau peste faţa lui Jupiter de la începutul intrării pînă la începutul ieşirii, şi de la intrarea completă la ieşirea completă, au fost observate cu ajutorul telescopului celui lung. Şi diametrul lui Jupiter la distanţa lui mijlocie rezultă a fi $37\frac{1'}{8}$ din trecerea primului satelit, şi $37\frac{3''}{8}$ din trecerea celui de-al treilea. S-a observat de asemenea timpul în care umbra primului satelit trece prin faţa lui Jupiter, şi de aici a rezultat aproximativ 37″ pentru diametrul lui Jupiter la distanţa lui mijlocie de Pămînt. Să presupunem că diametrul lui este aproximativ $37\frac{1''}{4}$; şi elongaţiile maxime ale satelitului întîi, al doilea, al treilea şi al patrulea vor fi egale respectiv cu 5,965, 9,494, 15,141 şi 26,63 semidiametri de ai lui Jupiter.

FENOMENUL II

Planetele din jurul lui Saturn descriu, cu razele duse la Saturn, arii proporţionale cu timpurile, şi timpurile lor periodice, stelele fixe fiind în repaus, sînt în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a distanţelor de la centrul lui.

Căci Cassini din observaţiile sale a aflat că distanţele lor de la centrul lui Saturn şi timpurile periodice sînt următoarele.

Timpurile periodice ale sateliţilor lui Saturn

$1^d\ 21^h\ 18'27''.2^d\ 17^h\ 41'\ 22''.4^d\ 12^h\ 25'\ 12''.\ 15^d\ 22^h\ 41'\ 14''.\ 79^d\ 7^h\ 48'\ 00''.$

Distanţele sateliţilor de la centrul lui Saturn în semidiametrii inelului

Din observaţii	$1\frac{19}{20}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	8	24
Din timpurile periodice . .	1,93	2,47	3,45	8	23,35

Elongaţia maximă a satelitului al patrulea de la centrul lui Saturn s-a aflat din observaţii obişnuite a fi aproximativ opt semidiametre. Dar elongaţia maximă a acestui satelit de la centrul lui Saturn, determinată cu cel mai bun micrometru din telescopul lui Huygens de 123 picioare lungime, s-a aflat a fi de opt semidiametre şi şapte zecimi. Şi din această observaţie şi din timpurile periodice, distanţele sateliţilor de la centrul lui Saturn în semidiametre ai inelului sînt 2,1, 2,69, 3,75, 8,7 şi 25,35. Diametrul lui Saturn în acelaşi telescop era către diametrul inelului precum 3 către 7, şi diametrul

inelului în zilele de 28 și 29 mai ale anului 1719 s-a aflat a fi 43″. Și deci diametrul inelului la distanța mijlocie a lui Saturn de Pămînt este de 42″, și diametrul lui Saturn 18″. Acestea se întîmplă astfel în telescoapele foarte lungi și foarte bune, deoarece mărimile aparente ale corpurilor cerești în telescoapele mai lungi au o proporție mai mare către dilatarea luminii la extremitățile acelor corpuri decît în cele mai scurte. Dacă se elimină orice lumină rătăcitoare, diametrul lui Saturn nu va rămîne mai mare ca 16″.

FENOMENUL III

Cele cinci planete primare Mercur, Venus, Marte, Jupiter și Saturn înconjoară Soarele cu orbitele lor.

Că Mercur și Venus se învîrtesc în jurul Soarelui se demonstrează din fazele lor lunare. Cînd lucesc cu fața plină sînt situate dincolo de Soare, înjumătățite sînt în regiunea Soarelui, sub formă de seceră dincoace de Soare, trecînd uneori peste discul lui la fel ca petele. Din fața plină a lui Marte în apropierea conjuncțiunii Soarelui, și din cea gheboasă în cvadraturi, este sigur că el înconjoară Soarele. Despre Jupiter și Saturn de asemenea se demonstrează același lucru din fazele lor totdeauna pline: căci din umbrele sateliților proiectate pe ele rezultă că ele lucesc cu lumina împrumutată de la Soare.

FENOMENUL IV

Timpurile periodice ale celor cinci planete primare, și acela al Soarelui în jurul Pămîntului sau al Pămîntului în jurul Soarelui, stelele fixe fiind în repaus, sînt în raportul puterii 3/2 a distanțelor mijlocii de la Soare.

Acest raport aflat de Kepler este acceptat de toți. Căci aceleași sînt timpurile periodice, și aceleași dimensiunile orbitelor, fie că Soarele se învîrtește în jurul Pămîntului, fie că Pămîntul se învîrtește în jurul Soarelui. Și asupra măsurii timpurilor periodice sînt de acord toți astronomii. Iar mărimile tuturor orbitelor le-au măsurat foarte precis Kepler și Bulliau din observații: și distanțele mijlocii, care corespund timpurilor periodice, nu diferă în mod sensibil de distanțele aflate de ei, și de obicei cad între acele valori; după cum se poate vedea în tabloul următor.

Timpurile periodice ale planetelor și Pămîntului în jurul Soarelui relative la stelele fixe, în zile și părți zecimale de zile

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275	4332,514	686,9785	365,2565	224,6176	87,9692

Distanțele mijlocii ale planetelor și Pămîntului de la Soare

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
După Kepler	951000	519650	152350	100000	72400	38806
După Bulliau	954198	522520	152350	100000	72398	38585
După timpurile periodice	954006	520096	152369	100000	72333	38710

Asupra distanţelor lui Mercur şi Venus de la Soare nu este locul să discutăm aici, fiindcă acestea se determină prin elongaţiile lor de la Soare. Pentru distanţele planetelor superioare de asemenea se închide orice discuţie din cauza eclipselor sateliţiilor lui Jupiter. Căci prin acele eclipse se determină poziţia umbrei pe care o proiectează Jupiter, şi din aceasta se obţine lungimea heliocentrică a lui Jupiter. Iar din comparaţia longitudinilor heliocentrică şi geocentrică între ele se determină distanţa lui Jupiter.

FENOMENUL V

Planetele primare, cu razele duse la Pămînt nu descriu arii proporţionale cu timpurile, dar cu razele duse la Soare, parcurg arii proporţionale cu timpurile.

Căci faţă de Pămînt cînd progresează, cînd sînt staţionare, cînd regresează. Dar faţă de Soare totdeauna progresează, şi aceasta aproape cu o mişcare uniformă, dar totuşi ceva mai repede în perihelii şi ceva mai încet în afelii, astfel ca descrierea ariilor să fie uniformă. Această propoziţie este foarte cunoscută astronomilor, şi îndeosebi pentru Jupiter se demonstrează prin eclipsele sateliţiilor săi, prin care eclipse am spus că se determină lungimile heliocentrice ale acestei planete şi distanţele de la Soare.

FENOMENUL VI

Luna descrie cu raza dusă la centrul Pămîntului, o arie proporţională cu timpul.

Aceasta este evident din mişcarea aparentă a Lunii comparată cu diametrul ei aparent. Este drept că mişcarea Lunii este perturbată întrucîtva de forţa Soarelui, dar în aceste fenomene neglijez micile erori insensibile.

PROPOZIŢII

PROPOZIŢIA I. TEOREMA I

Forţele cu care planetele din jurul lui Jupiter sînt abătute necontenit de la mişcările rectilinii şi sînt reţinute pe orbitele lor, sînt îndreptate spre centrul lui Jupiter, şi sînt în raport invers cu pătratele distanţelor de la poziţiile lor la acel centru.

Partea întîi a propoziţiei apare din fenomenul I şi din propoziţia II sau III, din Cartea I; şi partea din urmă din fenomenul I şi corolarul 6, propoziţia IV, a aceleiaşi Cărţi.

Acelaşi lucru trebuie înţeles despre planetele care înconjură pe Saturn, potrivit fenomenului II.

PROPOZIŢIA II. TEOREMA II

Forţele cu care planetele primare sînt necontenit abătute de la mişcările rectilinii şi sînt reţinute pe orbitele lor, sînt îndreptate spre Soare, şi sînt în raport invers cu pătratele distanţelor la centru.

Partea întîi a propoziţiei reiese din fenomenul V şi din propoziţia II a Cărţii I: şi partea din urmă din fenomenul IV şi propoziţia IV a aceleiaşi Cărţi. Mai precis se demonstrează această parte a propoziţiei prin repausul afeliilor. Căci cea mai mică abatere de la raportul invers al pătratelor (potrivit corolarului 1, propoziţia XLV, Cartea I) ar trebui să producă în fiecare revoluţie în parte o mişcare apreciabilă a apsidelor, una enormă în mai multe.

PROPOZIŢIA III. TEOREMA III

Forţa cu care Luna este reţinută pe orbita sa este îndreptată spre Pămînt şi este în raport invers cu pătratele distanţelor locurilor de la centrul acestuia.

Partea întîi a afirmaţiei rezultă din fenomenul VI şi din propoziţia II sau III, Cartea I; şi partea a doua din mişcarea foarte înceată a apogeului lunar. Căci acea mişcare progresivă, care în diversele revoluţii este numai de 3° 3'

se poate neglija. Într-adevăr reiese (din corolarul 1, propoziţia XLV, Cartea I) că dacă distanţa Lunii de la centrul Pămîntului este către semidiametrul Pămîntului precum D către 1; forţa din care ia naştere o astfel de mişcare este în raport invers cu $D^{2\frac{4}{243}}$, adică în raport invers cu acea putere a lui D al cărei exponent este $2\frac{4}{243}$, adică într-un raport al distanţei ceva mai mare decît inversul pătratului, dar care este mai aproape de raportul pătratului cu $59\frac{3}{4}$ părţi decît de al cubului. Dar ea provine din acţiunea Soarelui (după cum vom spune de aici înainte) şi de aceea aici o vom neglija. Acţiunea Soarelui întrucît ea abate Luna de la Pămînt, este aproximativ precum distanţa Lunii de la Pămînt; şi deci (potrivit celor spuse în corolarul 2, propoziţia XLV, Cartea I) este către forţa centripetă a Lunii aproximativ precum 2 către 357,45, sau 1 către $178\frac{29}{40}$. Şi neglijînd o forţă aşa de mare a Soarelui, forţa rămasă cu care Luna este reţinută pe orbită va fi în raport invers cu D^2. Ceea ce de asemenea se va constata mai deplin comparînd această forţă cu forţa gravităţii, după cum se întîmplă în propoziţia următoare.

COROLAR. Dacă forţa centripetă mijlocie cu care Luna este reţinută pe orbită creşte mai întîi în raportul lui $177\frac{29}{40}$ către $178\frac{29}{40}$, apoi de asemenea în raportul pătratului semidiametrului Pămîntului către distanţa mijlocie a centrului Lunii de la centrul Pămîntului: vom obţine forţa centripetă a Lunii la suprafaţa Pămîntului, admiţînd că coborînd la suprafaţa Pămîntului forţa va creşte necontenit în raportul invers al pătratului înălţimii.

PROPOZIŢIA IV. TEOREMA IV

Luna gravitează spre Pămînt şi, prin forţa gravităţii, totdeauna este abătută de la mişcarea rectilinie şi este reţinută pe orbita sa.

Distanţa mijlocie a Lunii de la Pămînt în syzigii este în semidiametri de-ai Pămîntului după Ptolomeu şi cei mai mulţi astronomi 59, după Vendelin şi Huygens 60, după Copernic $60\frac{1}{3}$, după Street $60\frac{3}{5}$ şi după Tycho $56\frac{1}{2}$. Dar Tycho şi toţi aceia care adoptă tablele lui de refracţie, construind refracţiile Soarelui şi Lunii (cu totul împotriva naturii luminii) mai mari decît ale stelelor fixe, şi aceasta cu aproape patru sau cinci minute, au mărit paralaxa Lunii cu tot atîtea minute, adică, cu aproape a douăsprezecea sau a cincisprezecea parte a întregii paralaxe. Să corectăm această eroare, şi distanţa va deveni aproape $60\frac{1}{2}$ semidiametre terestre, cam cum indică ceilalţi. Să presupunem că distanţa medie în syzigii este de 60 de semidiametre; şi perioada lunară faţă de stelele fixe se face în 27 zile, 7 ore, 43 minute, după cum afirmă astronomii; şi circumferinţa Pămîntului este de 123 249 600 picioare pariziene, după cum au determinat-o *Francezii* prin măsurări: şi dacă ne închipuim că Luna este lipsită de orice mişcare şi lăsată liberă, astfel ca fiind acţionată de întreaga forţă, prin care (potrivit corolarului, propoziţia III) este reţinută pe orbita sa, cade spre

Pămînt; căzînd în timpul unui minut va descrie $15\frac{1}{12}$ picioare pariziene. Aceasta se obţine din calcul efectuat fie conform propoziţiei XXXVI, Cartea I, fie (ceea ce revine la acelaşi lucru) potrivit corolarului 9, propoziţia IV a aceleiaşi Cărţi. Căci sinus versus-ul arcului pe care Luna îl va descrie în timpul unui minut, în mişcarea sa medie la distanţa de 60 semidiametre pămînteşti, este de aproape $15\frac{1}{12}$ picioare pariziene, sau mai precis de 15 picioare, 1 deget şi $1\frac{4}{9}$ linii. De unde, cum forţa aceea apropiindu-se de Pămînt creşte în raport invers cu pătratul distanţei, şi deci la suprafaţa Pămîntului este de 60×60 ori mai mare decît în Lună; corpul căzînd cu forţa aceea în regiunile noastre, ar trebui să descrie în timp de un minut $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$ picioare pariziene, şi în spaţiul unei secunde $15\frac{1}{12}$ picioare, sau mai precis 15 picioare, 1 deget şi $1\frac{4}{9}$ linii. Şi de fapt corpurile grele cad pe pămînt cu acea forţă. Căci lungimea pendulului, ce bate secunda la latitudinea Parisului, este de trei picioare pariziene şi $8\frac{1}{2}$ linii după cum a observat H u y g e n s. Şi înălţimea, pe care o descrie un corp greu căzînd în timpul unei secunde, este către jumătatea lungimii acestui pendul în raportul pătratului circumferinţei cercului către diametrul ei (după cum a arătat şi H u y g e n s) şi deci este de 15 picioare pariziene, 1 deget, $1\frac{7}{9}$ linii. Şi de aceea forţa cu care este reţinută Luna pe orbita sa, dacă ar cădea la suprafaţa Pămîntului, devine egală cu forţa gravităţii de la noi, şi deci (potrivit regulii I şi II) este însăşi forţa pe care noi obişnuim să o numim gravitate. Căci dacă gravitatea ar fi diferită de ea, corpurile tinzînd spre Pămînt sub influenţa ambelor corpuri unite ar cădea de două ori mai repede şi căzînd timp de o secundă ar descrie $30\frac{1}{6}$ picioare pariziene: cu totul împotriva experienţei.

Acest calcul se bazează pe ipoteza că Pămîntul este în repaus. Căci dacă Pămîntul şi Luna s-ar mişca în jurul Soarelui, şi în acelaşi timp s-ar roti în jurul centrului comun de greutate; menţinînd legea gravităţii, distanţa reciprocă a centrelor Lunii şi a Pămîntului va fi de aproape $60\frac{1}{2}$ semidiametre terestre; după cum se poate afla făcînd calculul. Iar calculul se poate efectua potrivit propoziţiei LX, Cartea I.

SCOLIE

Demonstraţia acestei propoziţii se poate face mai pe larg astfel. Dacă în jurul Pămîntului s-ar învîrti mai multe Luni, după cum se întîmplă în sistemul lui Saturn sau Jupiter: timpurile lor periodice (prin argumentul inductiv) ar observa legea planetelor descoperită de K e p l e r, şi de aceea forţele lor centripete ar fi în raport invers cu pătratele distanţelor de la centrul Pămîntului, potrivit propoziţiei I a acestei Cărţi. Şi dacă cea mai de jos dintre ele ar fi mică, şi aproape ar atinge vîrfurile munţilor celor mai înalţi: forţa centripetă prin care ar fi reţinută pe orbită, ar fi aproape egală cu greutatea corpurilor situate pe vîrfurile acelor munţi (potrivit calculului

precedent), și ar face ca aceeași lunișoară, dacă ar fi lipsită de toată mișcarea cu care descrie orbita sa, din cauza lipsei forței centrifuge care o reținea pe orbită, să cadă pe Pămînt, și anume cu aceeași viteză cu care corpurile grele cad din vîrfurile acelor munți, din cauza egalității forțelor de cădere. Și dacă forța cu care lunișoara foarte mică coboară ar fi deosebită de gravitate, și lunișoara de asemenea ar fi grea pe Pămînt la fel cu corpurile de pe vîrfurile munților: lunișoara din cauza ambelor forțe unite ar cădea de două ori mai repede. De aceea cum ambele forțe, și acestea ale corpurilor grele, și acelea ale lunilor, tind spre centrul Pămîntului, și sînt asemenea și egale între ele, ele (potrivit regulii I și II) vor avea aceeași cauză. Și de aceea forța, cu care Luna este reținută pe orbita sa, va fi aceeași pe care noi obișnuim să o numim gravitate: și aceasta îndeosebi ca nu cumva lunișoara în vîrful muntelui să fie lipsită de greutate, sau să cadă de două ori mai repede decît obișnuiesc să cadă corpurile grele.

PROPOZIȚIA V. TEOREMA V

Planetele din jurul lui Jupiter gravitează spre Jupiter, cele din jurul lui Saturn spre Saturn și cele din jurul Soarelui spre Soare, și prin forța gravității lor sînt abătute totdeauna de la mișcările rectilinii, și reținute pe orbite curbilinii.

Căci revoluțiile planetelor din jurul lui Jupiter în jurul lui Jupiter, a celor din jurul lui Saturn în jurul lui Saturn, și ale lui Mercur și Venus precum și ale celorlalte din jurul Soarelui în jurul Soarelui sînt fenomene de același gen cu revoluția Lunii în jurul Pămîntului; și de aceea (potrivit regulii III) depind de cauze de același gen: mai ales fiindcă s-a demonstrat că forțele, de care depind acele revoluții, sînt îndreptate spre centrul lui Jupiter, al lui Saturn și al Soarelui, și îndepărtîndu-se de Jupiter, Saturn și Soare descresc în același raport și lege cu care descrește forța gravității dacă ne îndepărtăm de Pămînt.

COROLARUL 1. Gravitatea există așadar în toate planetele. Căci nimeni nu se îndoiește că Venus, Mercur și celelalte sînt corpuri de același gen cu Jupiter și Saturn. Și cum orice atracție potrivit legii a treia a mișcării este mutuală, Jupiter gravitează spre toți sateliții săi, Saturn spre ai săi, și Pămîntul spre Lună, și Soarele spre toate planetele primare.

COROLARUL 2. Gravitatea, care tinde spre fiecare planetă, este în raport invers cu pătratul distanței locurilor de la centrul ei.

COROLARUL 3. Toate planetele sînt grele una față de alta, potrivit corolarului 1 și 2. Și deci Jupiter și Saturn atrăgîndu-se reciproc în apropierea conjuncțiunii, își perturbă în mod sensibil mișcările, Soarele perturbă mișcările Lunii, Soarele și Luna perturbă marea noastră, după cum se explică în cele ce urmează.

SCOLIE

Pînă acum am numit centripetă forța prin care corpurile cerești sînt reținute pe orbitele lor. Dar constatăm că ea este aceeași cu gravitatea, și de aceea de acum înainte o vom numi gravitate. Căci cauza forței centripete, prin care Luna este reținută pe orbită, trebuie extinsă la toate planetele potrivit regulii I, II și IV.

PROPOZIŢIA VI TEOREMA VI

Toate corpurile gravitează spre diversele planete şi greutăţile lor pe aceeaşi planetă oarecare, la distanţe egale de centrul planetei, sînt proporţionale cu cantitatea de materie a fiecăruia.

Că toate corpurile grele cad spre Pămînt (cel puţin înlăturînd întîrzierea neegală provenită din rezistenţa slabă a aerului) în timpuri egale, s-a observat de mult de către alţii; şi că egalitatea timpurilor se poate constata foarte precis cu pendulele. Am făcut experienţa cu aur, argint, plumb, sticlă, nisip, sare comună, lemn, apă, grîu. Am folosit două cutii de lemn rotunde şi egale. Pe una am umplut-o cu lemn, şi aceeaşi greutate de aur am atîrnat-o (cît se poate de exact) în centrul de oscilaţie al celeilalte. Cutiile atîrnate de fire egale de 11 picioare, formau pendule cu totul egale, în ceea ce priveşte greutatea, forma şi rezistenţa aerului: şi situate una lîngă alta mergeau şi se întorceau împreună cu oscilaţii egale timp foarte îndelungat. Prin urmare cantitatea de materie în aur (potrivit corolarului 1 şi 6, propoziţia XXIV, Cartea a II-a) era către cantitatea de materie în lemn, precum acţiunea forţei motoare asupra aurului întreg către acţiunea aceleiaşi asupra lemnului întreg: adică, precum greutatea către greutate. Şi tot aşa pentru celelalte. În corpurile de aceeaşi greutate s-a putut observa în mod manifest o diferenţă de materie, chiar dacă ea ar fi fost mai mică decît a mia parte a întregii materii. Dar nu este nici o îndoială că natura gravităţii către planete este aceeaşi ca şi către Pămînt. Căci să ne închipuim că s-au ridicat corpurile terestre pînă la orbita Lunii, şi că s-au lăsat libere împreună cu Luna lipsite de orice mişcare, ca să cadă deodată la Pămînt; şi prin cele arătate deja mai sus este sigur că în timpuri egale vor descrie spaţii egale împreună cu Luna, şi deci că sînt către cantitatea materiei din Lună, precum gravităţile lor către gravitatea ei. Apoi deoarece sateliţii lui Jupiter se rotesc în timpuri care sînt în raportul puterii 3/2 a distanţelor de la centrul lui Jupiter, gravităţile lor acceleratoare spre Jupiter vor fi în raport invers cu pătratele distanţelor de la centrul lui Jupiter; şi de aceea la distanţe egale de la Jupiter, gravităţile lor acceleratoare vor fi egale. De aceea căzînd în timpuri egale de la înălţimi egale, vor descrie spaţii egale; la fel cum fac corpurile grele pe Pămîntul nostru. Şi din aceeaşi cauză planetele din jurul Soarelui, lăsate libere de la distanţe egale de la Soare, în căderea lor spre Soare vor descrie în timpuri egale spaţii egale. Iar forţele, cu care corpurile neegale se accelerează în mod egal, sînt precum corpurile; adică, greutăţile precum cantităţile de materie în planete. Apoi că gravitatea lui Jupiter şi a sateliţilor săi spre Soare sînt proporţionale cu cantităţile lor de materie este evident din mişcarea foarte regulată a sateliţilor; potrivit corolarului 3, propoziţia LXV, Cartea I. Căci dacă unii din aceştia ar fi atraşi mai tare spre Soare, în raport cu cantitatea lor de materie, decît ceilalţi: mişcările sateliţilor (potrivit corolarului 2, propoziţia LXV, Cartea I) ar fi perturbate din cauza neegalităţii atracţiei. Dacă, la distanţe egale de Soare, un satelit oarecare ar fi mai greu spre Soare în proporţie cu cantitatea sa de materie, decît Jupiter în raport cu cantitatea sa de materie, după un raport oarecare dat, anume d către e: distanţa dintre centrul Soarelui şi centrul orbitei satelitului, va fi totdeauna mai mare decît distanţa dintre centrul Soarelui şi centrul lui Jupiter aproape în raportul

rădăcinii pătrate; după cum am găsit printr-un calcul făcut odinioară. Şi dacă satelitul ar fi mai uşor spre Soare în raportul lui *d* către *e*, distanţa centrului orbitei satelitului de Soare va fi mai mică decît distanţa centrului lui Jupiter de Soare în raportul rădăcinii pătrate. Şi de aceea dacă la distanţe egale de Soare, gravitatea acceleratoare a unui satelit oarecare spre Soare ar fi mai mare sau mai mică decît gravitatea acceleratoare a lui Jupiter spre Soare, numai cu $\frac{1}{1000}$ din întreaga gravitate; distanţa centrului orbitei satelitului de la Soare va fi mai mare sau mai mică decît distanţa lui Jupiter de la Soare cu $\frac{1}{2000}$ părţi a distanţei întregului, adică, cu a cincia parte a distanţei satelitului extrem de la centrul lui Jupiter: excentricitatea orbitei care va fi foarte sensibilă. Dar orbitele sateliţilor sînt concentrice cu Jupiter, şi de aceea gravităţile acceleratoare ale lui Jupiter şi ale sateliţilor spre Soare sînt egale între ele. Şi din aceeaşi cauză greutatea lui Saturn şi a sateliţilor săi faţă de Soare, la distanţe egale de Soare, sînt precum cantităţile de materie din ele: şi greutăţile Lunii şi Pămîntului spre Soare sînt sau nule sau exact proporţionale cu masele lor. Dar potrivit corolarului 1 şi 3, propoziţia V, ele au oarecare greutate.

Mai departe greutăţile diverselor părţi ale unei planete oarecare faţă de o alta sînt între ele precum materia în acele părţi. Căci dacă unele părţi ar gravita mai mult, altele mai puţin, decît în proporţia cantităţilor de materie; planeta întreagă, după felul părţilor în care abundă mai mult, ar gravita mai mult sau mai puţin decît în proporţia cantităţii de materie a întregului. Dar nu are importanţă dacă acele părţi sînt externe sau interne. Căci dacă de exemplu ne închipuim că corpurile terestre, care sînt la noi, se ridică la orbita Lunii, şi se compară cu corpul Lunii: dacă greutăţile lor sînt către greutăţile părţilor externe ale Lunii precum cantităţile de materie din ele, iar către greutăţile părţilor interne după un raport mai mare sau mai mic, ele vor fi către greutatea întregii Luni după un raport mai mare sau mai mic: împotriva celor demonstrate mai sus.

COROLARUL 1. De aceea greutăţile corpurilor nu depind de forma şi structura lor. Căci dacă pot varia cu formele, vor fi mai mari sau mai mici, după varietatea formelor, în materie egală: cu totul împotriva experienţei.

COROLARUL 2. Toate corpurile, care sînt în jurul Pămîntului, sînt grele faţă de Pămînt; şi greutăţile tuturor, care sînt la distanţă egală de centrul Pămîntului, sînt precum cantităţile de materie în ele. Aceasta este calitatea tuturora cu care s-au putut face experienţe, şi de aceea potrivit regulii III trebuie afirmat despre toate. Dacă eterul sau un alt corp oarecare ar fi cu totul lipsit de gravitate, sau ar gravita în raport mai mic decît cantitatea materiei sale: deoarece el (după Aristotel, Descartes şi alţii) nu diferă de alte corpuri decît prin forma materiei, el s-ar putea transforma prin schimbarea formei în mod treptat într-un corp de aceeaşi condiţie cu acelea, care gravitează mai mult decît în raportul cantităţii de materie, şi la rîndul lor corpurile mai grele luînd treptat forma aceluia, ar putea să-şi piardă treptat gravitatea. Şi deci greutăţile ar depinde de forma corpurilor, şi ar putea varia cu formele, împotriva celor demonstrate în corolarul de mai sus.

COROLARUL 3. Nu toate spaţiile sînt pline în mod egal. Căci dacă toate spaţiile ar fi pline în mod egal, greutatea specifică a fluidului care umple

regiunea aerului, din cauza extremei densităţi a materiei, nu ar ceda greutăţii specifice a mercurului, sau a aurului, sau a altui corp oarecare foarte dens; şi de aceea nici aurul şi nici un alt corp oarecare n-ar putea cădea în aer. Căci corpurile nu cad în fluide, decît dacă sînt specific mai grele. Căci dacă cantitatea de materie într-un spaţiu oarecare se poate micşora printr-o rarefiere oarecare, pentru ce nu s-ar putea micşora la infinit?

COROLARUL 4. Dacă toate particulele solide ale tuturor corpurilor ar avea aceeaşi densitate, şi nici nu pot fi rarefiate fără pori, trebuie să existe un vid. Zic că au aceeaşi densitate acelea, ale căror forţe de inerţie sînt precum mărimile.

COROLARUL 5. Forţa gravităţii este de natură diferită de a forţei magnetice. Căci atracţia magnetică nu este precum materia atrasă. Unele corpuri sînt atrase mai mult, altele mai puţin, cele mai multe nu sînt atrase. Şi forţa magnetică în unul şi acelaşi corp se poate mări şi micşora, şi, uneori este cu mult mai mare proporţional cu cantitatea de materie decît forţa gravitaţională, şi cu depărtarea de la magnet scade nu cu pătratul distanţei, ci aproape cu cubul ei, după cum am putut observa din unele experienţe grosolane.

PROPOZIŢIA VII. TEOREMA VII

Gravitatea există în toate corpurile, şi este proporţională cu cantitatea de materie din fiecare.

Am demonstrat mai sus că toate planetele sînt grele între ele, precum şi că gravitatea în fiecare din ele considerate separat este în raport invers cu pătratul distanţei locurilor de la centrul planetei. Şi de aici urmează (potrivit propoziţiei LXIX, Cartea I şi corolarelor ei) că gravitatea în toate este proporţională cu materia din ele.

Apoi cum toate părţile unei planete oarecare *A* sînt grele faţă de oricare planetă *B*, şi gravitatea oricărei părţi este către gravitatea întregei, precum materia părţii către materia întregei, şi cu orice acţiune este egală (potrivit legii a treia) reacţiunea; planeta *B* la rîndul său va gravita spre toate părţile planetei *A*, şi gravitatea sa faţă de fiecare parte va fi către gravitatea sa întreagă, precum materia părţii către materia întregului. Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare gravitatea se naşte şi se compune faţă de întreaga planetă din gravitatea faţă de diversele părţi. Exemple de acest fel avem în atracţiile magnetice şi electrice. Căci orice atracţie faţă de întreg provine din atracţiile faţă de diversele părţi. Acest lucru se înţelege în gravitate, închipuindu-ne că mai multe planete mai mici se unesc într-o sferă şi formează o planetă mai mare. Căci forţa întregului ar trebui să provină din forţele părţilor componente. Dacă cineva obiectează că toate corpurile, care sînt la noi, conform acestei legi ar trebui să graviteze unul spre altul şi totuşi o gravitate de acest fel nu se simte nicăieri; răspund că această gravitate, deoarece este către greutatea faţă de întreg Pămîntul precum sînt aceste corpuri către întreg Pămîntul, este cu mult prea mică pentru a putea fi simţită.

COROLARUL 2. Gravitaţia din diversele particule egale este în raport invers cu pătratul distanţei locurilor de la particule. Rezultă aceasta din corolarul 3, propoziţia LXXIV, Cartea I.

PROPOZIŢIA VIII TEOREMA VIII

Dacă materia a două sfere care gravitează una spre alta în toate regiunile, care sînt la distanţe egale de centre este omogenă, greutatea uneia dintre sfere faţă de cealaltă va fi în raport invers cu pătratul distanţei dintre centre.

După ce am aflat că gravitatea faţă de planeta întreagă provine şi se compune din gravitäţile spre părţi; şi că în diversele părţi ea este invers proporţională cu pătratele distanţelor de la părţi: mă îndoiam dacă raportul invers al pătratelor se obţine precis faţă de forţa întreagă compusă din mai multe forţe, sau numai aproximativ. Căci s-ar putea întîmpla ca proporţia, care la distanţe mai mari se poate obţine destul de precis, lîngă suprafaţa planetei din cauza neegalităţii distanţelor particulelor şi situaţiei neasemănătoare, să difere în mod apreciabil. Totuşi, în sfîrşit, potrivit propoziţiilor LXXV şi LXXVI, Cartea I şi corolarelor lor, am înţeles adevărul propoziţiei de care este vorba aici.

COROLARUL 1. De aici se pot afla şi compara între ele greutăţile corpurilor faţă de diversele planete. Căci greutăţile corpurilor egale ce se rotesc pe cercuri în jurul planetelor sînt (potrivit corolarului 2, propoziţia IV, Cartea I) precum diametrele cercurilor şi în raport invers cu pătratele timpurilor periodice; şi greutăţile la suprafeţele planetelor, sau la oricare alte distanţe de centru, sînt mai mari sau mai mici (potrivit acestei propoziţii) în raport invers cu pătratul distanţelor. Astfel din timpurile periodice ale lui Venus în jurul Soarelui de 224 zile şi $16\frac{3}{4}$ ore, ale satelitului exterior din jurul lui Jupiter de 16 zile şi $16\frac{8}{15}$ ore, ale satelitului lui Huygens din jurul lui Saturn de 15 zile şi $22\frac{2}{3}$ ore, şi ale Lunii în jurul Pămîntului de 27 zile, 7 ore şi 43 minute, comparate cu distanţa mijlocie a lui Venus de Soare şi cu elongaţia maximă heliocentrică a satelitului exterior din jurul lui Jupiter de la centrul lui Jupiter, 8′ 16″, a satelitului lui Huygens de la centrul lui Saturn, 3′ 4″ şi a Lunii de la centrul Pămîntului, 10′ 33″ făcînd calculul am aflat că greutăţile corpurilor egale la distanţe egale de centrul Soarelui, al lui Jupiter, al lui Saturn şi al Pămîntului sînt faţă de Soare, Jupiter, Saturn şi Pămînt respectiv precum $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}$ şi $\frac{1}{169282}$; şi mărind sau micşorînd distanţele, greutăţile se micşorează sau se măresc în raportul pătratului: greutăţile corpurilor egale spre Soare, Jupiter, Saturn şi Pămînt la distanţele de 10000, 997, 791 şi 109 de centrele lor, şi deci faţă de suprafeţele lor vor fi respectiv precum 10000, 943, 529, şi 435. Cît de mari sînt greutăţile corpurilor la suprafaţa Lunii se va spune în cele ce urmează.

COROLARUL 2. Se cunoaşte de asemenea cantitatea de materie în diversele planete. Căci cantităţile de materie în planete sînt precum forţele lor la distanţe egale de centrele lor, adică, în Soare, Jupiter, Saturn şi Pămînt sînt respectiv precum $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}$ şi $\frac{1}{169282}$. Dacă paralaxa Soarelui se ia mai mare sau mai mică decît 10″ 30‴ cantitatea de materie în Pămînt va trebui mărită sau micşorată în raportul cubului.

COROLARUL 3. Se cunosc şi densităţile planetelor. Căci greutăţile corpurilor egale şi omogene spre sfere omogene sînt la suprafeţele sferelor precum

diametrele sferelor, potrivit propoziţiei LXXII, Cartea I şi deci densităţile sferelor eterogene sînt precum greutăţile aplicate la diametrele sferelor. Dar diametrele adevărate al Soarelui, al lui Jupiter, ale lui Saturn şi al Pămîntului sînt între ele precum 10000, 997, 791 şi 109, şi greutăţile faţă de acestea respectiv precum 10000, 943, 529 şi 435, şi de aceea densităţile sînt precum 100, $94\frac{1}{2}$, 67 şi 400. Densitatea Pămîntului care provine din aceste calcule, nu depinde de paralaxa Soarelui ci se determină prin paralaxa Lunii, şi de aceea aici se defineşte corect. Aşadar, Soarele este cu puţin mai dens decît Jupiter, şi Jupiter decît Saturn, şi Pămîntul de patru ori mai dens decît Sorele. Căci din cauza căldurii sale foarte mari Soarele se rarefiază. Dar Luna este mai densă decît Pămîntul, după cum se va arăta în cele ce urmează.

COROLARUL 4. Prin urmare în condiţii egale, planetele care sînt mai mici sînt mai dense. Căci astfel forţa gravităţii pe suprafeţele lor se apropie mai mult de egalitate. Pe de altă parte, în condiţii egale, planetele care sînt mai aproape de Soare sînt mai dense; astfel Jupiter decît Saturn, şi Pămîntul decît Jupiter. Planetele trebuiau aşezate la distanţe diferite de Soare ca fiecare să se poată bucura de căldura mai mare sau mai mică a Soarelui după gradul de densitate. Apa noastră, dacă Pămîntul ar fi situat pe orbita lui Saturn ar îngheţa, dacă ar fi pe orbita lui Mercur imediat s-ar transforma în vapori. Căci lumina Soarelui cu care căldura este proporţională, este de şapte ori mai densă pe orbita lui Mercur decît la noi şi cu ajutorul termometrului am aflat că la căldura de şapte ori mai mare decît a Soarelui de vară apa fierbe. De fapt nu încape îndoială că materia lui Mercur se acomodează la căldură, şi de aceea este mai densă decît a noastră; fiindcă orice materie mai densă supunîndu-se la operaţiile naturale pretinde o căldură mai mare.

PROPOZIŢIA IX. TEOREMA IX

Gravitatea progresînd de la suprafeţele planetelor în jos descreşte aproximativ în raportul distanţelor de la centru.

Dacă materia planetei în ce priveşte densitatea ar fi uniformă, s-ar obţine această propoziţie precis: potrivit propoziţiei LXXIII, Cartea I. Deci eroarea este atît de mare, cîtă poate proveni din inegalitatea densităţii.

PROPOZIŢIA X. TEOREMA X

Mişcarea planetelor în ceruri se poate păstra timp foarte îndelungat.

În scolia propoziţiei XL, Cartea a II-a, s-a arătat că o sferă de apă îngheţată, mişcîndu-se liber în aerul nostru şi descriind lungimea semidiametrului său, ar pierde din cauza rezistenţei aerului $\frac{1}{4586}$ din mişcarea sa. Dar se obţine aproximativ aceeaşi proporţie în sfere oricît de mari şi de repezi. Iar că sfera Pămîntului nostru este mai densă, decît dacă întreagă ar consta din apă, o deduc astfel. Dacă această sferă ar fi întreagă de apă, cele care ar fi mai rare decît apa, din cauza greutăţii specifice mai mici ar ieşi la suprafaţă şi ar înota deasupra. Din aceeaşi cauză sfera pămîntească

acoperită pretutindenea cu ape, dacă ar fi mai rară decît apa, ar ieși undeva la suprafață si toată apa scurgîndu-se de acolo s-ar aduna în regiunea opusă. Și la fel este situația Pămîntului nostru înconjurat în mare parte de mări. Acesta dacă nu ar fi mai dens, ar ieși din mări, și cu o parte a sa după gradul său de ușurătate ar ieși din apă, toate mările adunîndu-se în regiunea opusă. Din aceeași cauză petele solare sînt mai ușoare decît materia lucidă solară deasupra căreia înoată. Și în oricare formare a planetelor, toată materia mai grea din apă, în timp ce masa era fluidă, tindea spre centru. De unde cum Pămîntul obișnuit de la suprafață este aproape de două ori mai greu ca apa, și cu puțin mai jos în mine se află că este aproape de trei, patru, ba chiar de cinci ori mai greu: este verosimil că întreaga materie din pămînt este aproape de cinci sau șase ori mai mare decît dacă tot Pămîntul ar consta din apă; mai ales că mai sus s-a arătat că Pămîntul este de patru ori mai dens decît Jupiter. De aceea dacă Jupiter este cu ceva mai dens decît apa, acesta în timp de treizeci de zile, în care descrie lungimea 459 a semidiametrelor sale, ar pierde într-un mediu de aceeași densitate cu aerul nostru aproape a zecea parte din mișcarea sa. Dar cum rezistența mediilor scade în raportul greutății și densității, astfel că apa care este de $13\frac{3}{5}$ mai ușoară ca mercurul, rezistă mai puțin în același raport; și aerul care este de 860 de ori mai ușor ca apa, rezistă mai puțin în același raport: dacă ne urcăm în ceruri unde greutatea mediului, în care se mișcă planetele, se micșorează imens de mult, rezistența aproape va dispare. Am arătat în scolia de la propoziția XXII, Cartea a II-a că dacă ne-am urca la înălțimea de două sute de mile deasupra Pămîntului, acolo aerul ar fi mai rar decît la suprafața Pămîntului în raportul de 30 la 0,0000000000003998 sau aproximativ 75 000 000 000 000 la 1. Și deci steaua lui Jupiter, învîrtindu-se într-un mediu de aceeași densitate cu aerul de sus timp de 1 000 000 ani, din cauza rezistenței sale, nu ar pierde a milioana parte din mișcarea sa. Căci în spațiile apropiate de Pămînt, nu se află nimic pentru a crea o rezistență afară de exalațiile aerului și de vapori. Scoțînd acestea dintr-o sticlă goală cilindrică cu foarte mare grijă corpurile grele din interiorul sticlei cad foarte liber și fără nici o rezistență sensibilă; însuși aurul și un fulg foarte ușor lăsate de o dată cad cu o viteză egală și în căderea lor descriind o înălțime de patru, șase sau opt picioare cad deodată la fund, după cum s-a aflat prin experiență. Și de aceea dacă ne urcăm în cerurile vide de aer și de exalații, planetele și cometele se vor mișca fără nici o rezistență sensibilă prin acele spații timp foarte îndelungat.

IPOTEZA I

Centrul sistemului lumii este în repaus.

Aceasta a fost admisă de toți, în timp ce unii afirmă că în centrul sistemului este în repaus Pămîntul, alții că este Soarele. Să vedem ce rezultă de aici.

PROPOZIȚIA XI. TEOREMA XI

Centrul comun de greutate al Pămîntului, Soarelui și tuturor planetelor este în repaus.

Căci acel centru (potrivit corolarului IV al legilor) sau este în repaus sau progresează uniform în direcţie. Dar acel centru progresînd totdeauna centrul lumii de asemenea se va mişca, contrar ipotezei.

PROPOZIŢIA XII. TEOREMA XII

Soarele este agitat de o mişcare perpetuă, dar niciodată nu se îndepărtează mult de centrul comun de greutate al tuturor planetelor.

Căci cum (potrivit corolarului 2, propoziţia VIII) materia din Soare este către materia din Jupiter precum 1067 către 1, şi distanţa lui Jupiter de la Soare este către semidiametrul Soarelui într-un raport cu puţin mai mare; centrul comun de greutate al lui Jupiter şi al Soarelui va cădea într-un punct cu puţin deasupra suprafeţei Soarelui. Din aceeaşi cauză cum materia din Soare este către materia din Saturn precum 3021 către 1, şi distanţa lui Saturn de Soare este către semidiametrul Soarelui într-un raport cu ceva mai mic: centrul comun de greutate al lui Saturn şi al Soarelui va cădea într-un punct cu ceva dedesuptul suprafeţei Soarelui. Şi făcînd acelaşi calcul dacă Pămîntul şi toate planetele ar consta dintr-o parte a Soarelui, centrul comun de greutate al tuturora abia ar fi la distanţa de un diametru întreg de centrul Soarelui. În alte cazuri distanţa centrelor totdeauna este mai mică. Şi de aceea cum centrul de greutate este în repaus perpetuu, Soarele din cauza poziţiei variate a planetelor se va mişca în toate părţile dar niciodată nu se va îndepărta mult de acel centru.

COROLAR. De aceea centrul comun de greutate al Pămîntului, al Soarelui şi al tuturor planetelor trebuie luat ca centru al lumii. Căci cum Pămîntul, Soarele şi toate planetele gravitează una spre alta, şi de aceea prin forţa greutăţii lor, se agită necontenit, conform legilor mişcării: este evident că centrele lor mobile nu pot fi luate ca centru în repaus al lumii. Dacă ar trebui pus acel corp în centru spre care gravitează mai mult toate corpurile (după cum este opinia comună) acel privilegiu trebuie atribuit Soarelui. Dar cum Soarele se mişcă, trebuie ales punctul în repaus, de care centrul Soarelui se îndepărtează foarte puţin, şi de care acesta s-ar îndepărta şi mai puţin, dacă Soarele ar fi mai dens şi mai mare, ca să se mişte mai puţin.

PROPOZIŢIA XIII. TEOREMA XIII

Planetele se mişcă pe elipse avînd un focar în centrul Soarelui, şi cu razele duse la acel centru descriu arii proporţionale cu timpurile.

Am vorbit mai sus despre aceste mişcări din fenomene. Cunoscînd acum principiile mişcărilor, din ele am dedus *a priori* mişcările cereşti. Deoarece greutăţile planetelor faţă de Soare sînt în raport invers cu pătratele distanţelor de la centrul Soarelui; dacă Soarele ar fi în repaus şi celelalte planete nu ar acţiona una asupra alteia, orbitele lor ar fi eliptice avînd Soarele în focarul comun şi ariile s-ar descrie în timpuri proporţionale (potrivit propoziţiilor I şi XI şi corolarului I, propoziţia XIII, Cartea I). Dar acţiunile planetelor între ele sînt foarte mici (încît pot fi neglijate) şi perturbă mai puţin mişcările planetelor pe elipse în jurul Soarelui mobil (potrivit propoziţiei

LXVI, Cartea I) decît dacă aceste mişcări ar fi efectuate în jurul Soarelui în repaus.

E adevărat că acţiunea lui Jupiter asupra lui Saturn nu este de loc neglijabilă. Căci gravitatea pe Jupiter este către gravitatea pe Soare (la distanţe egale) precum 1 la 1067; şi deci în conjuncţiunea lui Jupiter şi Saturn, deoarece distanţa lui Saturn la Jupiter este către distanţa lui Saturn la Soare precum 4 către 9, gravitatea lui Saturn faţă de Jupiter va fi către gravitatea lui Saturn faţă de Soare precum 81 către 16×1067 sau aproape 1 către 211. Şi de aici provine perturbaţia orbitei lui Saturn în diversele conjuncţiuni ale acestei planete cu Jupiter, atît de sensibilă încît astronomii au observat-o. Din cauza situaţiei variate a planetei în aceste conjuncţiuni, excentricitatea ei cînd creşte, cînd scade, afeliul este dus cînd înainte cînd înapoi, şi mişcarea mijlocie este pe rînd accelerată şi întîrziată. Totuşi toată eroarea în mişcarea lui în jurul Soarelui ce trebuie să provină de la o forţă atît de mare (afară de mişcarea medie) poate fi aproape evitată punînd focarul de jos al orbitei sale în centrul comun de greutate al lui Jupiter şi al Soarelui (potrivit propoziţiei LXVII, Cartea I) şi de aceea cînd este mai mare, abia trece de două minute. Şi eroarea maximă în mişcarea medie abia întrece două minute pe an. Dar în conjuncţiunea lui Jupiter şi Saturn gravităţile acceleratoare ale Soarelui faţă de Saturn, ale lui Jupiter faţă de Saturn şi ale lui Jupiter faţă de Soare sînt aproape ca 16,81 şi $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ sau 156 609, şi deci diferenţa gravităţilor Soarelui spre Saturn şi a lui Jupiter spre Saturn este către gravitatea lui Jupiter spre Soare precum 65 către 156 609 sau 1 la 2409. Dar cu această diferenţă este proporţională capacitatea maximă a lui Saturn de a perturba mişcarea lui Jupiter, şi de aceea perturbarea orbitei lui Jupiter este cu mult mai mică decît aceea a lui Saturn. Perturbaţiile celorlalte orbite sînt cu mult mai mici cu excepţia că orbita Pămîntului este în mod sensibil perturbată de Lună. Centrul comun de greutate al Pămîntului şi al Lunii parcurge o elipsă în jurul Soarelui situat în focar şi cu raza dusă la Soare descrie arii proporţionale cu timpurile, iar Pămîntul se învîrteşte în jurul acestui centru comun cu o mişcare lunară.

PROPOZIŢIA XIV. TEOREMA XIV

Afeliile şi nodurile orbitelor sînt în repaus.

Afeliile sînt în repaus, potrivit propoziţiei XI, Cartea I precum şi planele orbitelor; şi potrivit propoziţiei I a aceleiaşi Cărţi fiind în repaus planele sînt în repaus şi nodurile. Totuşi din cauza acţiunilor între ele a planetelor în rotaţie şi a cometelor se nasc oarecare inegalităţi, dar care fiind mici se pot neglija aici.

COROLARUL 1. Sînt în repaus şi stelele fixe, deoarece păstrează poziţii date faţă de afelii şi noduri.

COROLARUL 2. Şi de aceea cum ele nu au paralaxă sensibilă născută din mişcarea anuală a Pămîntului, forţele lor din cauza distanţei imense a corpurilor nu produc nici un efect sensibil în regiunea sistemului nostru. Mai mult încă, stelele fixe împrăştiate în toate părţile cerului în mod egal prin atracţii contrare distrug forţele mutuale, potrivit propoziţiei LXX, Cartea I.

SCOLIE

Cum planetele mai apropiate de Soare (anume Mercur, Venus, Pămîntul și Marte) din cauza micimii corpurilor acționează puțin unul asupra altuia: afeliile și nodurile acestora sînt în repaus, dacă nu cumva sînt perturbate de forțele lui Jupiter, Saturn și ale corpurilor superioare. Și de aici se poate deduce prin teoria gravității, că afeliile lor se mișcă întrucîtva înainte față de stelele fixe, și aceasta în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a distanțelor acestor planete de la Soare. Astfel dacă afeliul lui Marte într-o sută de ani face 33′20″ progresiv față de stelele fixe; afeliile Pămîntului, ale lui Venus, și ale lui Mercur într-o sută de ani vor progresa respectiv 17′ 40″, 10′53″, și 4′ 16″. Și aceste mișcări, fiind mici, se neglijează în această propoziție.

PROPOZIȚIA XV. PROBLEMA I

Să aflăm diametrele principale ale orbitelor.

Acestea trebuie luate în raportul puterii $\frac{2}{3}$ a timpurilor periodice, potrivit propoziției XV, Cartea I apoi fiecare mărit în raportul sumei maselor Soarelui și a fiecărei planete se învîrtesc către prima din cele două medii proporționale între acea sumă și Soare, potrivit propoziției LX, Cartea I.

PROPOZIȚIA XVI PROBLEMA II

Să aflăm excentricitățile și afeliile orbitelor.

Problema se rezolvă prin propoziția XVIII, Cartea I.

PROPOZIȚIA XVII. TEOREMA XV

Mișcările diurne ale planetelor sînt uniforme, și vibrația Lunii provine din mișcarea ei diurnă.

Propoziția se demonstrează prin legea I a mișcării și corolarului 22, propoziția LXVI, Cartea I. Jupiter față de stelele fixe se rotește în 9 ore, 56 minute, Marte în 24 ore, 39 minute, Venus în circa 23 ore, Pămîntul în 23 ore, 56 minute, Soarele în $25\frac{1}{2}$ zile și luna în 27 zile, 7 ore și 43 minute. Aceasta se vede din fenomene. Petele din corpul Soarelui se întorc în aceeași poziție pe Sdiscul oarelui în circa $27\frac{1}{2}$ zile, față de Pămînt; și deci față de stelele fixe Soarele se învîrtește în circa $25\frac{1}{2}$ zile. Dar fiindcă ziua Lunii ce se învîrtește în mod uniform în jurul axei sale este de o lună: aceeași față a acesteia totdeauna va privi aproximativ spre focarul mai îndepărtat al orbitei sale, și de aceea din cauza situației acelui focar va devia încoace și încolo de la Pămînt. Aceasta este librația Lunii în longitudine: căci librația în latitudine s-a născut din latitudinea Lunii și înclinarea axei ei față de planul eclipticei. Această teorie a librației lunare a expus-o mai pe larg în baza scrisorilor mele d-l N. Mercator în Astronomia sa editată la începutul anului 1676. Se pare că satelitul extrem al lui Saturn se rotește în jurul axei sale cu o mișcare analogă, privind totdeauna pe Saturn cu aceeași față. Căci, învîrtindu-se în jurul lui Saturn, de cîte ori se apropie de partea

orientală a orbitei sale, abia se vede, și de multe ori nu se vede de loc: ceea ce se poate întîmpla din cauza unor pete în partea aceea a corpului care atunci este îndreptată spre Pămînt, după cum a observat C a s s i n i. Se pare de asemenea că satelitul extrem al lui Jupiter se rotește în jurul axei sale cu o mișcare analogă, fiindcă în partea corpului care este întoarsă de la Jupiter are o pată care se pare a fi în corpul lui Jupiter cînd sateliul trece între Jupiter și ochii noștri.

PROPOZIȚIA XVIII. TEOREMA XVI

Axele planetelor sînt mai mici decît diametrele duse normal pe acele axe.

Planetele lipsite de orice mișcare zilnică circulară ar trebui să ia o figură sferică, din cauza egalității gravității părților în toate direcțiile. Din cauza mișcării circulare părțile îndepărtate de axă tind să se ridice în jurul ecuatorului. Și deci dacă materia este fluidă prin urcarea sa la ecuator va mări diametrele iar prin coborîrea sa la poli va micșora axa. Astfel diametrul lui Jupiter (observațiile astronomilor fiind de acord) se constată că este mai scurt între poli decît de la răsărit la apus. Din aceeași cauză, dacă Pămîntul nostru nu ar fi cu ceva mai înalt la ecuator decît la poli, mările s-ar coborî la poli, și urcîndu-se la ecuator, ar inunda acolo toate.

PROPOZIȚIA XIX. PROBLEMA III

Să aflăm proporția axei planetei către diametrele ei perpendiculare.

Compatriotul nostru N o r w o o d măsurînd cam pe la 1635 o distanță de 905 751 picioare londoneze între *Londra* și *York* și observînd că diferența lungimilor este de 2° 28′; a aflat că măsura unui grad este de 367 196 picioare londoneze, adică de 57 300 stînjeni parizieni.

P i c a r d măsurînd un arc de un grad și 22′ 55″ pe meridianul dintre *Amiens* și *Malvoisine*, a aflat că arcul de un grad este de 57 060 stînjeni parizieni. C a s s i n i tatăl a măsurat distanța pe meridian de la orașul *Callioure* în *Roussillon* pînă la Observatorul din Paris; și fiul lui a adăugat distanța de la observator pînă la turnul orașului *Dunquerque.* Distanța întreagă era de 486 156 1/2 stînjeni și diferența de latitudine a orașului *Callioure* și a orașului *Dunquerque* era de 8°31′ $11\frac{5''}{6}$. De unde arcul de un grad dă 57 061 stînjeni parizieni. Și din aceste măsuri se obține circumferința Pămîntului de 123 249 600 picioare pariziene și semidiametrul lui de 19 615 800 picioare, în ipoteza că Pămîntul este sferic.

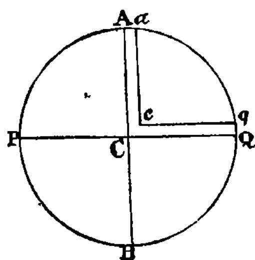
La latitudinea *Parisului* un corp greu căzînd timp de o secundă descrie 15 picioare pariziene, 1 deget, $1\frac{7}{9}$ linii ca mai sus, adică $2173\frac{7}{9}$ linii. Greutatea unui corp se micșorează prin greutatea aerului ambiant. Să presupunem că greutatea pierdută este a 11 000-a parte a întregii greutăți, și corpul greu căzînd în vid va descrie înălțimea de 2174 linii în timp de o secundă.

Un corp învîrtindu-se uniform pe un cerc la o distanță de 19 615 800 picioare de la centru, în diversele zile siderale de 23^h 56^m 4^s în timp de o

secundă va descrie un arc de 1433,46 picioare, al cărui sinus versus este de 0,0523656 picioare, sau de 7,54064 linii. Şi deci forţa cu care corpurile grele cad la latitudinea *Parisului*, este către forţa centrifugă a corpurilor la ecuator produsă din mişcarea diurnă a Pămîntului, precum 2174 către 7,54064.

Forţa centrifugă a corpurilor la ecuatorul Pămîntului este către forţa centrifugă, cu care corpurile tind direct a se îndepărta de Pămînt la latitudinea *Parisului* de 48° 50′ 10″, în raportul pătratului razei către sinusul complementului acelei latitudini, adică precum 7,54064 către 3,267. Să adunăm această forţă la forţa cu care corpurile grele cad la latitudinea *Parisului*, şi corpul căzînd la acea latitudine cu întreaga forţă a gravităţii, în timpul unei secunde va descrie 2177,267 linii, sau 15 picioare pariziene, 1 deget şi 5,267 linii. Şi forţa întreagă a gravităţii la acea latitudine va fi către forţa centrifugă a corpurilor la ecuatorul Pămîntului precum 2177,267 către 7,54064 sau 289 la 1.

De unde dacă *APBQ* reprezintă figura Pămîntului nu sferică ci născută de revoluţia elipsei în jurul axei mai mici *PQ*, şi fie *ACQqca* un canal plin cu apă mergînd de la polul *Qq* la centrul *Cc*, şi de aici la ecuatorul *Aa*: va trebui ca greutatea apei în braţul canalului *ACca*, să fie către greutatea apei în celălalt braţ *QCcq* precum 289 către 288, fiindcă forţa centrifugă născută din mişcarea circulară va susţine şi va scădea o parte din cele 289 părţi ale greutăţii şi greutatea 288 din celălalt braţ va susţine pe celelalte. Apoi (din corolarul 2 al propoziţiei XCI, Cartea I) făcînd calculul aflu că dacă Pămîntul ar fi format dintr-o materie uniformă, şi ar fi lipsit de orice mişcare, şi axa lui *PQ* ar fi către diametrul *AB* precum 100 către 101: gravitatea în locul *Q* pe Pămînt ar fi către gravitatea în acelaşi loc *Q* pe sfera descrisă din centrul *C* cu raza *PC* sau *QC*, precum 126 către 125. Prin acelaşi raţionament gravitatea în locul *A* pe sferoid, descris prin rotaţia elipsei *APBQ* în jurul axei *AB*, este către greutatea în acelaşi loc *A* pe sfera descrisă din centrul *C* cu raza *AC*, precum 125 către 126. Dar gravitatea în locul *A* pe Pămînt este media proporţională între gravităţile faţă de sferoidul amintit şi faţă de sferă: fiindcă sfera, micşorînd diametrul *PQ* în raportul 101 la 100, se transformă în figura Pămîntului; şi această figură micşorînd în acelaşi raport al treilea diametru, care este perpendicular pe cele două diametre *AB*, *PQ*, se transformă în sferoidul amintit; şi gravitatea în *A* în amîndouă cazurile, se micşorează aproximativ în acelaşi raport. Prin urmare gravitatea în *A* pe sfera descrisă din centrul *C* cu raza *AC*, este către gravitatea în *A* pe Pămînt precum 126 către $125\frac{1}{2}$, şi gravitatea în locul *Q* pe sfera descrisă din centrul *C* cu raza *QC*, este către gravitatea în locul *A* pe sfera descrisă din centrul *C* cu raza *AC*, în raportul diametrelor (potrivit propoziţiei LXXII, Cartea I) adică, precum 100 către 101. Să unim acum aceste trei rapoarte, 126 către 125, 126 către $125\frac{1}{2}$, şi 100 către 101: şi va fi gravitatea în locul *Q* pe Pămînt către gravitatea în locul *A* pe Pămînt, precum $126 \times 126 \times 100$ către $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, sau precum 501 către 500.



Acum fiindcă (potrivit corolarului 3, propoziţia XCI, Cartea I) gravitatea în fiecare braţ al canalului *ACca* sau *QCcq* este precum distanţa locurilor la centrul Pămîntului; dacă împărţim braţele prin suprafeţe transversale şi echidistante în părţi proporţionale cu întregul, greutăţile diverselor părţi în braţul *ACca* vor fi către greutăţile aceluiaşi număr de părţi în celălalt braţ, precum mărimile şi gravităţile acceleratoare luate împreună; adică precum 101 către 100 şi 500 către 501, sau precum 505 către 501. Şi de aceea dacă forţa centrifugă a unei părţi oarecare în braţul *ACca* produsă de mişcarea diurnă, ar fi către greutatea aceleiaşi părţi precum 4 către 505 astfel că din greutatea fiecărei părţi, împărţită în 505 părţi, ar scoate patru părţi ; greutăţile în ambele braţe ar rămîne egale, şi de aceea fluidul ar rămîne în echilibru. Dar forţa centrifugă a fiecărei părţi este către greutatea ei precum 1 către 289, adică, forţa centrifugă care ar trebui să fie $\frac{4}{505}$ părţi a greutăţii este numai $\frac{1}{289}$ părţi. Şi de aceea zic, după regula de aur, că dacă forţa centrifugă $\frac{4}{505}$ face ca înălţimea apei în braţul *ACca* să întreacă înălţimea apei în braţul *QCcq* cu a suta parte a întregii înălţimi: forţa centrifugă $\frac{1}{289}$ va face ca excesul înălţimii în braţul *ACca* să fie numai $\frac{1}{229}$ parte a înălţimii din celălalt braţ *QCcq*. Aşadar diametrul Pămîntului la ecuator este către diametrul la poli precum 230 către 229. Şi deci cum semidiametrul mijlociu al Pămîntului după măsura lui Picard, este de 19 615 800 picioare pariziene, sau 3923,16 mile (admiţînd că o milă este o măsură de 5000 picioare) Pămîntul este mai înalt la ecuator decît la poli cu un surplus de 85 472 picioare sau $17\frac{1}{10}$ mile. Şi înălţimea la ecuator va fi de aproape 19 658 600 picioare, şi la poli de 19 573 000 picioare.

Dacă o planetă este mai mare sau mai mică decît Pămîntul păstrîndu-şi aceeaşi densitate şi acelaşi timp periodic al revoluţiei zilnice, raportul forţei centrifuge către greutate se va menţine, şi de aceea se va menţine şi proporţia diametrului între poli către diametrul de la ecuator. Dar dacă mişcarea zilnică este accelerată sau întîrziată într-un raport oarecare, forţa centrifugă se va mări sau se va micşora cu pătratul acelui raport, şi de aceea diferenţa diametrelor va creşte sau va scădea aproximativ în acelaşi raport pătratic. Şi dacă densitatea planetei creşte sau scade într-un raport oarecare, gravitatea tinzînd spre ea de asemenea se va mări sau micşora în acelaşi raport şi diferenţa diametrelor la rîndul ei se va micşora în raportul gravităţii mărite sau se va mări în raportul gravităţii micşorate. De unde cum Pămîntul faţă de stelele fixe se învîrteşte în 23 ore 56′, iar Jupiter în 9 ore 56′, şi pătratele timpurilor sînt precum 25 către 5, şi densităţile corpurilor ce se rotesc precum 400 către $94\frac{1}{2}$ diferenţa diametrelor lui Jupiter va fi către diametrul său cel mic precum $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ către 1, sau aproximativ 1 către $9\frac{1}{3}$. Prin urmare diametrul lui Jupiter dus de la răsărit la apus, este către diametrul lui între poli precum aproximativ $10\frac{1}{3}$ către $9\frac{1}{3}$. De unde, cum diametrul său cel mare este de 37″, diametrul său cel mic care este situat între poli va fi de 33″ 25‴. Să adăugăm aproximativ 3″ pentru refracţia nere-

gulată și diametrele aparente ale acestor planete vor deveni 40″ și 36″ 25‴: care sînt între ele precum aproximativ $11\frac{1}{6}$ către $10\frac{1}{6}$. Aceasta se întîmplă astfel în ipoteza că materia lui Jupiter este uniform de densă. Dar dacă materia lui este mai densă spre planul ecuatorului decît spre poli diametrele lui pot fi între ele precum 12 la 11, sau 13 la 12, sau poate 14 la 13. Și Cassini a observat în anul 1691, că diametrul lui Jupiter mergînd de la răsărit spre apus întrece diametrul celălalt cu aproape a cincisprezecea parte a sa. Iar compatriotul nostru Pound cu un telescop de 123 picioare lungime și un micrometru foarte bun, a măsurat diametrul lui Jupiter în anul 1719 după cum urmează.

	Timpurile		Diametrul maxim	Diametrul minim	Diametrele unul către altul
	zile	ore	părți	părți	
ianuarie ..	28	6	13,40	12,28	precum 12 către 11
martie . .	6	7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$ către $12\frac{3}{4}$
martie .	9	7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$ către $11\frac{2}{3}$
aprilie .	9	9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$ către $13\frac{1}{2}$

Prin urmare teoria este de acord cu fenomenele. Căci planetele se încălzesc mai tare la lumina Soarelui spre ecuatorii lor, și de aceea acolo se condensează cu ceva mai mult decît spre poli. Mai mult, se va vedea din experiențele pendulelor despre care voi refera în propoziția următoare, că gravitatea din cauza rotației diurne a Pămîntului nostru se micșorează la ecuator și de aceea acolo Pămîntul se ridică mai sus decît la poli (dacă materia lui are o densitate uniformă).

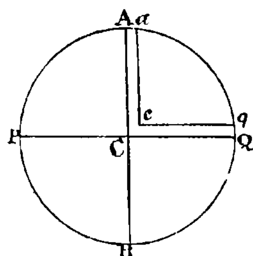
PROPOZIȚIA XX. PROBLEMA IV

Să aflăm și să comparăm între ele greutățile corpurilor în diferite regiuni ale Pămîntului.

Deoarece greutățile brațelor neegale ale canalului apei *ACQqca* sînt egale; și greutățile părților, proporționale cu brațele întregi și situate în mod asemenea față de brațele întregi, sînt între ele precum greutățile întregilor și deci sînt egale între ele: greutățile părților egale și situate în mod analog față de brațe vor fi în raport invers cu brațele, adică, în raport invers precum 230 către 229. Și același este raportul oricăror corpuri omogene și egale și situate în mod analog în brațele canalului. Greutățile acestora sînt în raport invers cu brațele, adică, în raport invers cu distanțele corpurilor de la centrul Pămîntului. Prin urmare dacă corpurile sînt situate în părțile de sus ale canalelor, adică la suprafața Pămîntului, greutățile lor vor fi între ele în raport invers cu distanțele lor la centru. Și din aceeași cauză greutățile, în oricare alte regiuni pe întreaga suprafață a Pămîntului, sînt în raport invers cu distanțele locurilor de la centru; și de aceea, în ipoteza că Pămîntul este un sferoid, sînt date în proporție.

De aici provine teorema, că creșterea greutății mergînd de la ecuator spre pol, este aproximativ precum sinus versus-ul dublului latitudinii sau, ceea ce este același lucru, precum pătratul sinus versus-ului latitu-

dinii; și aproape în același raport cresc arcele gradelor de latitudine în meridian. Și cum latitudinea *Parisului* este de 48°50′, aceea a locurilor sub ecuator 00°00′, și a locurilor la poli 90 grade și sinus versus-urile dublelor sînt 11 334,00000 și 20 000, raza fiind 10 000, și gravitatea la pol este către gravitatea la ecuator precum 230 către 229, și excesul gravității la pol față de gravitatea la ecuator precum 1 către 229: excesul gravității la latitudinea *Parisului* va fi către gravitatea la ecuator, precum $1 \times \frac{11\,334}{20\,000}$ către 229, sau 5667 către 2 290 000. Și de aceea greutățile întregi în aceste locuri vor fi între ele precum 2 295 667 către 2 290 000. De aceea cum lungimile pendulelor oscilatoare în timpuri egale sînt precum greutățile, și la latitudinea *Parisului* lungimea pendulului care bate secunda este de 3 picioare pariziene și $8\frac{1}{2}$ linii, sau mai bine din cauza greutății aerului $8\frac{5}{9}$: lungimea pendulului la ecuator va fi întrecută de lungimea pendulului sincron de la Paris, cu excesul de o linie și 87 părți de miimi de linie. Și printr-un calcul analog se alcătuiește tabloul următor.



Latitudinea locului grad	Lungimea pendulului		Măsura unui grad pe meridian stînjeni	Latitudinea locului grad	Lungimea pendulului		Măsura unui grad pe meridian stînjeni
	picioare	linii			picioare	linii	
0	3	7,468	56637	45	3	8,128	57010
5	3	7,482	56642	6	3	8,461	57022
10	3	7,526	56659	7	3	8,494	57035
15	3	7,596	56687	8	3	8,528	57048
20	3	7,692	56724	9	3	8,561	57061
25	3	7,812	56769	50	3	8,594	57074
30	3	7,948	56823	55	3	8,756	57138
35	3	8,099	56882	60	3	8,907	57196
40	3	8,261	56945	65	3	9,044	57250
1	3	8,294	56958	70	3	9,162	57295
2	3	8,327	56971	75	3	9,258	57332
3	3	8,361	56984	80	3	9,329	57360
4	3	8,394	56997	85	3	9,372	57377
				90	3	9,387	57382

Se constată însă din acest tablou că neegalitatea gradelor este atît de mică, încît în chestiuni de geografie figura Pămîntului poate fi considerată sferică: îndeosebi dacă Pămîntul este cu ceva mai dens spre planul ecuatorului decît spre poli.

Cîțiva astronomi trimiși în regiuni îndepărtate ca să facă observații astronomice, au observat că oroloagele oscilatorii se mișcă mai încet în apropierea ecuatorului decît în regiunile noastre. Și cel dintîi a observat acest lucru dl. R i c h e r în anul 1672 pe insula *Cayenne*. Căci în timp ce observa trecerea stelelor fixe prin meridian în luna august, el a observat că orologiul său se mișcă mai încet față de mișcarea medie a Soarelui, avînd o diferență de 2′28″ pe zi. Apoi făcînd ca un pendul simplu să oscileze secunda măsurată cu un orologiu foarte bun, a notat lungimea pendulului

simplu, și a făcut aceasta de mai multe ori pe săptămînă timp de 10 luni. Apoi reîntors în Franța a comparat lungimea acestui pendul cu lungimea pendulului de la Paris (care avea trei picioare pariziene, și opt linii cu trei cincimi de linie) și a constatat că este mai scurt, diferența fiind de o linie și un sfert.

După aceea compatriotul nostru Halley navigînd cam pe la 1677 spre insula *Sf. Elena*, a constatat că orologiul său oscilatoriu acolo se mișcă mai încet decît la *Londra*, dar nu și-a notat diferența. Dînsul a scurtat însă pendulul cu mai mult decît a opta parte a unui deget, sau cu o linie și jumătate. Și ca să efectueze aceasta, cum lungimea șurubului în partea cea mai de jos a pendulului nu era suficientă, a pus un inel de lemn între piulița șurubului și greutatea pendulului.

Apoi în anul 1682 d-l Varin și d-l Des Hayes au găsit că lungimea pendulului ce bate secunda la Observatorul regal din Paris este de 3 picioare $8\frac{5}{9}$ linii. Și pe insula *Gorea* prin aceeași metodă au aflat că lungimea pendulului sincron este de 3 picioare $6\frac{5}{9}$ linii, existînd o diferență de lungime de 2 linii. Și în același an navigînd spre insulele *Guadeloupe* și *Martinica*, au aflat că lungimea pendulului sincron în aceste insule este de 3 picioare $6\frac{1}{2}$ linii.

După aceea d-l Couplet fiul, în anul 1697 luna iulie, și-a potrivit în așa fel orologiul său oscilator cu mișcarea medie a Soarelui la observatorul regal din Paris, ca într-un timp destul de lung orologiul să coincidă cu mișcarea Soarelui. Apoi navigînd spre *Lisabona* a aflat că în luna noiembrie următoare orologiul mergea mai încet decît mai înainte, existînd o diferență de 2′13″ în 24 de ore. Și în luna martie următoare navigînd spre *Paraiba* a găsit că acolo orologiul său merge mai încet decît la *Paris*, existînd o diferență de 4′ 12″ în 24 de ore. Și afirmă că pendulul ce bate secunda la *Lisabona* era mai scurt cu $2\frac{1}{2}$ linii și la *Paraiba* cu $3\frac{2}{3}$ linii decît la Paris. Mai precis ar fi putut să dea diferențele $1\frac{1}{3}$ și $2\frac{5}{9}$. Căci aceste diferențe corespund diferențelor de timpuri 2′12″ și 4′12″. Trebuie să avem puțină încredere în observațiile lui grosolane.

În anii următori (1699 și 1700) d-l Des Hayes călătorind din nou în *America*, a găsit că în insulele *Cayenne* și *Granada* lungimea pendulului ce oscilează secunda, este cu ceva mai mică decît 3 picioare $6\frac{1}{2}$ linii, și că în insula *Sf. Cristofor* lungimea lui este 3 picioare $6\frac{3}{4}$ linii, și că în insula *Sf. Dominic* ea este de 3 picioare 7 linii.

Și în anul 1704 d-l Feuillé a aflat la *Porto-Belo* în America că lungimea pendulului ce bate secunda, este de 3 picioare pariziene și numai $5\frac{7}{12}$ linii, adică, aproape cu trei linii mai scurtă decît la Paris, dar observația era greșită. Căci călătorind apoi în insula *Martinica*, a aflat că lungimea pendulului izocron este numai de trei picioare pariziene și $5\frac{10}{12}$ linii.

Dar *Paraiba* are 6°38′, latitudine sudică și *Porto-Belo* 9°33′ latitudine nordică, și latitudinile insulelor *Cayenne*, *Gorea*, *Guadeloupe*, *Martinica*,

Granada, *Sf. Christofor* și *Sf. Dominic* sînt respectiv 4°55′, 14°40′, 14°00′, 14°44′, 12°6′, 17°19′ și 19°48′ nord. Și excesul lungimii pendulului de la Paris față de lungimile pendulelor izocrone observate la aceste latitudini sînt cu ceva mai mari decît cele calculate după tabloul lungimilor pendulului de mai sus. Și de aceea Pămîntul întrucîtva este mai înalt la ecuator decît conform calculului de mai sus, și este mai dens la centru decît în minele de lîngă suprafață, afară doar dacă poate căldurile din zona toridă nu au mărit întru cîtva lungimea pendulelor.

Căci d-l Picard a observat că o vergea de fier, care în timp de iarnă cînd frigul îngheța avea lungimea de un picior, încălzită la foc se lungea cu a patra parte a unei linii. Apoi d-l de la Hire a observat că o vergea de fier care de asemenea în timp de iarnă avea o lungime de șase picioare, cînd era expusă soarelui de vară întrecea lungimea de șase picioare cu două treimi de linie. În primul caz căldura a fost mai mare decît în ultimul, iar în acesta mai mare decît căldura părților externe ale corpului omenesc. Căci metalele se încălzesc foarte mult la soarele de vară. Dar vergeaua pendulului în orologiul oscilator niciodată nu se expune la căldura soarelui de vară, niciodată nu primește o căldură egală cu căldura suprafeței corpului omenesc. Și de aceea vergeaua pendulului orologiului lungă de trei picioare, va fi ce este drept cu ceva mai lungă în timp de vară decît în timp de iarnă, dar cu un exces care abia trece de a patra parte a unei linii. Prin urmare diferența întreagă a lungimii pendulelor care în diversele regiuni sînt izocrone, nu se poate atribui diferenței de căldură. Dar această diferență nu trebuie atribuită nici erorilor astronomilor trimiși din Franța. Căci deși observațiile lor nu coincid perfect între ele, totuși erorile sînt atît de mici încît se pot neglija. Și în aceasta sînt toți de acord, că pendulele izocrone sînt mai scurte la ecuator decît la Observatorul regal din Paris existînd o diferență nu mai mică decît o linie și un sfert, nu mai mare decît $2\frac{2}{3}$ linii. În observațiile făcute de d-l Richer în *Cayenne* diferența a fost de o linie și un sfert. Această diferență corectată cu acelea ale d-lui Des Hayes s-a obținut o linie și jumătate sau una și trei sferturi. Din acelea ale altora mai puțin precise ea a rezultat de aproape două linii. Și această diferență a putut proveni parte din erorile de observație, parte din disimilitudinea părților interne ale Pămîntului și înălțimea munților, și parte din diferențele de temperatură ale aerului.

După cît știu o vergea de fier de trei picioare lungime, în timp de iarnă în *Anglia*, este mai scurtă decît în timp de vară, cu a șasea parte a unei linii. Din cauza căldurii de la ecuator se scade această cantitate din diferența de o linie și un sfert observată de Richer, și va rămîne $1\frac{1}{12}$ linii: care coincide foarte bine cu $1\frac{87}{1000}$ linii obținută teoretic mai înainte. Richer însă a repetat observațiile făcute în *Cayenne*, în fiecare săptămînă timp de zece luni, și a comparat lungimile notate acolo ale pendulului format de o vergea de fier cu lungimile lui notate la fel în *Franța*, care diligență și precauție se pare că a lipsit la alți observatori. Dacă acordăm încredere observațiilor lui, Pămîntul e mai înalt la ecuator decît la poli cu un exces de aproape 17 mile, după cum rezultă din teoria de mai sus.

PROPOZIŢIA XXI. TEOREMA XVII

Punctele echinocţiului regresează, şi axa Pămîntului printr-o nutaţie în diversele revoluţii anuale se înclină de două ori spre ecliptică şi se întoarce de două ori la poziţia de mai înainte.

Este evident aceasta din corolarul 20, propoziţia LXVI Cartea I. Totuşi mişcarea de nutaţie trebuie să fie foarte mică, şi abia observabilă.

PROPOZIŢIA XXII. TEOREMA XVIII

Toate mişcările lunare, şi toate neegalităţile mişcărilor rezultă din principiile înşirate.

Planetele mai mari, în timp ce sînt duse în jurul Soarelui, pot antrena alte planete mai mici care se rotesc în jurul lor, şi din propoziţia LXV, Cartea 1 rezultă că cele mai mici trebuie să se mişte pe elipsă, avînd focarele în centrele celor mai mari. Dar prin acţiunea Soarelui mişcările lor sînt perturbate în mai multe feluri, şi suferă aceleaşi. neegalităţi care se observă la Luna noastră. Aceasta (potrivit corolarelor 2, 3, 4 şi 5, propoziţia LXVI) se mişcă mai repede; şi cu raza dusă la Pămînt descrie o arie mai mare în raport cu timpul şi are o orbită mai puţin curbă; şi de aceea se apropie mai mult de Pămînt în syzigii decît în cvadraturi, dacă nu cumva e împiedicată de mişcarea excentricităţii. Căci excentricitatea e maximă (potrivit corolarului 9, propoziţia LXVI) cînd apogeul Lunii se află în syzigii, şi e minimă cînd este situat în cvadraturi; şi de aceea Luna în perigeu e mai rapidă şi mai aproape de noi, în apogeu însă e mai înceată şi mai depărtată în syzigii decît în cvadraturi. Mai mult, apogeul progresează şi nodurile regresează, dar cu o mişcare neegală. Şi apogeul (potrivit corolarului 7 şi 8, propoziţia LXVI) progresează mai repede în syzigiile sale, şi regresează mai încet în cvadraturi, şi prin excesul progresului asupra regresului avansează în fiecare an. Iar nodurile (potrivit corolarului 2, propoziţia LXVI) sînt în repaus în syzigiile lor şi regresează foarte repede în cvadraturi. Dar şi latitudinea maximă a Lunei e mai mare în cvadraturi (potrivit corolarului 10, propoziţia LXVI) decît în syzigii: şi mişcarea medie e mai înceată în periheliul Pămîntului (potrivit corolarului 6, propoziţia LXVI) decît în afeliu. Şi acestea sînt inegalităţile mai importante notate de astronomi.

Dar mai sînt şi alte neegalităţi neobservate de astronomii de odinioară, prin care mişcările lunare sînt într-atît perturbate, încît pînă acum nu s-a putut stabili nici o lege prin care ele să fie reduse la o regulă sigură oarecare. Căci viteza sau mişcările orare ale apogeului şi ale nodurilor Lunii şi ecuaţiile lor, precum şi diferenţa dintre excentricitatea maximă în syzigii şi minimă în cvadraturi şi inegalitatea numită variaţie, se măresc sau se micşorează anual (potrivit corolarului 14, propoziţia LXVI) în raportul cubului diametrului aparent al Soarelui. Şi afară de aceasta variaţia se măreşte sau se micşorează aproximativ în raportul pătratului timpului dintre cvadraturi (potrivit corolarul 1 şi 2, lema X şi corolarul 16, propoziţia LXVI, Cartea I) dar această neegalitate în calculul astronomic se referă de obicei la ecuaţia centrului Lunii, şi se confundă cu ea.

PROPOZIŢIA XXIII. TEOREMA V

Mişcările neegale ale sateliţilor lui Jupiter şi Saturn provin din mişcările lunare.

Din mişcările Lunii noastre se pot deduce mişcările analoge ale lunilor sau sateliţilor lui Jupiter astfel. Mişcarea medie a nodurilor satelitului extrem al lui Jupiter, este către mişcarea medie a nodurilor Lunii noastre, în raportul compus din pătratul raportului timpului periodic al Pămîntului în jurul Soarelui, către timpul periodic al lui Jupiter în jurul Soarelui, şi din raportul timpului periodic al satelitului în jurul lui Jupiter către timpul periodic al Lunii în jurul Pămîntului (potrivit corolarului 16, propoziţia LXVI, Cartea I) şi deci acest nod într-o sută de ani merge retrograd 8°24′. Mişcările medii ale nodurilor sateliţilor interiori sînt către mişcarea acestuia, precum timpurile lor periodice către timpul periodic al acestuia (potrivit aceluiaşi corolar) şi deci sînt date. Dar mişcarea directă a afeliului unui satelit oarecare este către mişcarea retrogradă a nodurilor lui, precum mişcarea apogeului Lunii noastre către mişcarea nodurilor ei (potrivit aceluiaşi corolar) şi deci este dată. Totuşi trebuie micşorată mişcarea astfel aflată a afeliului în raportul de 5 către 9 sau aproximativ 1 către 2, dintr-o cauză ce nu este locul să o expun aici. Ecuaţiile maxime ale nodurilor şi ale afeliului unui satelit oarecare sînt respectiv către ecuaţiile maxime ale nodurilor şi afeliul Lunii, precum mişcările nodurilor şi ale afeliului sateliţilor în timpul unei revoluţii a primelor ecuaţii către mişcările nodurilor şi apogeul Lunii în timpul unei revoluţii a ecuaţiilor din urmă. Variaţia unui satelit privit din Jupiter este către variaţia Lunii, precum sînt între ele mişcările întregi ale nodurilor în timpurile în care satelitul şi Luna se învîrtesc în jurul Soarelui, potrivit aceluiaşi corolar; şi deci pentru satelitul exterior ea nu trece de 5″12‴.

PROPOZIŢIA XXIV. TEOREMA XIX

Fluxul şi refluxul mării provin din acţiunile Soarelui şi ale Lunii.

Din corolarul 19 şi 20 propoziţia LXVI; Cartea I se vede că marea atît lunară cît şi solară în fiecare zi trebuie de două ori să se urce şi de două ori să coboare şi că înălţimea maximă a apei, în mările profunde şi libere urmează apropierea astrelor de meridianul locului într-un interval mai mic de şase ore, după cum se întîmplă în toată partea orientală a mării *Atlanticului* şi *Etiopiei* între Franţa şi promontorul *Bunei Speranţe* precum şi pe litoralul din *Chile* şi *Peru* al *Pacificului*: în toate aceste litorale fluxul are loc aproximativ în a doua, sau a patra, dacă nu cumva mişcarea propagată din oceanul adînc prin locuri puţin adînci este întîrziată pînă la ora a cincea, a şasea, a şaptea sau mai mult. Număr orele pornind de la apropierea fiecărui astru la meridianul locului, atît sub orizont cît şi deasupra şi prin orele zilei lunare înţeleg a douăzeci şi patra parte a timpului în care Luna în mişcarea diurnă aparentă revine la meridianul locului. Forţa Soarelui sau a Lunii care ridică marea este maximă în momentul trecerii astrului la meridianul locului. Dar forţa imprimată în acel timp mării se menţine cîtva timp şi apoi se măreşte printr-o nouă forţă imprimată, pînă ce marea va ajunge la înălţimea maximă, ceea ce se va întîmpla în timp

de una sau două ore dar mai adesea la țărm aproximativ în timp de trei ore, sau și mai mult dacă marea este puțin adîncă.

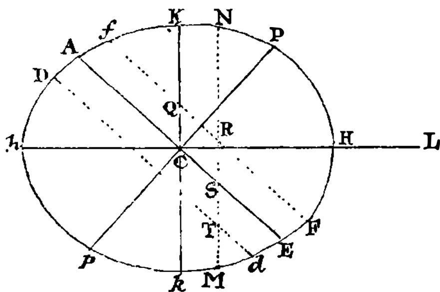
Dar cele două mișcări, pe care le produc cele două astre, nu se deosebesc distinct una de alta, ci produc o mișcare oarecare compusă. În conjuncțiunea sau opoziția astrelor efectele lor se unesc și se compune fluxul și refluxul maxim. În cvadraturi Soarele ridică apa cînd Luna o apasă și o apasă cînd Luna o ridică : și din diferența efectelor se va naște fluxul cel mai mic dintre toate. Și fiindcă, după cum ne arată experiența, efectul Lunii e mai mare decît acela al Soarelui, înălțimea cea mai mare a apei va avea loc aproximativ în ora a treia lunară. În afară de syzigii și cvadraturi, fluxul maxim care ar trebui să aibă loc numai prin forța Lunii în ora a treia lunară, și numai prin aceea a Soarelui în ora a treia solară, prin compunerea forțelor va avea loc într-un timp oarecare intermediar care este mai aproape de ora a treia lunară; și deci în trecerea Lunii de la syzigii la cvadraturi, cînd ora a treia solară precedează pe a treia lunară înălțimea maximă a apei precedează pe a treia lunară și aceasta într-un interval maxim puțin după octanții Lunii; și la intervale egale fluxul maxim urmează după ora a treia lunară în trecerea Lunei de la cvadraturi la syzigii. Acestea se întîmplă astfel în marea deschisă. Căci la gurile fluviilor fluxurile mai mari, în condiții egale, ajung mai tîrziu la vîrf.

Efectele astrelor depind însă de distanțele lor de la Pămînt. Căci la distanțe mai mici efectele lor sînt mai mari, la mai mari sînt mai mici și aceasta în raportul cubului diametrilor aparenți. Așadar Soarele în timpul iernii, fiind la perigeu, are un efect mai mare și face ca fluxurile în syzigii să fie cu ceva mai mari, și în cvadraturi cu ceva mai mici (celelalte condiții fiind aceleași) decît în timp de vară; și Luna în perigeu produce în fiecare lună fluxuri mai mari decît înainte cu cincizprezece zile sau după, cînd se află în apogeu. De unde rezultă că cele două fluxuri maxime nu urmează unul după altul în syzigii ce se succed imediat.

Efectul ambelor astre depinde și de declinația lor sau de distanța de la ecuator. Căci dacă astrul ar fi situat în pol, el ar atrage în mod constant diversele părți ale apei, fără imtensificarea sau slăbirea acțiunii, și deci nu ar cauza nici o variație a mișcării. Prin urmare astrele îndepărtîndu-se de la ecuator spre pol, își pierd efectele în mod gradat, și de aceea vor produce fluxuri mai mici în syzigiile solstițiale decît în cele echinocțiale. Vor produce însă fluxuri mai mari în cvadraturile solstițiale decît în cvadraturile echinocțiale; fiindcă efectul Lunii situată atunci în ecuator întrece cu mult efectul Soarelui. Așadar fluxurile maxime cad în syzigii și cele minime în cvadraturile astrelor, în jurul timpurilor ambelor echinocții. Și fluxului maxim în syzigii îi urmează totdeauna unul minim în cvadraturi, după cum a arătat experiența. Dar din cauza distanței mai mici a Soarelui de Pămînt în timp de iarnă decît în timpul verii, rezultă că fluxurile maxime și minime mai adeseori precedează echinocțiul de primăvară decît îl urmează, și mai adesea urmează pe cel de toamnă decît îl preced.

Efectele astrelor depind și de latitudinea locurilor. Fie $ApEP$ Pămîntul acoperit de toate părțile cu ape afunde; C centrul lui; P,p polii; AE ecuatorul; F un loc oarecare în afară de ecuator; Ff paralela locului; Dd paralela corespunzătoare de cealaltă parte a ecuatorului; L locul pe care-l ocupa Luna înainte cu trei ore; H locul Pămîntului situat direct sub ea; h locul opus

acestuia; *K*, *k*, locurile situate la o distanță de 90 de grade; *CH*, *Ch*, înălțimile maxime ale mării măsurate de la centrul Pămîntului; și *CK*, *Ck*, înălțimile minime: și dacă cu axele *Hh*, *Kk*, descriem o elipsă, apoi prin rotația ei în jurul axei mari *Hh* să descriem sferoidul *HPKhpk*; acesta va reprezenta aproximativ figura mării, și *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* vor fi înălțimile mării în locurile *F*, *f*, *D*, *d*. Mai departe dacă în rotația menționată a elipsei un punct oarecare *N* descrie cercul *NM*, tăind paralelele *Ff*, *Dd* în locurile oarecare *R*, *T*, și ecuatorul *AE* în *S*; *CN* va fi înălțimea mării în toate locurile *R*, *S*, *T*, situate pe acest cerc. De aceea în rotația diurnă a unui loc oarecare *F*, fluxul va fi maxim în *F*, în ora a treia după culminația Lunii la meridian deasupra orizontului; după aceea refluxul maxim în *Q* în ora a treia după apusul Lunii; apoi fluxul maxim în *f* în ora a treia după culminația Lunii la meridian sub orizont; în fine refluxul maxim în *Q* în ora a treia după răsăritul Lunii; și ultimul flux în *f* va fi mai mic decît fluxul precedent în *F*. Căci întreaga mare se împarte în doi curenți emisferici, unul în emisfera *KHk* îndreptat spre nord, celălalt în emisfera opusă *Khk*; pe care deci îi putem numi curentul boreal și curentul austral. Acești curenți totdeauna opuși unul altuia vin alternativ la meridianele diverselor locuri, după un interval de douăsprezece ore lunare. Și cum regiunile boreale participă mai mult la curentul boreal, și cele australe mai mult la cel austral, de aici se nasc fluxurile alternativ mai mari și mai mici, în diversele locuri în afară de ecuator, în care astrele răsar și apun. Iar fluxul mai mare cînd Luna declină spre verticala locului, va cădea aproximativ în ora a treia după culminația Lunii la meridian deasupra orizontului, și Luna schimbîndu-și declinația fluxul se transformă în cel mai mic. Și diferența maximă a fluxurilor va avea loc în timpurile solstițiilor; îndeosebi dacă nodul ascendent al Lunii se află la începutul Berbecului. Astfel experiența arată că fluxurile diminețiilor de iarnă întrec pe acelea de seara și cele din serile de vară pe cele de dimineață, anume la *Plymouth* aproape cu înălțimea unui picior, iar la *Bristol* cu înălțimea de cincisprezece degete: după observațiile lui Colepress și Sturm.



Mișcările descrise pînă acum se schimbă însă întrucîtva din cauza forței de reciprocitate a apelor prin care fluxul mării, și după ce încetează acțiunile astrelor, poate persevera cîtva timp. Această conservare a mișcării imprimate micșorează diferența fluxurilor alternative; și mărește fluxurile imediat după syzigii, și micșorează pe cele imediat după cvadraturi. De unde urmează că fluxurile alternative la *Plymouth* și *Bristol* nu diferă cu mult mai mult unul de altul decît cu înălțimea de un picior sau cincisprezece degete; astfel că fluxurile cele mai mari din aceste porturi, nu sînt primele după syzigii, ci cele de-al treilea. De asemenea întîrzie toate mișcările în trecerea prin vaduri, astfel că fluxul cel mai mare dintre toate, în anumite strîmtori și la gurile fluviilor, sînt cele de-al patrulea sau al cincilea de la syzigii.

Apoi se poate întîmpla ca fluxul să se propage de la ocean prin diverse strîmtori spre același port, și să treacă mai repede prin unele strîmtori decît prin altele: în care caz același flux împărțit în două sau mai multe venind succesiv poate compune mișcări noi de genuri diverse. Să ne închipuim că două fluxuri egale vin din locuri diferite în același port, cel dintîi dintre ele precedează pe următorul cu un interval de șase ore, și ajunge în ora a treia de la apropierea Lunii de meridianul portului. Dacă Luna în această apropiere a sa de meridian se află la ecuator la fiecare șase ore vor veni fluxuri egale, care întîlnind tot atîtea refluxuri se vor egaliza cu fluxurile, și astfel în intervalul unei zile vor face ca apa să rămînă în repaus. Dacă atunci Luna declina de la ecuator, pe ocean vor avea loc alternativ fluxuri mai mari și mai mici, după cum s-a spus; și deci se vor propaga în acest port alternativ două fluxuri mai mari și două mai mici. Dar cele două fluxuri mai mari vor forma apa cea mai înaltă la mijloc între cele două, fluxul mai mare și mai mic vor face ca apa să se urce la înălțimea mijlocie în mijlocul lor, și între cele două fluxuri mai mici apa se va urca la înălțimea minimă. Astfel în intervalul de douăzeci și patru de ore, apa nu va ajunge, de două ori ca de obicei la înălțimea maximă, ci numai o dată, și o dată la cea minimă; și înălțimea maximă, dacă Luna declină în pol deasupra orizontului locului, va avea loc fie în ora a șasea, fie în a treisprezecea de la culminația Lunii la meridian, și se va schimba în reflux cînd Luna își schimbă declinația. Un exemplu de toate acestea ne-a dat H a l l e y din observațiile marinarilor în portul *Batshaw* al regatului *Tunquin* sub latitudinea 20° 50′ nord. Acolo apa în ziua următoare trecerii Lunii la ecuator este în repaus apoi cînd Luna declină spre nord începe fluxul și refluxul nu de două ori ca în alte porturi, ci o dată în fiecare zi; și fluxul coincide cu apusul Lunii, refluxul maxim cu răsăritul ei. Cu declinația Lunii fluxul crește, pînă în ziua a șaptea sau a opta, apoi în alte șapte zile descrește cu tot atîtea grade, cu cîte a crescut înainte; și încetează cînd Luna își schimbă declinația, și apoi se schimbă iarăși în reflux. Căci atunci refluxul are loc la apusul Lunii și fluxul la răsăritul ei, pînă ce Luna își mută din nou declinația. Există două intrări în acest port și în strîmtoarea vecină, una din Oceanul *Chinez* între continent și insula *Leuconia*, cealaltă din Marea *Indiană* între continent și insula *Borneo*. Că ora fluxurilor venind în intervalul de 12 ore din Marea *Indiană*, și în intervalul de șase ore de la marea *Chineză* prin acea strîmtoare, și astfel întîlnindu-se în ora a treia și a noua lunară, compun mișcări de acest fel ; sau că alta este condiția acelor mări, las să se determine din observațiile țărmurilor vecine.

Pînă aici am expus cauzele mișcărilor Lunii și ale mărilor. Rămîne să adaug cîte ceva despre cantitatea mișcărilor.

PROPOZIȚIA XXV. PROBLEMA VI

Să aflăm forțele cu care Soarele perturbă mișcările Lunii.

Fie S Soarele, T Pămîntul, P Luna, $CADB$ orbita Lunii. Pe SP să luăm SK egală cu ST; și fie SL către SK în raportul pătratului lui SK către SP, și să ducem LM paralelă cu PT; și dacă reprezentăm gravitatea acceleratoare a Pămîntului spre Soare prin distanța ST sau SK, SL va fi gravitatea acceleratoare a Lunii spre Soare. Ea se compune din părțile SM, LM,

dintre care *LM* și partea *TM* a lui *SM* perturbă mișcarea Lunii, după cum s-a expus în propoziția LXVI, Cartea I și în corolarele ei. Deoarece Pămîntul și Luna se învîrtesc în jurul centrului comun de gravitate, mișcarea Pămîntului în jurul acelui centru va fi de asemenea perturbată de forțe asemănătoare; dar atît sumele forțelor cît și ale mișcărilor se pot raporta la Lună, iar sumele forțelor se pot reprezenta prin liniile analoge *TM* și *ML*. Forța *ML* în valoarea sa mijlocie este către forța centripetă, cu care Luna se poate roti pe orbita sa în jurul Pămîntului în repaus la distanța *PT*, în raportul pătratului timpurilor periodice ale Lunii în jurul Pămîntului și ale Pămîntului în jurul Soarelui (potrivit corolarului 17, propoziția LXVI, Cartea I), adică, în raportul pătratului a 27 zile 7 ore 43 minute, către 365 zile 6 ore 9 minute, adică precum 1000 către 178725 sau 1 către $178\frac{29}{40}$. Dar în propoziția a patra am găsit că, dacă Pămîntul și Luna se rotesc în jurul centrului comun de greutate, distanța lor mijlocie între ele va fi de aproximativ $60\frac{1}{2}$ semidiametre mijlocii ale Pămîntului. Și forța cu care se poate roti Luna pe orbită în jurul Pămîntului în repaus către distanța *PT* de 60 $\frac{1}{2}$ semidiametre terestre, este către forța cu care se poate învîrti în același timp la o distanță de 60 de semidiametre precum $60\frac{1}{2}$ către 60; și această forță este către forța gravității la noi aproximativ precum 1 către 60×60. Și deci forța mijlocie *ML* este către forța gravității la suprafața Pămîntului, precum $1 \times 60\frac{1}{2}$ către $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, sau 1 către 638092,6. De aici și din proporția liniilor *TM*, *ML*, se cunoaște și forța *TM*: și acestea sînt forțele Soarelui prin care se perturbă mișcările Lunii. Q.E.I.

PROPOZIȚIA XXVI. PROBLEMA VII

Să aflăm creșterea orară pe care o poate descrie Luna, cu raza dusă la Pămînt, pe o orbită circulară.

Am spus că aria pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pămînt este proporțională cu timpul, afară numai dacă mișcarea Lunii este perturbată de acțiunea Soarelui. Ne propunem aici să studiem inegalitatea momentului sau a creșterii orare. Pentru a ușura calculul, să ne închipuim că orbita Lunii este circulară și să neglijăm toate inegalitățile, exceptînd numai pe aceea de care este vorba aici. Din cauza distanței foarte mari a Soarelui, să mai presupunem că liniile *SP*, *ST* sînt paralele între ele. În acest fel forța *LM* se va reduce totdeauna la cantitatea sa mijlocie *TP*, după cum și forța *TM* la cantitatea sa mijlocie 3*PK*. Aceste forțe (potrivit corolarului II al legilor) compun forța *TL*; și această forță dacă pe raza *TP* se coboară perpendi-

culara *LE*, se descompune în forțele *TE*, *EL*, dintre care *TE*, acționînd totdeauna în direcția razei *TP*, nici nu accelerează nici nu întîrzie descrierea ariei *TPC* efectuată de raza *TP;* și *EL* acționînd în direcția perpendicularei, o accelerează sau o întîrzie, atît cît accelerează sau întîrzie Luna. Această accelerație a Lunii, în trecerea ei de la cvadratura *C* la conjuncțiunea *A*, efectuată în diversele momente de timp, este precum forța acceleratoare *EL*, adică, precum $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Să reprezentăm timpul prin mișcarea medie lunară, sau (ceea ce revine la același lucru) prin unghiul *CTP*, sau și prin arcul *CP*. Pe *CT* să ridicăm normala *CG* egală cu *CT*. Și împărțind arcul cadranului *AC* în particule nenumărate egale *Pp* etc., prin care putem reprezenta tot atîtea particule de timp, și ducînd *pk* perpendiculară pe *CT*, să ducem *TG* întîlnind pe *KP*, *kp* prelungite în *F* și *f*; și *FK* va fi egală cu *TK*, și *Kk* va fi către *PK* precum *Pp* către *Tp*, adică într-un raport dat, și deci $FK \times Kk$ sau aria *FKkf*, va fi precum $\frac{3PK \times TK}{TP}$, adică, precum *EL*; și compunînd, aria întreagă *GCKF* precum suma tuturor forțelor *EL* imprimate Lunii în timpul întreg *CP*, și de aceea precum viteza produsă de această sumă, adică precum accelerația ariei descrise *CTP*, sau creșterea momentului. Forța cu care Luna se poate roti în jurul Pămîntului în repaus la distanța *TP*, în timpul său periodic *CADB* de 27 zile, 7 ore, 43 minute, ar face ca corpul, căzînd în timpul *CT*, să descrie lungimea $\frac{1}{2}$ *CT*, și în același timp să cîștige o viteză egală cu viteza, cu care se mișcă Luna pe orbita sa. Aceasta este evident din corolarul 9, propoziția IV, Cartea I. Cum însă perpendiculara *Kd* coborîtă pe *TP* este a treia parte a lui *EL*, și jumătatea lui *TP* sau *ML* în octanți forța, *EL* în octanți, unde este maximă, va întrece forța *ML* în raportul 3 la 2 și deci va fi către forța cu care luna se poate roti în timpul său periodic în jurul Pămîntului în repaus, precum 100 către $\frac{2}{3} \times 17\ 872 \frac{1}{2}$ sau 11 915, și în timpul *CT* ar trebui să dea naștere unei viteze egale cu $\frac{100}{11\,916}$ a vitezei lunare, iar în timpul *CPA* ar produce o viteză mai mare în raportul *CA* către *CT*, sau *TP*. Să exprimăm forța maximă *EL*

în octanţi prin aria $FK \times Kk$ egală cu dreptunghiul $\frac{1}{2}$ $TP \times Pp$. Şi viteza pe care o poate produce forţa maximă într-un timp oarecare CP, va fi către viteza pe care întreaga forţă mai mică EL o generează în acelaşi timp, precum dreptunghiul $\frac{1}{2}$ $TP \times CP$ către aria $KCGF$: iar în timpul întreg CPA, vitezele produse vor fi între ele precum dreptunghiul $\frac{1}{2}$ $TP \times CA$ şi triunghiul TCG, adică arcul cadranului CA şi raza TP. Şi deci (potrivit propoziţiei IX, Cartea a V-a a Elementelor) viteza din urmă, născută în timpul întreg, va fi partea $\frac{100}{11\,915}$ a vitezei lunare. La această viteză a Lunii, care este analogă cu momentul mijlociu al ariei, să adunăm şi să scădem jumătatea celeilalte viteze; şi dacă momentul mijlociu se exprimă prin numărul 11 915, suma 11 915 + 50 sau 11 965 va da momentul maxim al ariei în syzigia A, şi diferenţa 11 915 — 50 sau 11 865 momentul minim al aceleiaşi în cvadraturi. Deci ariile descrise în timpuri egale în syzigii şi cvadraturi sînt între ele precum 11 965 către 11 865. La momentul minim 11 865 să adunăm momentul, care să fie către diferenţa momentelor 100 precum trapezul $FKCG$ către triunghiul TCG sau (ceea ce este acelaşi lucru, precum pătratul sinusului PK către pătratul razei TP, adică, precum Pd către TP) şi suma va da momentul ariei, cînd Luna este într-un loc oarecare intermediar P.

Toate acestea se întîmplă astfel în ipoteza că Soarele şi Pămîntul sînt în repaus şi Luna se învîrteşte în timpul sinodic de 27 zile, 7 ore 43 minute. Cum însă perioada sinodică lunară adevărată este de 29 zile 12 ore şi 44 minute, trebuie să mărim creşterile momentelor în raportul timpului, adică, în raportul 1 080 853 către 1 000 000. În acest fel creşterea întreagă, care era $\frac{100}{11\,915}$ din momentul mijlociu, va deveni $\frac{100}{11\,023}$ din aceasta. Şi deci momentul ariei în cvadratura Lunii va fi către momentul ei în syzigii precum 11 023—50 către 11 023+50, sau 10 973 către 11 073; şi către momentul ei, cînd Luna se află într-un alt loc oarecare intermediar P, precum 10 973 către 10 973 + Pd, presupunînd că TP este egal cu 100.

Aşadar aria pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pămînt în diversele particule egale de timp, este aproximativ precum suma numărului 219,46 şi sinus versus-ul dublului distanţei Lunii de la cvadratura proximă în cercul a cărui rază este unitatea. Acestea se întîmplă astfel cînd variaţia în octanţi este de mărime mijlocie. Dacă însă acolo variaţia este mai mare sau mai mică, sinus versus-ul trebuie mărit sau micşorat în acelaşi raport.

PROPOZIŢIA XXVII. PROBLEMA VIII

Din mişcarea orară a Lunii să aflăm distanţa ei de la Pămînt.

Aria, pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pămînt în diversele momente de timp, este precum mişcarea orară a Lunii şi pătratul distanţei Lunii de Pămînt luate împreună; şi de aceea distanţa Lunii de Pămînt este într-un raport compus din rădăcina pătrată a ariei şi inversul rădăcinii pătrate a mişcării orare. Q.E.I.

COROLARUL 1. Prin urmare diametrul Lunii este dat: fiindcă este în raport invers cu distanţa ei de la Pămînt. Astronomii să cerceteze cît de precis se potriveşte această regulă cu fenomenele.

COROLARUL 2. Deci şi orbita lunară se poate defini mai precis din fenomene decît pînă acum.

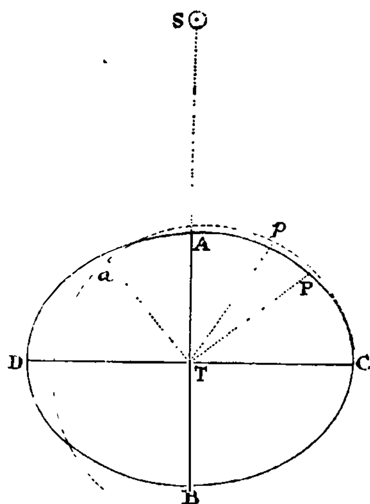
PROPOZIŢIA XXVIII. PROBLEMA IX

Să aflăm diametrele orbitei pe care ar trebui să se mişte Luna, fără excentricitate.

Curbura traiectoriei, pe care o descrie un mobil dacă este atras în direcţia perpendicularei traiectoriei, este proporţională cu atracţia şi invers proporţională cu pătratul vitezei. Presupun că curburile liniilor sînt între ele în ultima proporţie a sinusurilor sau tangentelor unghiurilor de contact ce aparţin la raze egale, cînd razele se micşorează la infinit. Dar atracţia Lunii spre Pămînt în syzigii este excesul gravităţii ei spre Pămînt faţă de forţa solară $2PK$ (vezi propoziţia XXV) cu care gravitatea acceleratoare a Lunii spre Soare întrece gravitatea acceleratoare a Pămîntului spre Soare sau este întrecută de ea. În cvadraturi însă, această atracţie este suma gravităţii Lunii spre Pămînt şi a forţei solare KT, cu care este atrasă Luna spre Pămînt. Şi aceste atracţii, dacă pentru $\frac{AT + CT}{2}$ punem N, sînt aproximativ precum $\frac{178\,725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ şi $\frac{178\,725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$; sau precum $178\,725\ N \times CT^2 - 2000\ AT^2 \times CT$ şi $178\ 725\ N \times AT^2 + 1000\ CT^2 \times AT$. Căci dacă gravitatea acceleratoare a Lunii spre Pămînt se exprimă prin numărul 178 725, forţa mijlocie ML, care în cvadraturi este PT sau TK şi atrage Luna spre Pămînt, va fi 1000, şi forţa mijlocie TM în syzigii va fi 3000; din care, dacă se scade forţa mijlocie ML va rămîne forţa 2000 cu care Luna în syzigii este atrasă de la Pămînt, şi pe care mai înainte am numit-o $2PK$. Dar viteza Lunii în syzigiile A şi B este către viteza ei în cvadraturile C şi D, precum CT către AT şi momentul ariei pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pămînt în syzigii către momentul aceleiaşi arii în cvadraturi luate împreună, adică precum $11\,073\ CT$ către $10\,973\ AT$. Să luăm pătratul acestui raport invers şi primul raport o dată direct, şi curbura orbitei lunare în syzigii va fi către curbura aceleiaşi în cvadraturi precum $120\,406\,729 \times 178\,725\ AT^2 \times CT^2 \times N - 120\,406\,729 \times 2000\ AT^4 \times CT$ către $122\,611\,329 \times 178\,725\ AT^2 \times CT^2 \times N + 122\,611\,329 \times 1000\ CT^4 \times AT$, adică precum $21\ 519\ 69\ AT \times CT \times N - 24\,081\ AT^3$ către $2\,191\,371\ AT \times CT \times N + 12\,261\ CT^3$.

Deoarece nu cunoaştem figura orbitei lunare, în locul ei să considerăm elipsa $DBCA$, în centrul căreia să punem Pămîntul T, şi a cărei axă mare DC să fie situată între cvadraturi, cea mică AB între syzigii. Cum însă planul acestei elipse se învîrteşte cu o mişcare unghiulară în jurul Pămîntului, şi traiectoria a cărei curbură o considerăm ar trebui descrisă într-un plan lipsit de orice mişcare unghiulară, va trebui să considerăm figura, pe care Luna mişcîndu-se pe elipsă o descrie în acest plan, adică figura Cpa, ale cărei diverse puncte p se află luînd un punct oarecare P pe elipsă, care să reprezinte locul Lunii, şi ducînd Tp egal cu TP, în aşa fel ca unghiul PTp să fie egal cu mişcarea aparentă a Soarelui efectuată din timpul cvadra-

turii C; sau (ceea ce revine aproape la același lucru) ca unghiul CTp să fie către unghiul CTP precum timpul revoluției sinodice lunare către timpul revoluției periodice sau $29^d\ 12^h\ 44^m$ către $27^d\ 7^h\ 43^m$. Să luăm deci unghiul CTa în același raport către unghiul drept CTA, și fie lungimea Ta egală cu lungimea TA; și a va fi apsida de jos și C apsida de sus a orbitei Cpa. Dar făcînd calculele găsesc că diferența între curbura orbitei Cpa în vîrful a, și curbura cercului descris din centrul T cu intervalul TA, este către diferența dintre curbura elipsei în vîrful A și curbura aceluiași cerc, precum pătratul raportului unghiului CTP către unghiul CTp; și că curbura elipsei în A este către curbura cercului, precum pătratul raportului lui TA către TC; și curbura acelui cerc către curbura cercului descris din centrul T cu intervalul TC, precum TC către TA; iar curbura acesteia către curbura elipsei în C, precum pătratul raportului lui TA către TC; și diferența dintre curbura elipsei în vîrful C și curbura ultimului cerc, către diferența dintre curbura figurii Cpa în vîrful C și curbura aceluiași cerc, precum pătratul raportului unghiului CTp către unghiul CTP. Care rapoarte se deduc ușor din sinusurile unghiurilor de contact și a diferențelor unghiurilor. Dar comparînd acestea între ele, se obține curbura figurii Cpa în a către curbura ei în C, precum $AT^3 + \frac{16\,824}{100\,000} CT^2 \times AT$ către $CT^3 + \frac{16\,824}{100\,000} AT^2 \times CT$. Unde numărul $\frac{16\,824}{100\,000}$ înseamnă diferența pătratelor unghiurilor CTP și CTp aplicată la pătratul unghiului mai mic CTP, sau (ceea ce este același lucru) diferența pătratelor timpurilor $27^d\ 7^h\ 43^m$, și $29^d 12^h\ 44^m$, aplicată la pătratul timpului $27^d\ 7^h\ 43^m$.



Așadar cum a reprezintă syzigia Lunii, și C cvadratura ei, proporția aflată trebuie să fie aceeași cu proporția curburii orbitei Lunii în syzigii către curbura ei în cvadraturi pe care am aflat-o mai sus. Deci pentru a afla proporția CT către AT, înmulțim extremele și mediile între ele. Și termenii rezultați aplicați la $AT \times CT$, devin $2062,79\, CT^4 - 2\,151\,969\ N \times CT^3 + 368\,676\ N \times AT \times CT^2 + 36\,342\, AT^2 \times CT^2 - 362\,047\, N \times AT^2 \times CT + 2\,191\,371\, N \times AT^3 + 4051,4\, AT^4 = 0$. Aici în locul semisumei N a termenilor AT și CT scriu 1, și punînd x în locul semidiferenței lor, avem $CT = 1+x$, și $AT = 1 - x$: pe care scriindu-le în ecuații, și rezolvînd, CT obținem $x = 0{,}00719$, și deci semidiametrul CT devine 1,00719, și semidiametrul AT 0,99281, care numere sînt aproximativ precum $70\frac{1}{24}$ și $69\frac{1}{24}$. Așadar distanța Lunii de la Pămînt în syzigii către distanța ei în cvadraturi (lăsînd adică la o parte considerația excentricității) este precum $69\frac{1}{24}$ către $70\frac{1}{24}$ sau în numere rotunde precum 69 către 70.

PROPOZIŢIA XXIX. PROBLEMA X

Să aflăm variaţia Lunii.

Această inegalitate provine parte din forma eliptică a orbitei lunare parte din inegalitatea momentelor ariei, pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pămînt. Dacă Luna *P* s-ar mişca pe elipsa *DBCA* în jurul Pămîntului în repaus în centrul elipsei, şi ar descrie cu raza *TP* dusă la Pămînt aria *CTP* proporţională cu timpul; iar semidiametrul maxim *CT* al elipsei ar fi către semidiametrul minim *TA* precum 70 la 69; tangenta unghiului *CTP* ar fi către tangenta unghiului mişcării medii calculate de la cvadratura *C*, precum semidiametrul *TA* al elipsei către semidiametrul *TC* al ei sau 69 la 70. Dar descrierea ariei *CTP*, în înaintarea Lunii de la cvadratură la syzigie, trebuie accelerată în acel raport, ca momentul ei în syzigia Lunii să fie către momentul ei în cvadratură precum 11 073 către 10 973, astfel ca excesul momentului într-un loc oarecare intermediar *P* faţă de momentul în cvadratură să fie precum pătratul sinusului unghiului *CTP*. Ceea ce va avea loc destul de precis, dacă tangenta unghiului *CTP* se micşorează precum rădăcina pătrată a raportului numărului 10 973 către numărul 11 073, adică în raportul numărului 68,6877 către numărul 69. În acest fel tangenta unghiului *CTP* va fi către tangenta mişcării medii precum 68,6877 către 70, şi unghiul *CTP* în octanţi, unde mişcarea medie este 45 grade se va afla de 44°27′28″, care scăzută din unghiul mişcării medii de 45 grade rămîne variaţia maximă 32′32″. Acestea se vor întîmpla astfel dacă Luna, înaintînd de la cvadratură la syzigie, ar descrie unghiul *CTA* de numai 90 de grade. Din cauza mişcării adevărate a Pămîntului, prin care Soarele este dus în mod aparent înainte, Luna, înainte de a ajunge Soarele, descrie unghiul *CTa* mai mare decît un unghi drept în raportul timpului revoluţiei lunare sinodice către timpul revoluţiei periodice, adică în raportul $29^d12^h44'$ către $27^d7^h43'$. Şi în acest fel toate unghiurile în jurul centrului *T* se dilată în acelaşi raport, şi variaţia maximă care altfel ar fi 32′32″, mărită în acelaşi raport, devine 35′10″. Aceasta este mărimea ei la distanţa medie a Soarelui de la Pămînt, neglijînd diferenţele ce pot proveni din curbura orbitei mari şi a acţiunii mai mari a Soarelui asupra Lunii sub formă de seceră sau nouă, cît şi sub formă umflată sau plină. La alte distanţe ale Soarelui de la Pămînt, variaţia maximă este într-un raport care se compune din pătratul timpului revoluţiei sinodice lunare (timpul anului fiind dat) şi inversul cubului distanţei Soarelui de la Pămînt. Şi deci în apogeul Soarelui, variaţia maximă este de 33′14″ şi în perigeul lui de 37′11″, dacă numai excentricitatea Soarelui este către semidiametrul transversal al orbitei mari precum $16\frac{15}{16}$ către 1000.

Pînă acum am căutat variaţia pe o orbită neexcentrică, în care Luna în octanţii săi totdeauna este la distanţa sa mijlocie de Pămînt. Dacă Luna din cauza excentricităţii sale, se află la o distanţă mai mare sau mai mică de Pămînt decît ar fi situată pe această orbită, variaţia poate fi cu ceva mai mare sau cu ceva mai mică decît după regula amintită aici: dar las în grija astronomilor să determine din fenomene excesul sau lipsa.

PROPOZIŢIA XXX. PROBLEMA XI

Să aflăm mişcarea orară a nodurilor Lunii pe o orbită circulară.

Fie *S* Soarele, *T* Pămîntul, *P* Luna, *NPn* orbita Lunii, *Npn* urma orbitei pe planul eclipticei *N*, *n* nodurile, *nTNm* linia nodurilor prelungită la infinit; *PI*, *PK* perpendicularele coborîte pe liniile *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculara coborîtă pe planul eclipticei; *A*, *B* syzigiile Lunii în planul eclipticei; *AZ* perpendiculara pe linia nodurilor *Nn*; *Q*, *q* cvadraturile Lunii în planul eclipticei, şi *pK* perpendiculara pe linia *Qq* situată între cvadraturi.

Forţa Soarelui ce perturbă mişcarea Lunii (potrivit propoziţiei XXV) este dublă, una proporţională cu linia *LM* în figura acelei propoziţii, cealaltă cu linia *MT*. Şi Luna prin forţa dintîi este atrasă spre Pămînt, prin cea din urmă spre Soare în direcţia unei linii paralele cu dreapta *ST* dusă de la Pămînt la Soare. Prima forţă *LM* acţionează în direcţia planului orbitei lunare, şi de aceea nu schimbă de loc poziţia planului. Prin urmare aceasta trebuie neglijată. Forţa din urmă *MT* prin care planul orbitei lunare e perturbat este aceeaşi cu forţa 3 *PK* sau 3 *IT*. Şi această forţă (potrivit propoziţiei XXV) este către forţa cu care Luna se poate învîrti în mod uniform pe un cerc în jurul Pămîntului în repaus în timpul său periodic, precum 3 *IT* către raza cercului înmulţită cu numărul 178,725 sau precum *IT* către raza înmulţită cu 59,575. De altfel în acest calcul, şi în toate cele ce urmează, consider toate liniile duse de la Lună la Soare ca paralele cu linia dusă de la Pămînt la Soare, fiindcă înclinarea aproape tot atît micşorează toate efectele în unele cazuri, cît le măreşte în altele; şi căutăm mişcările mijlocii ale nodurilor, neglijînd nimicurile de acest fel, care ar complica numai calculul.

Fie acum PM arcul, pe care-l descrie Luna într-un timp dat cît se poate de scurt; și ML linioara a cărei jumătate ar putea-o descrie Luna, sub influența forței menționate $3IT$, în același timp. Să unim PL, MP și să le prelungim pînă în m și l, unde să taie planul eclipticei; și să coborîm perpendiculara PH pe Tm. Și fiindcă dreapta ML e paralelă cu planul eclipticei, și deci nu poate concura cu dreapta ml situată în acel plan, și totuși aceste drepte sînt situate în planul comun $LMPml$; dreptele vor fi paralele și de aceea triunghiurile LMP, lmP vor fi asemenea. Și cum MPm se află în planul orbitei, în care Luna se mișcă în locul P, punctul m va cădea pe linia Nn dusă prin nodurile N, n ale acelei orbite. Și fiindcă forța prin care se naște jumătatea linioarei LM, dacă toată este imprimată împreună și o dată în locul P, ar produce linia întreagă; și ar face ca Luna să se miște pe un arc, a cărui coardă să fie LP, și de aceea ar muta Luna din planul $MPmT$ în planul $LPlT$; mișcarea unghiulară a nodurilor născută de acea forță, va fi egală cu unghiul mTl. Dar ml este către mP, precum ML către MP și deci cum MP este dat pentru că timpul este dat, ml este precum dreptunghiul $ML \times mP$, adică, precum dreptunghiul $IT \times mP$. Și unghiul mTl, dacă unghiul Tml este drept, este precum $\frac{ml}{Tm}$, și de aceea precum $\frac{IT \times Pm}{Tm}$. adică (din cauză că Tm și mP, TP și PH sînt proporționale) precum $\frac{IT \times PH}{TP}$, și deci TP fiind dat, precum $IT \times PH$. Căci dacă unghiul Tml, sau STN este oblic, unghiul mTl va fi mai mic, în raportul sinusului unghiului STN către rază, sau AZ către AT. Deci viteza nodurilor este precum $IT \times PH \times AZ$, sau precum produsul sinusurilor celor trei unghiuri TPI, PTN și STN.

Dacă aceste unghiuri, nodurile fiind în cvadraturi și Luna în syzigii, sînt drepte, linioara ml se va îndepărta la infinit, și unghiul mTl va deveni egal cu unghiul mPl. Dar în acest caz, unghiul mPl este către unghiul PTM, pe care-l descrie Luna în același timp în mișcarea sa aparentă în jurul Pămîntului, precum 1 către 59,575. Căci unghiul mPl este egal cu unghiul LPM, adică, cu unghiul de abatere a Lunii de la drumul drept, pe care-l poate genera în acel timp dat numai forța solară menționată $3IT$, dacă ar înceta gravitatea Lunii; și unghiul PTM este egal cu unghiul de abatere al Lunii de la drumul drept, pe care forța aceea, cu care Luna este reținută pe orbita sa, ar putea-o genera în același timp, dacă ar înceta forța solară $3\ IT$. Și aceste forțe, după cum am spus mai sus, sînt între ele precum 1 către 59,575. Prin urmare cum mișcarea medie orară a Lunii față de stelele fixe este $32' \ 56'' \ 27''' \ 12 \frac{1}{2}^{IV}$, mișcarea orară a nodului în acest caz va fi de $33'' \ 10''' \ 33^{IV} \ 12^{V}$. În alte cazuri însă această mișcare orară va fi către $33'' \ 10''' \ 33^{IV} \ 12^{V}$ precum produsul sinusurilor celor trei unghiuri TPI, PTN și STN (sau a distanțelor Lunii de la cvadratură, a Lunii de la nod și a nodului de la Soare) către cubul razei. Și de cîte ori semnul unui unghi oarecare se schimbă din pozitiv în negativ, și din negativ în pozitiv, mișcarea regresivă va trebui să se schimbe în progresivă și cea progresivă în regresivă. De unde rezultă că nodurile progresează de cîte ori Luna se află între una din cvadraturi și nodul cel mai apropiat de cvadratură. În alte cazuri regresează, și din excesul regresului asupra progresului în fiece lună sînt purtate înapoi.

COROLARUL 1. Dacă din extremitățile P și M ale arcului foarte mic PM, se coboară perpendicularele PK, Mk pe linia Qq ce unește cvadraturile

și se prelungesc pînă ce taie linia nodurilor *Nn* în *D* și *d*; mișcarea orară a nodurilor va fi precum aria *MPDd* și pătratul liniei *AZ* luate împreună. Căci fie *PK*, *PH* și *AZ* cele trei sinusuri menționate. Anume *PK* sinusul distanței Lunii de la cvadratură, *PH* sinusul distanței Lunii de la nod, și *AZ* sinusul distanței nodului de la Soare; și viteza nodului va fi precum produsul $PK \times PH \times AZ$. Dar *PT* este către *PK* precum *PM* către *Kk*, și deci *PT* și *PM* fiind date *Kk* este proporțional cu *PK*. De asemenea *AT* este către *PD* precum *AZ* către *PH*, și deci *PH* este proporțional cu dreptunghiul $PD \times AZ$, și unind rapoartele $PK \times PH$ este precum produsul $Kk \times PD \times AZ$, și $PK \times PH \times AZ$ precum $Kk \times PD \times AZ^2$, adică precum aria *PDdM* și AZ^2 luate împreună. Q.E.D.

COROLARUL 2. Într-o poziție oarecare dată a nodurilor, mișcarea orară mijlocie este jumătatea mișcării orare în syzigiile Lunii, și deci este către $16''35'''16^{IV}\,36^{V}$ precum pătratul sinusului distanței nodurilor de la syzigii către pătratul razei, adică precum AZ^2 către AT^2. Căci dacă Luna cu o mișcare uniformă ar descrie semicercul *QAq*, suma tuturor ariilor *PDdM*, în timpul în care Luna merge de la *Q* la *M*, va fi aria *QMdE* care se termină la tangenta *QE* a cercului; și în timp ce Luna atinge punctul *n*, acea sumă va fi aria întreagă *EQAn* pe care o descrie linia *PD*, apoi Luna mergînd de la *n* la *q*, linia *PD* va cădea în exteriorul cercului și va descrie aria *nqe* terminată la tangenta *qe* a cercului; care, deoarece nodurile mai înainte regresau, iar acum progresează, trebuie scăzută din aria de mai înainte, și cum ea este egală cu aria *QEN*, va rămîne semicercul *NQAn*. Prin urmare suma tuturor ariilor *PDdM*, în timp ce Luna descrie un semicerc, este aria semicercului; și suma tuturor în timp ce Luna descrie cercul este aria cercului întreg. Dar aria *PDdM*, cînd luna se află în syzigii, este dreptunghiul cuprins de arcul *PM* și raza *PT*; și suma tuturor ariilor egale cu aceasta, în timp ce Luna descrie un cerc, este dreptunghiul cuprins de circumferința întreagă și raza cercului; și acest dreptunghi, fiind egal cu două cercuri, este de două ori mai mare decît dreptunghiul de mai înainte. Prin urmare nodurile, cu viteza continuată în mod uniform pe care o au syzigiile lunare, ar descrie un spațiu de două ori mai mare decît descriu în realitate; și de aceea mișcarea medie cu care, dacă ar continua în mod uniform, ar putea descrie spațiul descris în realitate cu o mișcare neegală, este jumătatea mișcării pe care o au în syzigiile Lunii. De unde cum mișcarea orară maximă, dacă nodurile se află în cvadraturi, este de $33''10'''33^{IV}\,12^{V}$, mișcarea medie orară în acest caz va fi de $16''35'''16^{IV}\,36^{V}$. Și cum mișcarea orară a nodurilor

totdeauna este precum AZ^2 și aria $PDdM$ luate împreună, și deci mișcarea orară a nodurilor în syzigiile Lunii precum AZ^2 și aria $PDdM$ luate împreună, adică (din cauza că aria $PDdM$ descrisă în syzigii este dată) precum AZ^2, mișcarea mijlocie de asemenea va fi precum AZ^2 și de aceea această mișcare, cînd nodurile se află în afara cvadraturilor, va fi către $16''35'''16^{iv}36^{v}$ precum AZ^2 către AT^2. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XXXI. PROBLEMA XII

Să aflăm mișcarea orară a nodurilor Lunii pe o orbită eliptică.

Fie $Qpmaq$ o elipsă, descrisă cu axa mare Qq, axa mică ab, $QAqB$ cercul circumscris, T Pămîntul în centrul comun al ambelor, S Soarele, p Luna mișcîndu-se pe elipsă, și pm arcul pe care-l descrie într-un timp dat foarte scurt, N și n nodurile unite prin linia Nn; pK și mk perpendicularele coborîte pe axa Qq și prelungite de ambele părți, pînă ce întîlnesc cercul în P și M, și linia nodurilor în D și d. Și dacă Luna, cu raza dusă la Pămînt, descrie o arie proporțională cu timpul, mișcarea orară a nodului pe elipsă va fi precum aria $pDdm$ și AZ^2 luate împreună.

Căci, să presupunem că PF atinge cercul în P, și prelungit întîlnește pe TN în F, și că pf atinge elipsa în p și prelungit întîlnește pe TN în f,

și aceste tangente se întîlnesc pe axa *TQ* în *Y*; că *ML* reprezintă spațiul pe care Luna mișcîndu-se pe un cerc, în timp ce descrie arcul *PM*, sub acțiunea și impulsul forței amintite 3*IT*, sau 3*PK*, l-ar putea descrie cu o mișcare transversală, și că *ml* reprezintă spațiul pe care Luna mișcîndu-se pe o elipsă l-ar putea descrie în același timp, acționată și de forța 3*IT* sau 3*PK*; și să prelungim *LP* și *lp* pînă ce întîlnesc planul eclipticei în *G* și *g*; și să unim *FG* și *fg*, dintre care *FG* prelungit să taie pe *pf*, *pg* și *TG* respectiv în *c*, *e* și *R*, și *fg* prelungit să taie *TQ* în *r*. Deoarece forța 3*IT* sau 3*PK* pe cerc este către forța 3*IT* sau 3*pK* pe elipsă, precum *PK* către *pK*, sau *AT* către *aT*; spațiul *ML* produs de forța de mai înainte va fi către spațiul *ml* născut de forța din urmă, precum *PK* către *pK*, adică, din cauza asemănării figurilor *PYKp* și *FYRc*, precum *FR* către *cR*. Dar *ML* este către *FG* (din cauza asemănării triunghiurilor *PLM*, *PGF*) precum *PL* către *PG*, adică (deoarece *Lk*, *PK*, *GR* sînt paralele) precum *pl* către *pe*, adică (triunghiurile *plm*, *cpe* fiind asemenea) precum *lm* către *ce*; și invers, precum *LM* către *lm*, sau *FR* către *cR*, tot așa *FG* către *ce*. Și de aceea dacă *fg* este către *ce*, precum *fY* către *cY*, adică precum *fr* către *cR* (adică, precum *fr* către *FR* și *FR* către *cR* luate împreună, adică, precum *fT* către *FT* și *FG* către *ce* luate împreună) deoarece raportul *FG* către *ce* scăzute de ambele părți lasă rapoartele *fg* către *FG* și *fT* către *FT*, va fi *fg* către *FG* precum *fT* către *FT*; și de aceea unghiurile, pe care le-ar subîntinde *FG* și *fg* la Pămîntul *T*, ar fi egale între ele. Dar acele unghiuri (din cauza celor expuse în propoziția precedentă) sînt mișcările nodurilor, în timpul în care Luna descrie pe cerc arcul *PM*, pe elipsă arcul *pm*: și de aceea mișcările nodurilor pe cerc și pe elipsă ar fi egale între ele. Acestea se întîmplă astfel, dacă *fg* este către *ce* precum *fY* către *cY*, adică, dacă *fg* este egală cu $\frac{ce \times fY}{cY}$. Dar din cauză că triunghiurile *fgp*, *cep* sînt asemenea, *fg* este către *ce* precum *fp* către *cp*; și deci *fg* este egal $\frac{ce \times fp}{cp}$; și de aceea unghiul, pe care *fg* îl subîntinde de fapt, este către unghiul de mai înainte, pe care-l subîntinde *FG*, adică, mișcarea nodurilor pe elipsă către mișcarea nodurilor pe cerc, precum acest *fg* sau $\frac{ce \times fp}{cp}$ către *fg* de mai înainte sau $\frac{ce \times fY}{cY}$, adică, precum acest $fp \times cY$ către $fY \times cp$, sau *fp* către *fY* și *cY* către *cp*, adică, dacă *ph* paralelă cu *TN* întîlnește *FP* în *h*, precum *Fh* către *FY* și *FY* către *EP*; adică, precum *Fh* către *FP* sau *Dp* către *DP*; și deci precum aria *Dpmd* către aria *DPMd*. Și de aceea cum (potrivit corolarului 1, propoziția XXX) aria din urmă și AZ^2 luate împreună sînt proporționale cu mișcarea orară a nodurilor pe cerc, aria dinainte și AZ^2 luate împreună vor fi proporționale cu mișcarea orară a nodurilor pe elipsă. Q.E.D.

COROLAR. De aceea cum, în poziția dată a nodurilor, suma tuturor ariilor *pDdm*, în timpul în care Luna trece de la cvadratură la un loc oarecare *m*, este aria *mpQEd*, care se termină la tangenta *QE* a elipsei; și suma tuturor ariilor, în revoluția întreagă, este aria elipsei întregi; mișcarea mijlocie a nodurilor pe elipsă va fi către mișcarea mijlocie a nodurilor pe cerc, precum elipsa către cerc; precum *Ta* către *TA* sau 69 către 70. Și de aceea cum (potrivit corolarului 2, propoziția XXX) mișcarea mijlocie orară a nodurilor pe cerc este către 16″ 35‴ 16^{IV} 36^{V} precum AZ^2 către AT^2, dacă luăm

unghiul 16″ 21‴ 3^{IV} 30^{V} către unghiul 16″ 35‴ 16^{IV} 36^{V} precum 69 către 70, mișcarea mijlocie orară a nodurilor pe elipsă va fi către 16″21‴ 3^{IV} 30^{V} precum AZ^2 către AT^2; adică precum pătratul sinusului distanței nodului de la Soare către pătratul razei.

De altfel Luna, cu raza dusă la Pămînt, descrie aria mai repede în syzigii decît în cvadraturi și de aceea cînd timpul în syzigii se scurtează în cvadraturi se lungește și împreună cu timpul mișcarea nodurilor se mărește și se micșorează. Dar momentul ariei în cvadraturile Lunei era către momentul ei în syzigii precum 10 973 către 11 073, și de aceea momentul mijlociu în octanți este către excesul în syzigii, și lipsa în cvadraturi, precum semisuma 11 023 a numerelor către semidiferența lor 50. De unde cum timpul Lunii în diversele particule egale ale orbitei este în raport invers cu viteza ei, timpul mijlociu în octanți va fi către excesul timpului în cvadraturi, și lipsa în syzigii provenită din această cauză, precum aproximativ 11 023 către 50. Trecînd însă de la cvadraturi la syzigii, găsesc că excesul momentelor ariei în diversele locuri, față de momentul minim în cvadraturi, este aproximativ precum pătratul sinusului distanței Lunii de cvadraturi; și de aceea diferența dintre momentul într-un loc oarecare și momentul mijlociu în octanți, este precum diferența dintre pătratul sinusului distanței Lunii de cvadraturi și pătratul sinusului de 45 de grade, sau jumătatea pătratului razei; și creșterea timpului în diversele locuri între octanți și cvadraturi, și descreșterea lui între octanți și syzigii, este în același raport. Dar mișcarea nodurilor, în timp ce Luna parcurge diverse părți egale ale orbitei se accelerează sau întîrzie în raportul pătratului timpului. Căci această mișcare, în timp ce Luna parcurge PM (celelalte condiții fiind aceleași) este precum ML, și ML este precum pătratul timpului. De aceea mișcarea nodurilor în syzigii, efectuată în timp ce Luna parcurge părți date ale orbitei, scade precum pătratul raportului numărului 11 073 către numărul 11 023; și descreșterea este către mișcarea rămasă precum 100 către 10 973, iar către mișcarea întreagă aproximativ precum 100 către 11 073. Dar descreșterea în locurile dintre octanți și syzigii, și creșterea în locurile dintre octanți și cvadraturi, este aproximativ către această descreștere precum mișcarea întreagă în acele locuri către mișcarea întreagă în syzigii și diferența dintre pătratul sinusului distanței Lunii la cvadratură și jumătatea pătratului razei către jumătatea pătratului razei luate împreună. De unde dacă nodurile sînt în cvadraturi, și luăm două locuri la distanțe egale de o parte și de alta a octantului, și alte două distanțe cu același interval de la syzigii și cvadraturi, și din descreșterile mișcărilor în două locuri, între syzigii și octant, se scad creșterile mișcărilor în celelalte două locuri, care sînt între octant și cvadratură: descreșterea rămasă va fi egală cu descreșterea în syzigii: după cum se poate afla ușor prin calcul. Și deci descreșterea mijlocie, care trebuie scăzută din mișcarea mijlocie a nodurilor, este a patra parte a descreșterii în syzigii. Mișcarea întreagă orară a nodurilor în syzigii, cînd se presupunea că Luna descrie cu raza dusă la Pămînt o arie proporțional cu timpul, era 32″ 42‴ 7^{IV}. Și descreșterea mișcării nodurilor în timp ce Luna acum descrie mai repede același spațiu, am spus că este către această mișcare precum 100 către 11 073; și deci descreșterea este 17‴ 43^{IV} 11^{V}, din care a patra parte 4‴ 25^{IV} 48^{V} scăzută din mișcarea orară mijlocie aflată

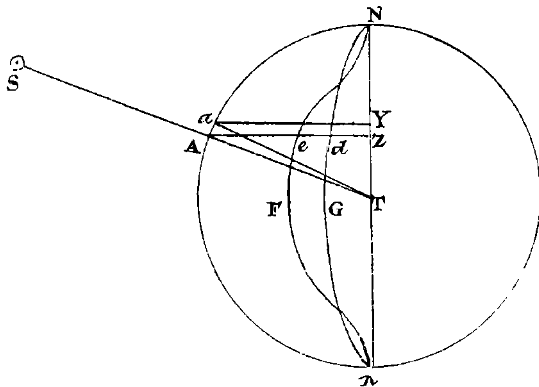
mai sus 16″21‴3^{IV} 30^{V}, rămîne 16″16‴$37^{IV}$$42^{V}$ mişcarea mijlocie orară corectă.

Dacă nodurile se află în afară de cvadraturi, şi considerăm două locuri la distanţe egale de o parte şi de alta, de la syzigii; suma mişcării nodurilor, cînd Luna se află în aceste locuri va fi către suma mişcărilor, cînd Luna se află în aceleaşi locuri şi nodurile în cvadraturi, precum AZ^2 către AT^2. Şi descreşterile mişcărilor, provenite din cauzele deja expuse, vor fi între ele precum mişcările, şi deci mişcările rămase vor fi între ele precum AZ^2 către AT^2 şi mişcările mijlocii precum mişcările rămase. Prin urmare mişcarea mijlocie orară corectă este în orice poziţie o nodurilor către 16″ 16‴ 37^{IV} 42^{V} precum AZ^2 către AT^2; adică precum pătratul sinusului distanţei nodurilor de la syzigii către pătratul razei.

PROPOZIŢIA XXXII. PROBLEMA XIII

Să aflăm mişcarea mijlocie a nodurilor Lunii.

Mişcarea medie anuală este suma tuturor mişcărilor orare medii de peste an. Să ne închipuim că nodul se află în N, şi că după fiecare oră completă este atras spre locul său de mai înainte; încît cu toată mişcarea sa proprie, îşi păstrează totdeauna poziţia dată faţă de stelele fixe. În acest timp însă Soarele S, din cauza mişcării Pămîntului, progresează de la nod şi completează cursul aparent anual în mod uniform. Fie însă Aa arcul dat foarte mic, pe care o dreaptă TS dusă totdeauna la Soare, prin intersecţia sa şi a cercului NAn, îl descrie într-un timp dat cît se poate de mic: şi mişcarea orară medie (din cele mai înainte arătate) va fi precum AZ^2, adică (din cauza că AZ, ZY sînt proporţionale) precum dreptunghiul cuprins de AZ şi ZY, adică, precum aria $AZYa$. Şi suma tuturor mişcărilor orare mijlocii de la început, precum suma tuturor ariilor $aYZA$ adică, precum aria NAZ. Dar aria maximă $aYZA$ este egală cu dreptunghiul cuprins de arcul Aa şi raza cercului; şi de aceea suma tuturor dreptunghiurilor în cercul întreg către suma aceluiaşi număr de maxime, precum aria cercului întreg către dreptunghiul cuprins de circumferinţa întreagă şi rază, adică, precum 1 către 2. Dar mişcarea orară, corespunzînd dreptunghiului maxim, era de 16″ 16‴ 37^{IV} 42^{V}. Şi această mişcare, într-un an sideral întreg de 365 zile 6 ore 9 minute este de 39° 38′ 7″ 50‴. Şi deci jumătatea ei 19° 49′ 3″ 55‴ este mişcarea medie a nodurilor corespunzătoare cercului întreg. Şi mişcarea nodurilor, în timp ce Soarele merge de la N la A, este către 19° 49′ 3″ 55‴ precum aria NAZ către cercul întreg.



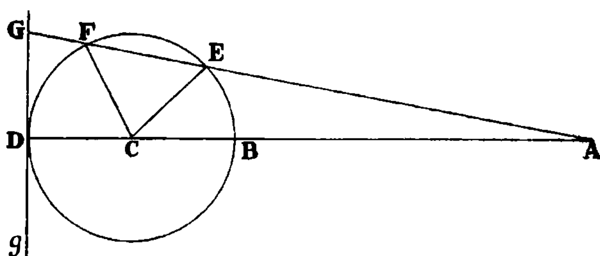
Acestea se întîmplă astfel în ipoteza, că nodul după fiecare oră este readus în locul de mai înainte, astfel că Soarele la sfîrșitul unui an întreg se reîntoarce în același nod de la care a plecat la început. Într-adevăr, din cauza mișcării nodului, Soarele revine mai repede la nod și trebuie calculată scurtarea timpului. Cum Soarele într-un an întreg face 360 grade, și nodul prin mișcarea maximă în același timp ar face 39° 38′ 7″ 50‴, sau 39,6355 grade; și mișcarea mijlocie a nodului într-un loc oarecare N este către mișcarea sa mijlocie în cvadraturile sale, precum AZ^2 către AT^2: mișcarea Soarelui va fi către mișcarea nodului în N precum $360\,AT^2$ către $39{,}6355AZ^2$; adică, precum $9{,}0827646AT^2$ către AZ^2. De unde dacă împărțim circumferința cercului întreg NAn în particule egale Aa, timpul în care Soarele ar parcurge particula Aa, dacă cercul ar fi în repaus, va fi către timpul în care parcurge aceeași particulă, dacă cercul se rotește împreună cu nodurile în jurul centrului T, în raport invers cu $9{,}0827646AT^2$ către $9{,}0827646\,AT^2 + AZ^2$. Căci timpul este în raport invers cu viteza cu care este parcursă particula, și această viteză este suma vitezei Soarelui și a nodului. Prin urmare dacă timpul, în care Soarele fără mișcarea nodului ar parcurge arcul NA, se reprezintă prin NTA, și particula timpului în care ar parcurge arcul foarte mic Aa, se exprimă prin particula ATa a sectorului; și (coborînd perpendiculara aY pe Nn) dacă pe AZ luăm dZ, de o astfel de lungime încît dreptunghiul format de dZ și ZY să fie către particula ATa precum AZ^2 către $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, adică, dZ să fie către $\frac{1}{2}$ AZ precum AT^2 către $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$; dreptunghiul format de dZ și ZY va reprezenta descreșterea timpului născută din mișcarea nodului, în timpul întreg în care arcul Aa este parcurs. Și dacă punctul d atinge curba $NdGn$, aria curbilinie NdZ va fi descreșterea întreagă în timp ce este descris arcul întreg NA; și de aceea excesul sectorului NAT față de aria NdZ va fi timpul întreg. Și fiindcă mișcarea nodului într-un timp mai mic este mai mică în raport cu timpul, va trebui ca și aria $AaYZ$ să scadă în același raport. Ceea ce se va întîmpla dacă luăm pe AZ lungimea eZ, care este către lungimea AZ precum AZ^2 către $9{,}0827646AT^2+AZ^2$. Căci astfel dreptunghiul format de eZ și ZY va fi către aria $AZYa$ precum descreșterea timpului, în care a descrie arcul Aa, către timpul întreg în care ar fi parcurs, dacă nodul ar fi în repaus; și de aceea dreptunghiul acela ar corespunde descreșterii mișcării nodului. Și dacă punctul e atinge curba $NeFn$, aria întreagă NeZ, care este suma tuturor descreșterilor, va corespunde descreșterii întregi, în timp ce este parcurs arcul AN; și aria rămasă NAe va corespunde mișcării rămase, care este mișcarea adevărată a nodului, în timp ce arcul întreg NA este parcurs prin mișcările unite ale Soarelui și nodului. Dar aria semicercului este către aria figurii $NeFn$, aflată prin metoda seriilor infinite, aproximativ precum 793 către 60. Iar mișcarea care corespunde cercului întreg era de 19° 49′ 3″ 55‴ și de aceea mișcarea corespunzătoare figurii duble $NeFn$ este 1° 29′ 58″ 2‴. Scăzînd-o din mișcarea de mai sus rămîne 18° 19′ 5″ 53‴ pentru mișcarea întreagă a nodului față de stelele fixe în intervalul dintre conjuncțiile sale cu Soarele; și scăzînd această mișcare din mișcarea anuală de 360 grade a Soarelui, rămîne 341° 40′ 54″ 7‴ pentru mișcarea Soarelui între aceleași conjuncțiuni. Dar această mișcare este către mișcarea anuală de 360 grade precum mișcarea nodului aflată mai sus de 18° 19′ 5″ 53‴ către mișcarea

lui anuală, care de aceea va fi de 19° 18′ 1″ 23‴. Aceasta este mișcarea medie a nodurilor într-un an sideral. Aceeași din tabelele astronomice este de 19°21′21″50‴. Diferența este mai mică decît a treia sută parte a mișcării întregi și se pare că provine din excentricitatea orbitei lunare și din înclinația față de planul eclipticei. Prin excentricitatea orbitei mișcarea nodurilor este foarte mult accelerată, și prin înclinația ei la rîndul său este întrucîtva întîrziată, și redusă la viteza justă.

PROPOZIȚIA XXXIII. PROBLEMA XIV

Să aflăm mișcarea adevărată a nodurilor Lunii.

În timpul care este precum aria *NTA — NdZ* (în figura precedentă), mișcarea aceasta este precum aria *NAe*, și deci este dată. Dar din cauza dificultății mari de calcul, este avantajos să ne folosim de următoarea construcție a problemei. Din centrul *C* cu un interval oarecare *CD*, să descriem cercul *BEFD*. Să prelungim *DC* pînă în *A*, ca să fie *AB* către *AC* precum mișcarea medie către jumătatea mișcării adevărate mijlocii, cînd nodurile sînt în cvadraturi, adică precum 19°18′1″23‴ către 19°49′3″55‴ și deci *BC* către *AC* precum diferența mișcărilor 0°31′2″32‴ către mișcarea din urmă 19°49′3″55‴, adică precum 1 către $38\frac{3}{10}$; apoi prin punctul *D* să ducem dreapta infinită *Gg*, care să atingă cercul în *D*; și dacă luăm unghiul *BCE* sau *BCF* egal cu dublul distanței Soarelui de la locul nodului, aflat prin mișcarea medie; și ducem *AE* sau *AF* tăind perpendiculara *DG* în *G*; și luăm unghiul care este către mișcarea întreagă a nodului între syzigiile lui (adică, către 9°11′3″) precum tangenta *DG* către circumferința întreagă a cercului *BED*; și acest unghi (în locul căruia se poate folosi unghiul *DAG*) să-l adunăm la mișcarea medie a nodurilor cînd nodurile trec din cvadraturi în syzigii, și din aceeași mișcare medie să-l scădem cînd trec de la syzigii în cvadraturi: vom avea mișcarea lor adevărată.



Căci mișcarea adevărată astfel aflată va coincide aproximativ cu mișcarea adevărată care se obține reprezentînd timpul prin aria *NTA—NdZ*, și mișcarea nodului prin aria *NAe*; după cum se va constata studiind problema și făcînd calculele. Aceasta este ecuația mișcării semestriale a nodurilor. Există și o ecuație lunară, dar care este foarte puțin necesară pentru aflarea latitudinii Lunii. Căci cum variația înclinării orbitei lunare către planul eclipticei este supusă unei duble inegalități una semestrială și alta lunară; inegalitatea ei lunară și ecuația lunară a nodurilor se tempereazăși se corectează reciproc astfel încît ambele se pot neglija la determinarea latitudinii Lunii.

COROLAR. Din propoziția aceasta și din cea precedentă este clar că nodurile sînt în repaus în syzigiile lor, iar în cvadraturi regresează cu mișcarea

orară de 16″ 19‴ 26^{IV}. Şi că ecuaţia mişcării nodurilor în octanţi este 1° 30. Care toate cadrează perfect cu fenomenele cereşti.

SCOLIE

I. Machin, profesor de astronomie la Gresham şi Henrich Pemberton, independent unul de celălalt, au aflat printr-o altă metodă mişcarea nodurilor. Am menţionat în alt loc această metodă. Şi ambele scrieri, pe care le-am văzut, cuprindeau două propoziţii, şi amîndouă erau concordante între ele. Iar lucrarea lui Machin, deoarece mi-a ajuns repede în mîini, o anexez aici.

DESPRE MIŞCAREA NODURILOR LUNII

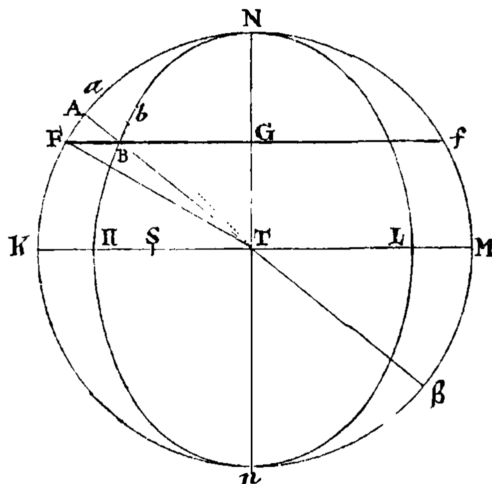
"PROPOZIŢIA I

"Mişcarea mijlocie a Soarelui de la nod, se defineşte prin media geometrică proporţională, dintre mişcarea medie a Soarelui şi mişcarea medie prin care Soarele se îndepărtează mai repede de la nod spre cvadraturi.

"Fie *T* locul Pămîntului, *Nn* linia nodurilor Lunii la un moment oarecare dat, *KTM* dreapta dusă perpendicular pe ea, *TA* dreapta ce se roteşte în jurul centrului cu viteza unghiulară cu care se îndepărtează Soarele şi nodurile unul de altul, astfel că unghiul dintre dreapta în repaus *Nn* şi cea în rotire *TA*, să fie totdeauna egal cu distanţa locurilor Soarelui şi nodului. Căci dacă o dreaptă oarecare *TK* se împarte în părţile *TS* şi *SK* care sînt precum mişcarea orară medie a Soarelui către mişcarea orară medie a nodului în cvadraturi, şi dacă se ia dreapta *TH* medie proporţională între partea *TS* şi întregul *TK*, această dreaptă va fi proporţională cu mişcarea medie a Soarelui de la nod.

"Căci să descriem cercul *NKnM* din centrul *C* cu raza *TK*, şi din acelaşi centru cu semiaxele *TH* şi *TN* să descriem elipsa *NHnL*, şi în timpul în care Soarele se îndepărtează de nod prin arcul *Na*, dacă ducem dreapta *Tba*, aria sectorului *NTa* va exprima suma mişcărilor nodului şi a Soarelui în acelaşi timp. Fie deci arcul foarte mic *aA* pe care-l descrie dreapta *Tba* rotindu-se conform legii menţionate în mod uniform într-un interval de timp dat, şi sectorul foarte mic *TAa* va fi precum suma vitezelor cu care Soarele şi nodul sînt purtate fiecare separat în acel timp. Dar viteza Soarelui este aproape uniformă, astfel că mica lui inegalitate abia poate produce vreo variaţie în mişcarea medie a nodurilor. Cealaltă parte a acestei sume anume viteza nodului în valoarea sa mijlocie, creşte cu îndepărtarea de la syzigii în raportul pătratului sinusului distanţei de Soare; potrivit corolarului propoziţiei 31, Cartea a III-a a Principiilor şi fiind maximă în cvadraturi faţă de Soare în *K* ea capătă acelaşi raport faţă de viteza Soarelui precum *SK* către *TS* adică precum (diferenţa pătratelor lui *TK* şi *TH* sau) dreptunghiul *KHM* către pătratul lui *TH*. Dar elipsa *NBH* împarte sectorul *ATa* care exprimă suma acestor două viteze, în două părţi *ABba* şi *BTb* proporţionale cu vitezele.

Căci să prelungim *BT* pînă în punctul β al cercului, și din punctul *B* să coborîm pe axa cea mare perpendiculara *BG*, care prelungită de ambele părți va întîlni cercul în punctele *F* și *f*, și fiindcă spațiul *ABba* este către sectorul *TBb* precum dreptunghiul *AB*β către pătratul lui *BT* (căci dreptunghiul este egal cu diferența pătratelor lui *TA* și *TB* din cauză că dreapta *A*β este tăiată în mod egal și neegal în *T* și *B*). Prin urmare acest raport cînd spațiul *ABba* este maximum în *K*, va fi egal cu raportul dreptunghiului *KHM* către pătratul lui *HT*, dar viteza maximă medie a nodului era către viteza Soarelui în acest raport. Așadar în cvadraturi sectorul *ATa* se împarte în părți proporționale cu vitezele. Și fiindcă dreptunghiul *KHM* este către pătratul lui *HT* precum *FBf* către pătratul lui *BG* și dreptunghiul *AB*β este egal cu dreptunghiul *FBf*. Deci aria mică *ABba* la valoarea ei maximă este către sectorul rămas *TBb*, precum dreptunghiul *AB*β către pătratul lui *BG*. Dar raportul acestor arii mici totdeauna era precum dreptunghiul *AB*β către pătratul lui *BT*; și de aceea aria mică *ABba* în locul *A* este mai mică decît aria mică asemenea ei din cvadraturi, precum pătratul raportului lui *BG* către *BT* adică precum pătratul sinusului distanței Soarelui de la nod. Și de aceea suma tuturor ariilor mici *ABba* anume spațiul *ABN* va fi precum mișcarea nodului în timpul în care Soarele se depărtează de nod pe arcul *NA*. Și spațiul rămas anume sectorul eliptic *NTB* va fi precum mișcarea medie a Soarelui în același timp. Și de aceea fiindcă mișcarea mijlocie anuală a nodului este aceea care are loc în timpul în care Soarele își încheie perioada sa, mișcarea medie a nodului dinspre Soare va fi către mișcarea mijlocie a Soarelui, precum aria cercului către aria elipsei, adică precum dreapta *TK* către dreapta *TH* media proporțională între *TK* și *TS*; sau ceea ce revine la același lucru, precum media proporțională *TH* către dreapta *TS*.

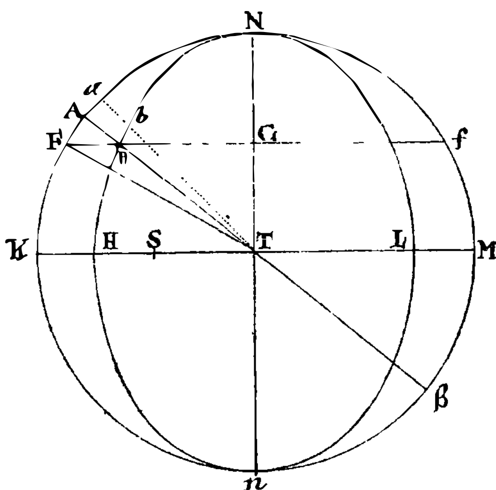


"PROPOZIȚIA II

"*Fiind dată mișcarea medie a nodurilor Lunii, să aflăm mișcarea adevărată.*

"Fie unghiul *A* distanța Soarelui de la locul mijlociu al nodului, sau mișcarea medie a Soarelui de la nod. Atunci dacă luăm unghiul *B* a cărui tangentă este către tangenta unghiului *A* precum *TH* către *TK*, adică în raportul rădăcinii pătrate a mișcării mijlocii orare a Soarelui către mișcarea mijlocie orară a Soarelui de la nodul care se află în cvadraturi; unghiul *B* va fi distanța Soarelui de la locul adevărat al nodului. Căci să unim *FT* și prin

demonstrația propoziției de mai sus unghiul *FTN* va fi distanța Soarelui de la locul mijlociu al nodului, iar unghiul *ATN* distanța de la locul adevărat, și tangentele acestor unghiuri sînt între ele precum *TK* către *TH.*



"COROLAR. De aici unghiul *FTA* este ecuația nodurilor Lunii, și sinusul acestui unghi cînd e maxim în octanți, este către rază precum *KH* către *TK*+*TH.* Dar sinusul acestei ecuații într-un alt loc oarecare *A* este către sinusul maxim, precum sinusul sumei unghiurilor *FTN*+*ATN* către rază: adică este aproape precum sinusul distanței duble a Soarelui de la locul mediu al nodului (anume 2*FTN*) către rază.

"SCOLIE

"Dacă mișcarea mijlocie orară a nodurilor în cvadraturi este 16″ 16‴ 37^{IV} 42^{V} adică în anul întreg sideral 39° 38′ 7″ 50‴ va fi *TH* către *TK* precum rădăcina pătrată a raportului numărului 9,0827646 către numărul 10,0827646, adică precum 18,6524761 către 19,6524761. Și de aceea *TH* către *HK* precum 18,6524761 către 1, adică precum mișcarea Soarelui într-un an sideral către mișcarea medie a nodului 19° 18′ 1″ $23\frac{2}{3}$‴

"Dar dacă mișcarea medie a nodurilor Lunți în 20 de ani iuliani este 386°50′15″ după cum se deduce din observațiile folosite în teoria Lunii: mișcarea medie a nodurilor într-un an sideral va fi 19° 20′ 31″58‴. Și *TH* va fi către *HK* precum 360° către 19°20′31″58‴, adică precum 18,61214 către 1, de unde mișcarea medie orară a nodurilor în cvadraturi va fi 16″ 18‴ 48^{IV}. Și ecuația maximă a nodurilor în octanți 1° 29′ 57″."

PROPOZIȚIA XXXIV. PROBLEMA XV

Să aflăm variația orară a înclinării orbitei lunare față de planul eclipticei.

Fie *A* și *a* syzigiile; *Q* și *q* cvadraturile; *N* și *n* nodurile; *P* locul Lunii pe orbita sa; *p* urma acestui loc pe planul eclipticei, și *mTl* mișcarea momentană a nodurilor ca mai sus. Și dacă pe linia *Tm* coborîm perpendiculara *PG*, *pG*, și să o prelungim pînă ce întîlnește pe *Tl* în *g*, și să unim și Pg; unghiul *PGp* va fi înclinația orbitei lunare față de planul eclipticei, cînd Luna se află în *P*; și unghiul *Pgp* înclinația ei după trecerea unui interval de timp; și deci unghiul *CPg* va fi variația momentană a înclinației.

Dar unghiul *GPg* este către unghiul *GTg* precum *TG* către *PG* și *Pp* către *PG* luate împreună. Și de aceea dacă pentru intervalul de timp luăm o oră; deoarece unghiul *GTg* (potrivit propoziției XXX) este către unghiul 33′ 10″ 33^{IV}

precum $IT \times PG \times AZ$ către AT^3 unghiul GPg (sau variaţia înclinaţiei orare) va fi către unghiul 33″ 10‴ 33^{IV} precum $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ către AT^3. Q. E. I.

Acestea se întîmplă astfel în ipoteza că Luna se învîrteşte în mod uniform pe o orbită circulară. Căci dacă orbita e eliptică, mişcarea mijlocie a nodurilor se va micşora în raportul axei mai mici către axa mai mare; după cum s-a explicat mai sus. Şi în acelaşi raport se va micşora şi variaţia înclinaţiei.

COROLARUL 1. Dacă pe Nn ridicăm perpendiculara TF, şi pM este mişcarea orară a Lunei în planul eclipticei; şi perpendicularele pK, Mk coborîte pe QT şi prelungite de ambele părţi întîlnesc pe TF în H şi h; IT va fi către AT precum Kk către Mp, şi TG către Hp precum TZ către AT, şi deci $IT \times TG$ egal cu $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, adică egal cu aria $HpMh$ înmulţită cu raportul $\frac{TZ}{Mp}$; şi de aceea variaţia orară a înclinaţiei către 33″ 10‴ 33^{IV} precum $HpMh$ înmulţit cu $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ către AT^3.

COROLARUL 2. Şi deci dacă Pămîntul şi nodurile după fiecare oră completă sînt îndepărtate de noile lor locuri, şi sînt readuse instantaneu în locurile lor anterioare, astfel ca poziţia lor pentru o lună întreagă periodică, să rămînă dată; variaţia întreagă a înclinaţiei în timpul acelei luni va fi către 33″ 10‴ 33^{IV} precum agregatul tuturor ariilor $HpMh$, produse în

revoluţia punctului p, şi sub semnele proprii $+$ şi $-$ unite, înmulţit cu $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ către $Mp \times AT^3$, adică precum cercul întreg $QAqa$ înmulţit cu $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ către $Mp \times AT^3$, adică precum circumferinţa $QAqa$ înmulţită cu $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ către $2Mp \times AT^2$.

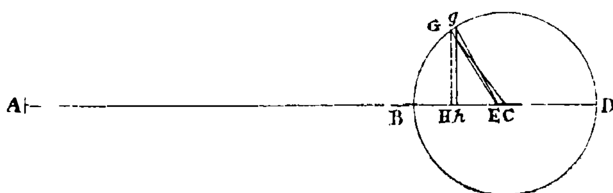
COROLARUL 3. Prin urmare în poziţia dată a nodurilor, variaţia orară mijlocie, din care continuată în mod uniform în timp de o lună se poate naşte variaţia lunară, este către 33″ 10‴ 33^{IV} precum $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ către $2AT^2$, sau precum $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ către $PG \times 4AT$, adică (cum Pp este către PG precum sinusul înclinaţiei menţionate către rază, şi $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ este către $4AT$ precum sinusul unghiului dublu ATn către cvadruplul razei) precum sinusul aceleiaşi înclinaţii înmulţit cu sinusul dublului distanţei nodurilor de la Soare către cvadruplul pătratului razei.

COROLARUL 4. Deoarece variaţia orară a înclinaţiei cînd nodurile se află în cvadraturi, este (potrivit acestei propoziţii) către unghiul 33″ 10‴ 33^{IV} precum $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ către AT^3, adică, precum $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ către $2AT$; adică, precum sinusul distanţei duble a Lunii de la cvadraturi înmulţit cu $\frac{Pp}{PG}$ către dublul razei: suma tuturor variaţiilor orare, în timp ce luna în această situaţie a nodurilor trece din cvadratură în syzigie (adică, în spaţiul orar $177\frac{1}{6}$ ore) va fi către suma a tot atîtea unghiuri 33″ 10‴ 33^{IV}, sau 5878″, precum suma tuturor sinusurilor a distanţei duble a Lunii de la cvadraturi înmulţită cu $\frac{Pp}{PG}$ către suma a tot atîtea diametre; adică precum diametrul înmulţit cu $\frac{Pp}{PG}$ către ciircumferinţă; adică dacă înclinaţia este 5°1′, precum $7 \times \frac{874}{10\,000}$ către 22, sau 278 la 10 000. Deci întreagă variaţia compusă din suma tuturor variaţiilor orare în timpul menţionat este de 163″, sau 2′ 43″.

PROPOZIŢIA XXXV. PROBLEMA XVI

Într-un timp dat să aflăm înclinaţia orbitei lunare faţă de planul eclipticei.

Fie AD sinusul înclinaţiei maxime, şi AB sinusul înclinaţiei minime. Să bisectăm BD în C, şi din centrul C, cu intervalul BC să descriem cercul BGD. Pe AC să luăm CE către EB în raportul care-l are EB către $2BA$: şi dacă la timpul dat se construieşte unghiul AEG egal cu dublul distanţei nodurilor de la cvadraturi şi pe AD coborîm perpendiculara GH: AH va fi sinusul înclinaţiei căutate.



Căci GE^2 este egală cu $GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2 - 2BH \times BE = BE^2 + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Şi deci $2EC$ fiind dat, GE^2 este proporţional cu AH. Fie acum AEg dublul distanţei nodurilor de la cvadraturi după un moment oarecare complet de timp, şi arcul Gg din cauza unghiului dat GEg va fi precum distanţa GE. Dar Hh este către Gg precum GH către GC, şi de aceea Hh este precum dreptunghiul $GH \times Gg$, sau $GH \times GE$; adică, precum $\frac{GH}{GE} \times GE^2$ sau $\frac{GH}{GE} \times AH$, adică, precum AH şi sinusul unghiului AEG luate împreună. Prin urmare dacă AH într-un caz oarecare este sinusul înclinaţiei ea se va mări cu aceleaşi creşteri odată cu sinusul înclinaţiei, potrivit corolarului 3 al propoziţiei de mai sus, şi de aceea va rămîne totdeauna egal cu sinusul. Dar AH, cînd punctul G cade pe unul din cele două puncte B sau D, este egal cu acest sinus, şi de aceea rămîne totdeauna egal cu el. Q.E.D.

În această demonstraţie am presupus că unghiul BEG, care e dublul distanţei nodurilor de la cvadraturi, creşte în mod uniform. Căci e de prisos să mă extind asupra tuturor inegalităţilor mărunte. Să ne închipuim acum că unghiul BEG este drept, şi că în acest caz Gg este creşterea orară a distanţei duble a nodurilor şi a Soarelui una de alta; şi variaţia orară a înclinaţiei în acelaşi caz (potrivit corolarului 3, propoziţia ultimă) va fi către $33'' \; 10''' \; 33^{IV}$ precum dreptunghiul format de înclinarea sinusului AH şi a sinusului unghiului drept BEG, care e distanţa dublă a nodurilor de la Soare, către cvadruplul pătratului razei; adică precum sinusul înclinaţiei medii AH către cvadruplul razei; adică, (cum înclinaţia mijlocie este cam $5° \; 8\frac{1'}{2}$) precum sinusul ei 896 către cvadruplul razei 40000, sau precum 224 către 10000. Dar variaţia întreagă, corespunzătoare diferenţei BD a sinusurilor, către variaţia orară precum diametrul BD către arcul Gg; adică, precum diametrul BD către semicircumferinţa BGD şi timpul orar $2079\frac{7}{10}$, în care nodul trece de la cvadraturi la syzigii, către o oră luate împreună; adică, precum 7 către 11 şi $2079\frac{7}{10}$ către 1. De aceea dacă se compun toate aceste rapoarte variaţia întreagă BD va fi către $33'' \; 10''' \; 33^{IV}$ precum $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ către 110000, adică, precum 29645 către 1000, şi deci variaţia BD va deveni $16' \; 23\frac{1''}{2}$.

Aceasta este variaţia maximă a înclinaţiei întrucît nu luăm în consideraţie locul Lunii pe orbita sa. Căci înclinaţia, dacă nodurile se află în syzigii, nu se schimbă de loc prin variaţia poziţiei Lunii. Dar dacă nodurile sînt în cvadraturi, înclinaţia este mai mică atunci cînd Luna se află în syzigii, decît cînd ea se află în cvadraturi cu un exces de $2' \; 43''$; după cum am arătat în corolarul al patrulea al propoziţiei de mai sus. Şi variaţia medie întreagă BD micşorată cu $1' \; 21\frac{1''}{2}$ jumătatea acestui exces în cvadraturile lunare este de $15' \; 2''$, iar mărită în syzigiile sale este $17'45''$. Prin urmare dacă Luna se află în syzigii, variaţia întreagă în întrecerea nodurilor de la cvadraturi la syzigii va fi $17'45''$: şi deci dacă înclinaţia, cînd nodurile se află în syzigii este de $5° \; 17' \; 20''$; aceeaşi, cînd nodurile sînt în cvadraturi şi Luna în syzigii, va fi $4° \; 59' \; 35''$. Prin observaţii se confirmă că acestea se întîmplă astfel.

Dacă acum înclinația orbitei, cînd Luna se află în syzigii și nodurile oriunde; fie *AB* către *AD* precum sinusul unghiului de 4° 59′ 35″ către sinusul unghiului de 5° 17′ 20″, și să luăm unghiul *AEG* egal cu distanța dublă a nodurilor de la cvadraturi; și *AH* va fi sinusul înclinației căutate. Cu această înclinație a orbitei este egală înclinația ei cînd Luna e la 90 grade distanță de noduri. În alte poziții ale Lunii inegalitatea lunară, pe care o admite variația înclinației, se compensează în calculul latitudinii Lunii, și întrucîtva e anihilată de inegalitatea lunară a mișcării nodurilor (după cum am spus mai sus) și deci în calculul latitudinii poate fi neglijată.

SCOLIE

Prin acest calcul al mișcărilor lunare am voit să arăt că mișcările lunare pot fi calculate prin teoria gravității din cauzele sale. Prin aceeași teorie am aflat afară de acestea că ecuația anuală a mișcării medii a Lunii provine din dilatația deosebită a orbitei Lunii prin forța Soarelui, potrivit corolarului 6, propoziția LXVI, Cartea I. Această forță e mai mare în perigeul Soarelui, și dilată orbita Lunii; în apogeul ei este mai mică și permite ca orbita să se contracteze. Pe orbita dilatată, Luna se rotește mai încet, pe cea contractată mai repede și ecuația anuală prin care se compensează această negalitate în apogeul și perigeul Soarelui e nulă la distanța mijlocie a Soarelui de Pămînt se ridică aproximativ la 11′ 50″, în alte locuri e proporțională cu ecuația centrului Soarelui; și se adună la mișcarea medie a Lunii cînd Pămîntul trece de la afeliul său la periheliu, și de partea opusă a orbitei se scade. Luînd pentru raza orbitei mari 1000 și excentricitatea Pămîntului $16\frac{7}{8}$ această ecuație cînd e maximă, rezultă din teoria gravității 11′ 49″. Dar excentricitatea Pămîntului se pare că e cu ceva mai mare, și mărind excentricitatea această ecuație trebuie mărită în același raport. Fie excentricitatea $16\frac{11}{12}$, și ecuația maximă va fi 11′ 51″.

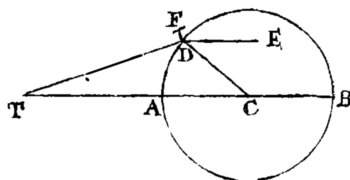
Am aflat de asemenea că în periheliul Pămîntului, din cauza forței mai mari a Soarelui, apogeul și nodurile Lunii se mișcă mai repede decît în afeliul ei, și aceasta în raport invers cu cubul distanței Pămîntului la Soare. Și de aici provin ecuațiile anuale ale acestor mișcări proporționale cu ecuația centrului Soarelui. Mișcarea Soarelui este însă în raport invers cu pătratul distanței Pămîntului la Soare, și ecuația maximă a centrului pe care o produce această inegalitate, este 1° 56′ 20″ corespunzătoare excentricității menționate $16\frac{11}{12}$ a Soarelui. Căci dacă mișcarea Soarelui ar fi în raport invers cu cubul distanței, această inegalitate ar naște ecuația maximă de 2°54′ 30″. Și de aceea ecuațiile maxime pe care le nasc inegalitățile mișcărilor apogeului și a nodurilor Lunii sînt către 2°54′ 30″ precum mișcarea medie zilnică a apogeului și mișcarea medie zilnică a nodurilor Lunii către mișcarea medie zilnică a Soarelui. De unde rezultă ecuația maximă a mișcării medii a apogeului 19′ 43″ și ecuația maximă a mișcării medii a nodurilor 9′ 24″. Într-adevăr se adună ecuația dintîi și se scade ecuația din urmă, cînd Pămîntul trece din periheliul său în afeliu: și contrariul se întîmplă de partea opusă a orbitei.

Prin teoria gravităţii s-a aflat de asemenea că acţiunea Soarelui asupra Lunii e cu ceva mai mare cînd diametrul transversal al orbitei lunare trece prin Soare decît cînd el e sub unghiuri drepte cu linia ce uneşte Pămîntul şi Soarele; şi de aceea orbita lunară e cu ceva mai mare în cazul dintîi decît în cel din urmă. Şi de aici se naşte altă ecuaţie a mişcării medii lunare, depinzînd de poziţia apogeului Lunii faţă de Soare, care e maximă cînd apogeul Lunii se află în octant cu Soarele; şi e nulă cînt el ajunge la cvadraturi sau syzigii; şi se adună la mişcarea medie în trecerea apogeului Lunii de la cvadratura Soarelui la syzigie şi se scade în trecerea apogeului de la syzigie la cvadratură. Această ecuaţie, pe care o voi numi semestrială, în octanţii apogeului, cînd e maximă, creşte la aproape 3′ 45″, după cum am putut deduce din fenomene. Aceasta este mărimea ei la distanţa mijlocie a Soarelui de Pămînt. Dar ea creşte şi se micşorează în raport invers cu cubul distanţei Soarelui, şi deci la distanţa maximă a Soarelui e de 3′ 34″ şi la cea minimă aproape de 3′ 56″: într-adevăr cînd apogeul Lunii e situat în afara octanţilor devine mai mică; şi este către ecuaţia maximă, precum sinusul distanţei duble a apogeului Lunii de la syzigia proximă sau cvadratura către rază.

Prin aceeaşi teorie a gravităţii teoria acţiunii Soarelui asupra Lunii este cu puţin mai mare cînd linia dreaptă dusă prin nodurile Lunii trece prin Soare, decît cînd linia aceea face unghiuri drepte cu dreapta ce uneşte Soarele şi Pămîntul. Şi de aici se naşte o altă ecuaţie a mişcării medii lunare, pe care o voi numi a doua semestrială, şi care e maximă cînd nodurile se află în octanţii Soarelui, şi dispare cînd sînt în syzigii sau cvadraturi, şi în alte poziţii ale nodurilor e proporţională cu sinusul distanţei duble a unuia din cele două noduri de la syzigia sau cvadratura cea mai apropiată: şi se adună la mişcarea medie a Lunii, dacă Soarele se află în urma nodului celui mai apropiat, şi se scade dacă este înainte, şi în octanţi, unde e maximă, se urcă la 47″ la distanţa mijlocie a Soarelui de la Pămînt, după cum deduc din teoria gravităţii. La alte distanţe de Soare această ecuaţie maximă în octanţii nodurilor este în raport invers cu cubul distanţei Soarelui de Pămînt şi deci în perigeul Soarelui se ridică la 49″ în apogeu la aproximativ 45″.

Prin aceeaşi teorie a gravităţii apogeul Lunii progresează mai mult cînd este sau în conjuncţiune cu Soarele sau în opoziţie cu el, şi regresează cînd e în cvadratură cu Soarele. Şi excentricitatea e maximă în primul caz şi minimă în cel din urmă, potrivit corolarului 7, 8 şi 9 propoziţia LXVI, Cartea I. Şi aceste inegalităţi prin aceleaşi corolare sînt foarte mari, şi dau naştere ecuaţiei principale a apogeului, pe care o voi numi semestrială. Şi ecuaţia maximă a semestrului este aproximativ de 12° 18′, după cum am putut deduce din observaţii. Compatriotul nostru H o r o x a stabilit cel dintîi că Luna se roteşte pe o elipsă în jurul Pămîntului, situat în focarul ei inferior. H a l l e y a situat centrul elipsei pe un epiciclu al cărui centru se roteşte în mod uniform în jurul Pămîntului. Şi din mişcarea pe epiciclu se nasc inegalităţile amintite în progresarea şi regresarea apogeului şi în mărimea excentricităţii. Să ne închipuim distanţa medie a Lunii de la Pămînt împărţită în 100 000 părţi, şi fie T Pămîntul şi TC excentricitatea medie a Lunii de 5505 părţi. Să prelungim pe TC pînă în B, astfel ca CB să fie sinusul ecuaţiei maxime semestriale 12° 18′ către raza TC, şi cercul BDA descris din centrul C, cu intervalul CB, va fi epiciclul în care e situat centrul orbitei lunare şi se învîrteşte după ordinea literelor BDA. Să luăm unghiul BCD egal cu dublul

argumentului anual sau cu distanța dublă a locului adevărat al Soarelui de apogeul Lunii odată corectat, și *CTD* va fi ecuația semestrială a apogeului Lunii, și *TD* excentricitatea orbitei ei în apogeu tinzînd spre cel corectat a doua oară. Avînd însă mișcarea medie a Lunii și apogeul și excentricitatea, precum și axa mare a orbitei de 200 000 de părți; din acestea se determină locul adevărat al Lunii pe orbită și distanța ei la Pămînt, și aceasta prin mijloacele foarte cunoscute.



În periheliul Pămîntului, din cauza forței mai mari a Soarelui, centrul orbitei Lunii se mișcă mai repede în jurul centrului *C* decît în afeliu, și anume în raport invers cu cubul distanței Pămîntului la Soare. Din cauza ecuației centrului Soarelui cuprinsă în argumentul anual, centrul orbitei Lunii se mișcă mai repede pe epiciclul *BDA* în raport invers cu pătratul distanței Pămîntului la Soare. Pentru ca acesta să se miște mai repede în raport invers cu distanța; din centrul *D* al orbitei să ducem dreapta *DE* spre apogeul Lunii, sau paralelă cu dreapta *TC* și să luăm unghiul *EDF* egal cu excesul argumentului anual menționat față de distanța apogeului Lunii de la perigeul Soarelui înainte; sau ceea ce e același lucru, să luăm unghiul *CDF* egal cu complementul anomaliei adevărate a Soarelui la 360 grade. Și fie *DF* către *DC* precum dublul excentricității orbitei mari către distanța mijlocie a Soarelui de Pămînt, și mișcarea medie zilnică a Soarelui de la apogeul Lunii către mișcarea medie zilnică a Soarelui de la apogeul propriu luate împreună, adică, precum $33\frac{7}{8}$ către 1000 și 52′ 27″ 16‴ către 59′ 8″ 10‴ luate împreună, sau precum 3 către 100. Și să ne închipuim că centrul orbitei lunare e situat în punctul *F*, și se învîrtește pe un epiciclu al cărui centru este *D*, și raza *DF*, în timp ce punctul *D* progresează pe circumferința cercului *DABD*. În acest fel viteza, cu care se va mișca centrul orbitei Lunii pe o linie curbă oarecare descrisă în jurul centrului *C*, va fi aproximativ în raport invers cu cubul distanței Soarelui la Pămînt, după cum trebuie.

Calculul acestei mișcări e dificil, dar se face mai ușor prin aproximația următoare. Dacă distanța medie a Lunii la Pămînt este de 100000 de părți, și excentricitatea *TC* este de 5505 părți ca mai sus: dreapta *CB* sau *CD* se va afla de $1172\frac{3}{4}$ părți, și dreapta *DF* de $35\frac{1}{5}$ părți. Și această dreaptă la distanța *TC* subîntinde unghiul la Pămînt pe care-l generează translația centrului orbitei de la locul *D* spre locul *F* în mișcarea acestui centru: și dublul aceleiași drepte într-o poziție paralelă la distanța focarului superior a orbitei Lunii de la Pămînt, subîntinde același unghi, pe care-l generează translația în mișcarea focarului, și la distanța Lunii de Pămînt subîntinde unghiul pe care-l generează aceeași translație în mișcarea Lunii, și care de aceea se poate numi ecuația a doua a centrului. Și această ecuație, la distanța mijlocie a Lunii de Pămînt, este aproximativ precum sinusul unghiului, pe care-l formează dreapta *DF* cu dreapta dusă de la punctul *F* la Lună, și cînd e maximă devine 22′5″. Unghiul însă pe care-l formează dreapta *DF* și dreapta dusă din punctul *F* la Lună, se află fie scăzînd unghiul *EDF* din anomalia medie a Lunii, fie adunînd distanța Lunii de la Soare la distanța

apogeului Lunii de la apogeul Soarelui. Și după cum e raza către sinusul unghiului astfel aflat, tot așa 2′25″ sînt către ecuația a doua a centrului, de adunat dacă suma e mai mică decît un semicerc, de scăzut dacă e mai mare. Astfel se va obține lungimea ei în syzigiile astrelor.

Cum atmosfera Pămîntului refractă lumina Soarelui pînă la înălțimea de 35 sau 40 de mile, și refractînd-o o împrăștie în umbra Pămîntului, și împrăștiind lumina la marginea umbrei dilată umbra; la diametrul umbrei, care provine din paralaxă, adun un minut în eclipsele Lunii, sau un minut și o treime.

Dar teoria Lunii trebuie examinată și stabilită prin fenomene mai întîi în syzigii, apoi în cvadraturi, și pe urmă în octanți. Și cine vrea să întreprindă această lucrare va afla ușor în mișcările medii ale Soarelui și Lunii în timpul meridianului în Observatorul regal *Greenwich*, în ziua ultimă a lunii decembrie stil vechi al anului 1700: anume mișcarea medie a Soarelui ♑ 20°43′40″, și apogeul ei ♋ 7°44′30″; și mișcarea medie a Lunii ♒ 15°21′00″; și a apogeului ei ♓ 8°20′00″; și a nodului ascendent ♌ 27°24′20″; și diferența dintre meridianul acestui Observator și al Observatorului regal din *Paris* $0^h\ 9^m\ 20^s$ iar mișcarea medie a Lunii și a apogeului ei nu se obține destul de precis încă.

PROPOZIȚIA XXXVI. PROBLEMA XVII

Să aflăm forța Soarelui ce mișcă marea.

Forța *ML* sau *PT* a Soarelui, în cvadraturile lunare, pentru perturbările mișcărilor lunare era (potrivit propoziției XXV a acestei Cărți) către forța gravității la noi, precum 1 către 638092,6; și forța *TM*—*LM* sau 2*PK* în syzigiile lunare este de două ori mai mare. Aceste forțe însă, dacă ne coborîm la suprafața Pămîntului, se micșorează în raportul distanțelor de la centrul Pămîntului, adică în raportul de $60\frac{1}{2}$ la 1; și deci forța de mai înainte la suprafața Pămîntului este către forța gravității precum 1 către 38604600. Prin această forță marea e apăsată în locurile, care sînt depărtate de 90 grade de Soare.

Prin cealaltă forță, care e de două ori mai mare, marea se ridică și sub Soare și în regiunea opusă Soarelui. Suma forțelor către forța gravității precum 1 către 12 868 200. Și fiindcă aceeași forță produce aceeași mișcare, fie că ea apasă apa în regiunile care sînt la distanță de 90 grade de Soare, fie că o ridică în regiunile sub Soare și opuse Soarelui, această sumă va fi forța întreagă a soarelui pentru agitarea mării; și va avea același efect, ca și cînd întreagă ar ridica marea în regiunile sub Soare și cele opuse Soarelui, iar în regiunile care sînt la o distanță de 90 grade de Soare nu ar acționa de loc.

Aceasta este forța Soarelui ce mișcă marea într-un loc oarecare dat, cînd Soarele se află atît în vîrful locului cît și la distanța sa mijlocie de Pămînt. În alte poziții ale Soarelui forța pentru ridicarea mării este precum sinus versus-ul dublului înălțimii Soarelui deasupra orizontului locului și în raport invers cu cubul distanței Soarelui la Pămînt.

COROLAR. Cum forța centrifugă a părților Pămîntului provenită din mișcarea diurnă a Pămîntului, care este către forța gravității precum 1 către 289, face ca înălțimea apei sub ecuator să întreacă înălțimea ei sub poli cu 85472 picioare pariziene, ca mai sus, în propoziția XIX; forța solară despre

care am vorbit, deoarece este către forța gravității precum 1 către 12868200, și deci către forța centrifugă precum 289 către 12868200 sau 1 la 44527, va face ca înălțimea apei în regiunile sub Soare și cele opuse Soarelui să întracă înălțimea ei în locurile,care sînt la 90 grade distanță de Soare, numai cu un picior parizian și unsprezece degete împreună cu a treizecea parte din deget. Căci această măsură este către măsura de 85472 picioare precum 1 către 44527.

PROPOZIȚIA XXXVII. PROBLEMA XVIII

Să aflăm forța Lunii ce mișcă marea.

Forța Lunii pentru mișcarea mării trebuie dedusă din proporția ei către forța Soarelui, și această proporție trebuie dedusă din proporția mișcărilor mării, care provin din aceste forțe. Înaintea gurii fluviului *Avon*, la a treia piatră sub *Bristol*, în timp de iarnă și toamnă, ascensiunea întreagă a apei în conjuncțiunea și opoziția astrelor, după observațiile lui Samuel Sturmy, este de aproape 45 picioare, iar în cvadraturi numai de 25 picioare. Înălțimea întîi provine din suma forțelor, cea din urmă din diferența lor. Fie deci S și L forțele Soarelui și al Lunii situate la ecuator și la distanța medie de Pămînt, și va fi $L + S$ către $L - S$ precum 45 către 25, sau 9 către 5.

În portul *Plymouth* fluxul mării după observațiile lui Samuel Colepress se ridică la înălțimea mijlocie de aproape 16 picioare înălțime, și în timp de iarnă și toamnă înălțimea fluxului în syzigii poate întrece înălțimea ei în cvadraturi cu mai bine de 7 sau 8 picioare. Dacă diferența maximă a acestor înălțimi este de 9 picioare, $L + S$ va fi către $L - S$ precum $20\frac{1}{2}$ către $11\frac{1}{2}$ sau 41 către 23. Care proporție coincide de ajuns de bine cu cea de mai înainte. Din cauza mărimii fluxului în portul *Bristol*, se pare că trebuie să acordăm mai mare încredere observațiilor lui Sturmy; și deci, pînă ce se va obține ceva mai sigur, vom folosi proporția de 9 către 5.

De altfel din cauza mișcărilor reciproce ale apelor, fluxurile maxime nu coincid cu syzigiile astrelor, ci vin, după cum s-a spus, sau în rîndul al treilea după syzigii, sau urmează imediat după a treia trecere a Lunii prin meridianul locului după syzigii, sau îndeosebi (după cum notează Sturmy) sînt în cel de-al treilea rînd după Luna nouă sau plină sau aproximativ a douăsprezecea oră de la Luna nouă sau plină, și deci coincid cu aproximativ a patruzeci și treia oră după Luna nouă sau plină. Dar în acest port au loc aproximativ în ora a șaptea de la trecerea Lunii prin meridianul locului; și deci urmează imediat după trecerea Lunii la meridian cînd distanța Lunii în sens direct față de Soare sau de opoziția Soarelui este de aproape 18 sau 19 grade. Vara și iarna se manifestă mai tare, nu în solstițiile înseși, ci cînd Soarele e departe de solstiții cu aproximativ a zecea parte a circuitului întreg, sau cu circa 36 sau 37 grade. Și la fel fluxul maxim al mării se produce după trecerea Lunii prin meridianul locului, cînd Luna e la o depărtare de Soare de aproape a zecea parte a mișcării întregi de la flux la flux. Fie această distanță de aproximativ $18\frac{1}{2}$ grade. Și forța Soarelui la această distanță a Lunii de la syzigii și cvadraturi, va fi mai mică pentru mărirea sau micșorarea

mişcării mării ce provine din forţa Lunii, decît în syzigii şi cvadraturi, în raportul razei către sinusul complementului acestei distanţe duble sau a unui unghi de 37 grade, adică în raportul lui 10 000 000 către 7986355. Şi deci în analogia de mai sus în loc de S trebuie să scriem 0,7986355 S.

Dar şi forţa Lunii în cvadraturi, din cauza declinaţiei Lunii de la ecuator, trebuie să se micşoreze. Căci Luna în cvadraturi, sau mai bine zis în gradul $18\frac{1}{2}$ după cvadraturi, se află în declinaţia de aproximativ 22° 13′. Şi forţa pentru mişcarea mării din partea astrului cînd acesta declină de la ecuator, se micşorează aproximativ în raportul patratului sinusului complementului declinaţiei. Şi deci forţa Lunii în aceste cvadraturi este de numai $0{,}8570327L$. Prin urmare $L+0{,}7986355S$ este către $0{,}8570327L-0{,}7986355S$ precum 9 către 5.

Afară de aceasta diametrele orbitei, în care Luna ar trebui să se mişte fără excentricitate, sînt între ele precum 69 către 70; şi deci distanţa Lunii la Pămînt în syzigii este către distanţa ei în cvadraturi precum 69 către 70, celelalte condiţii fiind egale. Şi distanţele ei de gradul $18\frac{1}{2}$ de la syzigii, cînd se produce fluxul maxim, şi în gradul $18\frac{1}{2}$ de la cvadraturi cînd se naşte fluxul minim, sînt către distanţa ei mijlocie precum 69,098747 şi 69,897345 către $69\frac{1}{2}$. Dar forţele Lunii ce mişcă marea sînt în raport invers cu cubul raportului distanţelor, şi deci forţele la distanţa maximă şi minimă sînt către forţa la distanţa mijlocie precum 0,9830427 şi 1,017522 către 1. De unde $1{,}017522L + 0{,}7986355\,S$ către $0{,}9830427 \times 0{,}8570327L - 0{,}7986355S$ precum 9 la 5. Şi S către L precum 1 către 4,4815. Deci cum forţa Soarelui este către forţa gravităţii precum 1 către 12868200, forţa Lunei va fi către forţa gravităţii precum 1 către 2 871 400.

COROLARUL 1. Deoarece apa acţionată de forţa Soarelui se ridică la înălţimea de 1 picior şi 11 degete împreună cu a treizecea parte dintr-un deget, prin aceeaşi forţă a Lunii se va urca la înălţimea de 8 picioare şi $7\frac{5}{22}$ degete, şi prin ambele forţe la înălţimea de 10 picioare şi jumătate, şi cînd Luna este în perigeu la înălţimea de 12 picioare şi jumătate şi mai mult, îndeosebi cînd fluxul este ajutat de vîrtejuri de vînt. Însă o forţă atît de mare este deajuns pentru excitarea tuturor mişcărilor mării, şi corespunde bine cu cantitatea de mişcare. Căci în mările care sînt deschise de la răsărit la apus, ca în Marea *Pacifică* şi în părţile în afară de tropice ale Mării *Atlantice şi Etiopiene*, apa de obicei se ridică la înălţimea de 6, 9, 12, sau 15 picioare. Dar în Marea *Pacifică*, care e mai adîncă şi mai lată, se spune că fluxurile sînt mai mari decît în marea *Atlantică* şi *Etiopiană*. Căci pentru ca fluxul să fie deplin, lăţimea mării de la răsărit la apus nu trebuie să fie mai mică de 90 de grade. În Marea *Etiopiană* ridicarea apei între tropice e mai mică decît în zonele temperate, din cauza îngustimii mării între *Africa* şi partea de sud a *Americii*. La mijlocul mării apa nu se poate urca, decît dacă în acelaşi timp se coboară simultan la fiecare litoral atît oriental cît şi occidental: fiindcă totuşi în mod alternativ pe litoralele mărilor noastre înguste trebuie să se coboare. De aceea fluxul şi refluxul în insulele, care sînt foarte îndepărtate de Continent, sînt de obicei foarte mici. În anumite porturi, în care apa e silită să intre şi să iasă cu mare putere prin locuri puţin adînci, pentru

a umple și goli golfurile, fluxul și refluxul de obicei trebuie să fie mai mari, ca la *Plymouth* și la podul *Chepstow* în *Anglia*, la munții *St. Michel* și la orașul *Avranches* în *Normandia* la *Cambaia* și *Pegu* în *India* orientală. În aceste locuri marea, apropiindu-se și depărtîndu-se cu mare viteză, cînd inundă litoralele cînd le lasă uscate pe mai multe mile. Nici nu se poate frînge putera fluxului și refluxului, înainte ca apa să fie ridicată sau coborîtă la 30,40, sau 50 de picioare și mai mult. Și la fel este cazul strîmtorilor lungi și puțin adînci ca aceea a lui *Magellan* și aceea care înconjoară Anglia. În porturile și strîmtorile de acest fel marea din cauza puterii cursului fluxului și refluxului crește peste măsură. În litoralele însă care printr-o coborîre precipitată privesc spre o mare adîncă și deschisă, unde apa se poate urca și coborî fără să înainteze și să se retragă cu putere, mărimea fluxului corespunde forțelor Soarelui și Lunii.

COROLARUL 2. Cum forța Lunii ce mișcă marea este către forța gravitații precum 1 către 2871400, este evident că această forță este cu mult mai mică decît aceea care se poate observa fie prin experiențele pendulelor, fie prin altele statice sau hidrostatice. Această forță produce un efect sensibil numai prin fluxul maritim.

COROLARUL 3. Deoarece forța Lunii ce mișcă marea este către forța asemănătoare a Soarelui precum 4,4815 către 1, și forțele (potrivit corolarului 14, propoziția LXVI, Cartea I) sînt precum densitățile corpurilor Lunii și Soarelui și cuburile diametrelor aparente luate împreună; densitatea Lunii va fi către densitatea Soarelui precum 4,4815 către 1, și în raport invers cu cubul diametrului Lunii către cubul Soarelui: adică (cum diametrele mijlocii aparente ale Lunii și Soarelui sînt $31'16\frac{1''}{2}$ și $32'12''$) precum 4891 către 1000. Dar densitatea Soarelui era către densitatea Pămîntului precum 1000 către 4000; și deci densitatea Lunii este către densitatea Pămîntului precum 4891 către 4000 sau 11 către 9. Așadar corpul Lunii e mai dens și mai terestru decît Pămîntul nostru.

COROLARUL 4. Și cum diametrul adevărat al Lunii din observațiile astronomice este către diametrul adevărat al Pămîntului precum 100 către 365; masa Lunii va fi către masa Pămîntului precum 1 către 39,788.

COROLARUL 5. Și gravitatea acceleratoare la suprafața Lunii va fi aproape de trei ori mai mică decît gravitatea acceleratoare la suprafața Pămîntului.

COROLARUL 6. Și distanța centrului Lunii la centrul Pămîntului va fi către distanța centrului Lunii la centrul comun de greutate al Pămîntului și al Lunii; precum 40,788 către 39,788.

COROLARUL 7. Și distanța mijlocie a centrului Lunii de la centrul Pămîntului în octanții Lunii va fi aproximativ de $60\frac{2}{5}$ semidiametre maxime ale Pămîntului. Căci semidiametrul maxim al Pămîntului a fost de 19658600 picioare pariziene, și distanța medie a centrelor Pămîntului și Lunii, constînd din $60\frac{2}{5}$ semidiametre de acest fel, este egal cu 1187379440 picioare. Și această distanță (potrivit corolarului de mai sus) este către distanța centrului Lunii de la centrul comun de greutate al Pămîntului și al Lunii, precum 40,788 către 39,788; și deci distanța din urmă este de 1158268534 picioare.

Și cum Luna se învîrtește, față de stelele fixe, în 27 zile, 7 ore și 43 $\frac{4}{9}$ minute, sinusul versus al unghiului, pe care-l descrie Luna în timpul unui minut, este 12752341, raza fiind 1000,000000,000000. Și după cum e raza către acest sinus versus, tot așa sînt 1158268534 picioare către 14,7706353 picioare. Prin urmare Luna căzînd spre Pămînt cu forța, cu care e reținută pe orbită, în timpul unui minut va descrie 14,7706353 picioare. Și mărind această forță în raportul $178\frac{29}{40}$ către $177\frac{29}{40}$, vom obține forța întreagă a gravității pe orbita Lunei potrivit corolarului propoziției III. Și Luna căzînd cu această forță în timp de un minut va descrie 14,8538067 picioare. Și la a 60-a parte a distanței Lunii de centrul Pămîntului, adică la o distanță de 197896573 picioare de centrul Pămîntului, un corp greu căzînd în timp de o secundă va descrie de asemenea 14,8538067 picioare. Și deci la distanța de 19615800 picioare, care este semidiametrul mijlociu al Pămîntului, corpul greu căzînd va descrie 15,11175 picioare, sau 15 picioare, 1 deget și $4\frac{1}{11}$ linii. Aceasta va fi căderea corpurilor la latitudinea de 45 grade. Și din tabela precedentă descrisă în propoziția XX, căderea va fi cu ceva mai mare la latitudinea *Parisului* cu un exces de aproape $\frac{2}{3}$ linii. Prin urmare potrivit acestui calcul corpurile grele căzînd în vid la latitudinea *Parisului* vor descrie în timpul unei secunde aproximativ 15 picioare pariziene, 1 deget și $4\frac{25}{33}$ linii. Și dacă gravitatea se micșorează scăzînd forța centrifugă, care provine din mișcarea zilnică a Pămîntului la acea latitudine; corpurile grele căzînd acolo vor descrie în timpul unei secunde 15 picioare, 1 deget și $1\frac{1}{2}$ linii. Și mai sus la propoziția IV și XIX s-a arătat că corpurile grele la latitudinea *Parisului* cad cu această viteză.

COROLARUL 8. Distanța mijlocie a centrelor Pămîntului și Lunii, în syzigiile Lunii este de 60 semidiametre mari ale Pămîntului, scăzînd aproximativ a 30-a parte a semidiametrului. Și în cvadraturile Lunii distanța mijlocie a centrelor este de $60\frac{5}{6}$ semidiametre ale Pămîntului. Căci aceste două distanțe sînt către distanța mijlocie a Lunii în octanți precum 69 și 70 către $69\frac{1}{2}$ potrivit propoziției XXVIII.

COROLARUL 9. Distanța mijlocie a centrelor Pămîntului și Lunii în syzigiile Lunii este de 60 semidiametre mijlocii ale Pămîntului și a zecea parte a semidiametrului. Și în cvadraturile Lunii distanța mijlocie a acelorași centre este de 61 semidiametre mijlocii ale Pămîntului, scăzînd a 30-a parte a semidiametrului.

COROLARUL 10. În syzigiile Lunii paralaxa ei orizontală medie la latitudinea de 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90 grade este respectiv de 57′20″, 57′16″, 57′14″, 57′12″, 57′10″, 57′8″, 57′4″.

În aceste calcule nu am considerat atracția magnetică a Pămîntului, a cărei cantitate e foarte mică și nu se cunoaște. Dacă vreodată această atracție se va cunoaște, și dacă măsurile gradelor în meridian, și lungimile pendulelor izocrone în diversele paralele, și legile mișcărilor mării, și paralaxa Lunii cu diametrele aparente ale Soarelui și Lunii se vor determina din fenomene mai precis: acest calcul întreg se va putea repeta mai exact.

PROPOZIŢIA XXXVIII. PROBLEMA XIX

Să aflăm figura corpului Lunii.

Dacă corpul lunar ar fi fluid şi la fel cu marea noastră, forţa Pămîntului ce ridică acel fluid atît în părţile cele mai apropiate cît şi în cele mai depărtate ar fi către forţa Lunii, cu care marea noastră se ridică atît în părţile de sub Lună cît şi în cele opuse Lunii, precum gravitatea acceleratoare a Lunii spre Pămînt către gravitatea acceleratoare a Pămîntului spre Lună, şi diametrul Lunii către diametrul Pămîntului luaţi împreună; adică, precum 39,788 către 1 şi 100 către 365 luate împreună, sau 1081 către 100. De unde cum marea noastră prin forţa Lunii se ridică la $8\frac{3}{5}$ picioare, fluidul lunar prin forţa Pămîntului ar trebui să se ridice la 93 picioare. Din aceeaşi cauză figura Lunii ar fi sferoidală, al cărei diametru maxim prelungit ar trece prin centrul Pămîntului, şi ar întrece diametrele perpendiculare cu un exces de 186 picioare. Aşadar Luna posedă o astfel de figură, şi trebuie să o fi luat de la început. Q.E.I.

COROLAR. De aici provine că aceeaşi parte a Lunii e îndreptată totdeauna spre Pămînt. Căci în altă poziţie corpul lunar nu poate fi în repaus, ci oscilînd totdeauna va reveni la această poziţie. Totuşi oscilaţiile, din cauza micimii forţelor ce acţionează, ar fi foarte lente: astfel că faţa care ar trebui să privească totdeauna spre Pămînt, poate privi celălalt focar al orbitei lunare (prin raţionamentul adus în propoziţia XVII), fără a fi imediat abătut şi îndreptat spre Pămînt.

LEMA I

Dacă APEp reprezintă Pămîntul uniform de dens, marcat cu centrul C şi polii P,p şi ecuatorul AE; şi dacă ne închipuim că din centrul C, cu raza CP descriem sfera Pape; iar QR este planul pe care o dreaptă dusă de la centrul Soarelui la centrul Pămîntului stă normal; şi diversele particule ale întregului Pămînt exterior PapAPepE, care sînt situate în afara sferei considerate, tind să se îndepărteze de o parte şi de alta a planului QR, şi tendinţa fiecărei particule este precum distanţa ei la plan: zic că mai întîi întreaga forţă şi eficacitate a tuturor particulelor în cercul ecuatorial AE, situate în afară de sferă în mod uniform pe întreg circuitul după modelul unui inel, pentru a roti Pămîntul în jurul centrului lui, este către întreaga forţă şi eficacitate a aceluiaşi număr de particule concentrate în punctul A al ecuatorului, care e mai îndepărtat de planul QR, pentru a roti Pămîntul cu o mişcare circulară asemănătoare în jurul centrului său, precum unul către doi. Şi această mişcare circulară are loc în jurul unei axe, situată la intersecţia comună a ecuatorului şi a planului QR.

Căci din centrul *K* cu diametrul *IL* să descriem semicercul *INL*. Să ne închipuim semicircumferinţa *INL* împărţită în nenumărate părţi egale, şi din diversele părţi *N* să coborîm pe diametrul *IL* sinusul *NM*. Şi suma pătratelor tuturor sinusurilor *NM* va fi egală cu suma pătratelor sinusurilor

KM, și fiecare din cele două sume va fi egală cu suma pătratelor aceluiași număr de semidiametre *KN;* și deci suma pătratelor tuturora *NM* va fi de două ori mai mică decît suma pătratelor aceluiași număr de semidiametre *KN*.

Să împărțim acum perimetrul cercului *AE* în tot atîtea particule egale, și din fiecare din ele *F* să coborîm pe planul *QR* perpendiculara *FG*, precum și din punctul *A* perpendiculara *AH*. Și forța, cu care particula *F* se îndepărtează de planul *QR*, prin ipoteză va fi precum perpendiculara *FG*; și această forță înmulțită cu distanța *CG* va fi puterea particulei *F* în rotirea Pămîntului în jurul centrului său. Și deci puterea particulei în locul *F*, va fi către puterea particulei în locul *A*, precum $FG \times GC$ către $AH \times HC$, adică, precum FC^2 către AC^2; și de aceea puterea întreagă a tuturor particulelor în locurile lor *F* va fi către puterea aceluiași număr de particule în locul *A*, precum suma tuturor FC^2 către suma aceluiași număr de AC^2, adică (potrivit celor demonstrate) precum unul către doi. Q.E.D.

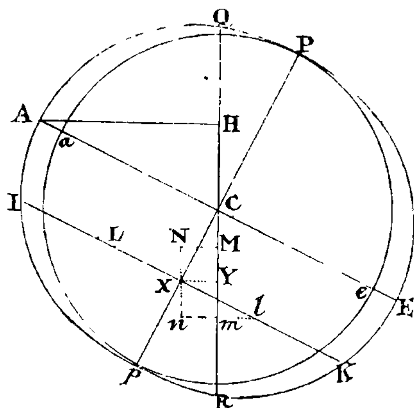
Și fiindcă particulele acționează îndepărtîndu-se perpendicular de planul *QR*, și aceasta în mod egal de fiecare parte a acestui plan ele rotesc circumferința cercului ecuatorului, și Pămîntul legat de el, în jurul axei situate atît în planul *QR* cît și în planul ecuatorului.

LEMA II

Presupunînd aceleași: zic în al doilea rînd că forța și puterea întreagă a tuturor particulelor situate de toate părțile în afara sferei, pentru a roti Pămîntul în jurul aceleiași axe, este către forța întreagă a aceluiași număr de particule, situate în mod uniform în jurul întregului cerc ecuatorial AE sub forma unui inel, pentru a roti Pămîntul cu o mișcare circulară asemănătoare, precum 2 către 5.

Căci fie *IK* un cerc oarecare mai mic paralel cu ecuatorul *AE*, și fie *L,l* două particule oarecare egale situate pe acest cerc în afara sferei *Pape*. Și dacă în planul *QR*, care e perpendicular pe raza dusă la Soare, coborîm perpendicularele *LM*, *lm*: forțele întregi, prin care acele particule se înde-

părtează de planul QR, vor fi proporționale cu perpendicularele LM, lm. Dar fie dreapta Ll paralelă cu planul $Pape$, și să o bisectăm în X; și prin punctul X să ducem Nn, care să fie paralelă cu planul QR și să întîlnească perpendicularele LM, lm în N și n, și să coborîm pe planul QR perpendiculara XY. Și forțele contrare ale particulelor L și l, pentru rotirea Pămîntului în părți contrare, sînt precum $LM \times MC$ și $lm \times mC$, adică, percum $LN \times MC + NM \times MC$, și $ln \times mC - nm \times mC$; sau $LN \times MC + NM \times MC$ și $LN \times mC - NM \times nC$: și diferența lor $LN \times Mm - NM \times (MC + mC)$ este forța ambelor particule luate împreună pentru rotația Pămîntului. Partea pozitivă a acestei diferențe $LN \times Mm$ sau $2LN \times NX$ este către forța $2AH \times HC$ a celor două particule de aceeași mărime situate în A, precum LX^2 către AC^2. Și partea negativă $NM \times (MC + mC)$ sau $2XY \times CY$ către forța $2AH \times HC$ a acelorași particule situate în A, precum CX^2 către AC^2. Și deci diferența părților, adică forța celor două particule L și l luate împreună pentru rotirea Pămîntului este către forța a două particule egale cu aceleași și situate în locul A pentru aceeași rotire a Pămîntului, precum $LX^2 - CX^2$ către AC^2. Dar dacă împărțim circumferința IK a cercului IK în nenumărate particule egale L, toate LX^2 vor fi către tot atîtea IX^2 precum 1 către 2 (potrivit lemei 1) și către tot atîtea AC^2, precum IX^2 către $2AC^2$; și același număr de CX^2 către același număr de AC^2 precum $2CX^2$ către $2AC^2$. De aceea forțele unite ale tuturor particulelor în circuitul cercului IK sînt către forțele unite ale aceluiași număr de particule în locul A, precum forțele unite $IX^2 - 2CX^2$ către $2AC^2$: și de aceea (potrivit lemei I) către forțele unite ale aceluiași număr de particule în circuitul cercului AE, precum $IX^2 - 2CX^2$ către AC^2.



Dacă acum împărțim diametrul sferei Pp în nenumărate părți egale, pe care să fie situate tot atîtea cercuri IK; materia în perimetrul unui cerc oarecare IK va fi precum IX^2: și deci forța acelei materii pentru rotirea Pămîntului, va fi precum IX^2 înmulțit cu $IX^2 - 2CX^2$. Și forța aceleiași materii, dacă ar fi situată pe perimetrul cercului AE, ar fi precum IX^2 înmulțit cu AC^2. Și de aceea forța tuturor particulelor ale întregii materii, situate în afara sferei pe perimetrele tuturor cercurilor, este către forța aceluiași număr de particule situate pe perimetrul cercului maxim AE, precum toate IX^2 înmulțit cu $IX^2 - 2CX^2$ către același număr de IX^2 înmulțit cu AC^2, adică, precum toate $AC^2 - CX^2$ înmulțit cu $AC^2 - 3CX^2$ către același număr de $AC^2 - CX^2$ înmulțit cu AC^2, adică, precum toate $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ către același număr de $AC^4 - AC^2 \times CX^2$, adică, precum întreaga cantitate fluentă a cărei fluxiune este $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$, către întreaga cantitate fluentă a cărei fluxiune este $AC^4 - AC^2 \times CX^2$; și apoi prin metoda fluxiunilor, precum $AC^4 \times CX - \frac{4}{3} AC^2 \times CX^3 + \frac{3}{5} CX^5$ către $AC^4 \times CX - \frac{1}{3} AC^2 \times CX^3$,

adică dacă în loc de *CX* scriem întregul *Cp* sau *AC*, precum $\frac{4}{15} AC^5$ către $\frac{2}{3} AC^5$, adică, precum 2 către 5. Q.E.D.

LEMA III

Presupunînd aceleași: zic în al treilea rînd că mișcarea întregului Pămînt în jurul axei considerată mai sus, compusă din mișcările tuturor particulelor, va fi către mișcarea inelului menționat în jurul aceleiași axe într-un raport, care se compune din raportul materiei Pămîntului către materia inelului, și din raportul a trei pătrate ale cadranului unui cerc oarecare către două pătrate ale diametrului; adică, în raportul materiei către materie și al numărului 925275 *către numărul* 1000000.

Căci mișcarea unui cilindru ce se învîrtește în jurul axei sale imobile este către mișcarea sferei înscrise ce se rotește împreună cu ea, precum patru pătrate egale oarecare către trei cercuri înscrise în ele: și mișcarea cilindrului către mișcarea unui inel foarte subțire, ce înconjoară sfera și cilindrul în contactul lor comun, precum dublul materiei în cilindru către triplul materiei în inel; și această mișcare a inelului continuată în mod uniform în jurul axei cilindrului, către mișcarea sa uniformă în jurul diametrului propriu, efectuată în același timp periodic, precum circumferința cercului către dublul diametrului.

IPOTEZA II

Dacă inelul menționat celeilalte părți ale Pămîntului fiind înlăturat, ar fi purtat singur pe orbita Pămîntului, într-o mișcare anuală în jurul Soarelui, și în același timp s-ar învîrti cu mișcarea zilnică în jurul axei sale, înclinată față de planul eclipticei sub un unghi de $23\frac{1}{2}$ *grade: mișcarea punctelor echinocțiale va fi aceeași, fie că inelul este fluid, fie că ar consta dintr-o materie rigidă și dură.*

PROPOZIȚIA XXXIX. PROBLEMA XX

Să aflăm precesiunea echinocțiilor.

Mișcarea mijlocie orară a nodurilor Lunii pe orbita circulară, cînd nodurile sînt în cvadraturi, era $16''\,35'''\,16^{IV}\,36^{V}$, și jumătatea ei $8''\,17'''\,38^{IV}\,18^{V}$ (din motivele explicate mai sus) este mișcarea medie orară a nodurilor pe o astfel de orbită; și într-un an sideral întreg $20°11'46''$. Prin urmare fiindcă nodurile Lunii pe o astfel de orbită parcurg anual retrograd $20°11'46''$; și dacă ar fi mai multe Luni, mișcările nodurilor fiecăreia (potrivit corolarului 16, propoziția LXVI, Cartea I) vor fi precum timpurile periodice: dacă Luna în timpul unei zile siderale s-ar învîrti în apropierea suprafeței Pămîntului, mișcarea anuală a nodurilor ar fi către $20°11'46''$ precum ziua siderală de $23^h\,56^m$ către timpul periodic al Lunii de $27^d\,7^h\,43^m$, adică, precum 1436 către 39343. Și același este cazul nodurilor inelului Lunilor ce înconjoară

Pămîntul; fie că Lunile nu se ating reciproc, fie că sînt lichide și formează un inel continuu, fie că în sfîrșit inelul devine rigid și inflexibil.

Să ne închipuim așadar că inelul, în ce privește cantitatea de materie, este egal cu Pămîntul întreg *PapAPepE* care este în afara sferei *Pape* (vezi figura lemei II) și fiindcă sfera este către Pămîntul exterior precum aC^2 către AC^2-aC^2 adică (deoarece semidiametrul cel mic al Pămîntului *PC* sau *aC* este către semidiametrul cel mare *AC* precum 229 către 230) precum 52441 către 459; dacă inelul ar înconjura Pămîntul în jurul ecuatorului și fiecare din ele s-ar învîrti simultan în jurul diametrului inelului, mișcarea inelului ar fi către mișcarea sferei interioare (potrivit lemei III a acestei Cărți) precum 459 către 52441 și 1 000 000 către 925275 luate împreună, adică, precum 4590 către 485223; și deci mișcarea inelului ar fi către suma mișcărilor inelului și sferei, precum 4590 către 489813. De aceea dacă inelul aderează la sferă, și comunică sferei mișcarea sa cu care regresează nodurile sale sau punctele echinocțiale: mișcarea ce va rămîne în inel va fi către mișcarea sa de mai înainte, precum 4590 către 489813; și de aceea mișcarea punctelor echinocțiale va scădea în același raport. Deci mișcarea anuală a punctelor echinocțiale a corpului compus din inel și sferă va fi către mișcarea 20° 11′ 46″, precum 1436 către 39343 și 4590 către 489813 luate împreună, adică, precum 100 către 292369. Forțele însă prin care nodurile Lunilor (după cum am explicat mai sus) și de aceea prin care punctele echinocțiale ale inelului regresează (adică forțele *3IT*, în fig., propoziția XXX) sînt în diversele particule precum distanțele particulelor de la planul *QR*, și prin aceste forțe particulele se îndepărtează de plan; și de aceea (potrivit lemei II) dacă materia inelului s-ar împrăștia pe întreaga suprafață a sferei la fel ca în figura *PapAPepE* formînd partea de sus a pămîntului, forța și puterea întreagă a tuturor particulelor pentru rotirea Pămîntului în jurul unui diametru oarecare al ecuatorului, și deci pentru mișcarea punctelor echinocțiale, va deveni mai mică în raportul de 2 la 5. Și deci regresul anual al echinocțiilor ar fi către 20°11′46″ precum 10 către 73092: și deci va fi 9″56‴50^{IV}.

De altfel această mișcare trebuie micșorată din cauza înclinării planului ecuatorului față de planul eclipticei, și anume în raportul sinusului 91706 (care e sinusul complementului gradelor $23\frac{1}{2}$) către raza 100000. Din care cauză această mișcare va fi 9″7‴20^{IV}. Aceasta este precesiunea anuală a echinocțiilor produsă de forța Soarelui.

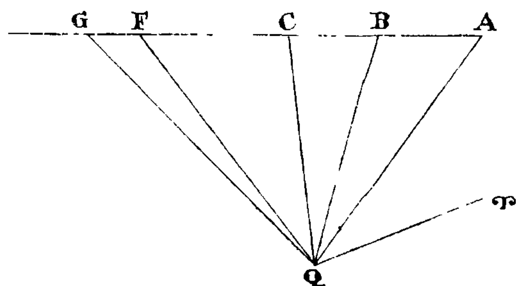
Dar forța Lunii la mișcarea mării era către forța Soarelui, aproximativ precum 4,4815 către 1. Și forța Lunii pentru mișcarea echinocțiilor e în aceeași proporție către forța Soarelui. Și de aici provine precesiunea anuală a echinocțiilor ce se naște din forța Lunii de 40″ 52‴ 52^{IV}, și întreaga precesiune anuală născută din cele două forțe 50″ 00‴ 12^{IV}. Și această mișcare e de acord cu fenomenele. Căci precesiunea echinocțiilor din observațiile astronomilor este anual de aproximativ de 50 secunde. Dacă înălțimea Pămîntului la ecuator ar întrece înălțimea lui la poli, cu mai mult de $17\frac{1}{6}$ mile, materia lui ar fi mai rară pe circumferință decît la centru: și precesiunea echinocțiilor din cauza înălțimii ar trebui să crească, din cauza răririi ar trebui să scadă.

Am descris pînă acum sistemul Soarelui, al Pămîntului, al Lunii și al planetelor: mai rămîne să adaug ceva despre comete.

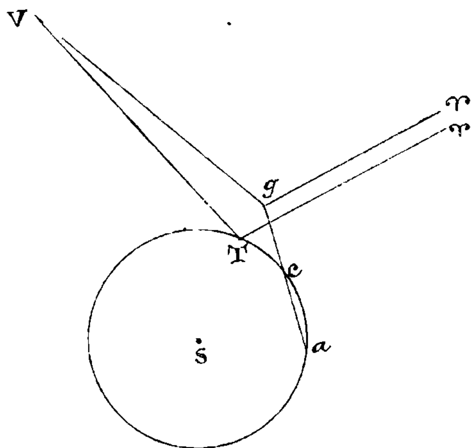
LEMA IV

Cometele sînt mai îndepărtate decît Luna și se află în regiunea planetelor.

După cum lipsa paralaxei diurne situează cometele dincolo de regiunile sublunare, tot astfel din paralaxa anuală ne convingem de coborîrea lor în regiunile planetelor. Căci toate cometele, care progresează în ordinea semnelor, la sfîrșitul apariției sînt de obicei sau lente, sau retrograde, dacă Pămîntul este între ele și Soare; și peste măsură de rapide dacă Pămîntul tinde către opoziție. Și dimpotrivă, acele care merg în sens contrar cu ordinea semnelor sînt excesiv de rapide la sfîrșitul apariției, dacă Pămîntul se află între ele și Soare; și foarte lente sau retrograde, dacă Pămîntul e situat în părțile opuse. Aceasta se întîmplă îndeosebi din cauza mișcării Pămîntului în pozițiile sale diferite, după cum se întîmplă cu planetele, care din cauza mișcării Pămîntului fie în același sens fie în sens contrar cînd sînt retrograde, cînd par a înainta mai încet, cînd mai repede. Dacă Pămîntul înaintează de aceeași parte cu cometa, și e dus cu o mișcare unghiulară în jurul Soarelui atît de repede, încît dreapta dusă necontenit prin Pămînt și cometă converge dincolo de cometă, cometa privită de pe Pămînt din cauza mișcării sale mai lente pare a fi retrogradă; dacă însă Pămîntul este dus mai încet, mișcarea cometei (scăzînd mișcarea Pămîntului) devine uneori mai lentă. Dar dacă Pămîntul tinde în sens contrar, cometa apare mai rapidă. Dar din accelerația sau întîrzierea sau mișcarea retrogradă distanța cometei se determină în felul acesta. Fie ♈*QA*, ♈*QB*, ♈*QC* cele trei longitudini observate ale cometei la începutul mișcării, și fie ♈*QC* ultima longitudine observată, cînd cometa încetează de a fi văzută. Să ducem dreapta *ABC*, ale cărei părți *AB*, *BC* cuprinse între dreptele *QA* și *QB*, *QB* și *QC*, să fie între ele precum timpurile dintre primele trei observații. Să prelungim pe *AC* pînă în *G*, așa fel ca *AG* către *AB* să fie precum timpul dintre observația întîi și ultima către timpul dintre prima și a doua observație, și să unim *QG*. Și dacă cometa s-ar mișca uniform, pe o linie dreaptă, și Pămîntul sau ar fi în repaus, sau de asemenea s-ar mișca în linie dreaptă cu o mișcare uniformă; unghiul ♈*QG* va fi longitudinea cometei în timpul ultimei observații. Deci unghiul *FQG*, care e diferența lungimilor, se naște din inegalitatea mișcărilor cometei și Pămîntului. Dar acest unghi, dacă Pămîntul și cometa se mișcă în părți contrarii, se adună la unghiul ♈*QG*, și astfel face mai rapidă mișcarea aparentă a cometei: dacă însă cometa înaintează de aceeași parte cu Pămîntul, se scade din el, și face mișcarea cometelor sau mai lentă, sau poate retrogradă; după cum am expus mai sus. Așadar acest unghi se naște în deosebi din mișcarea Pămîntului, și de aceea cu drept cuvînt poate fi considerat ca paralaxa cometei, neglijînd anume unele creșteri și descreșteri, care pot proveni din mișcarea neegală a cometei pe orbita proprie. Iar distanța cometei se află astfel din această paralaxă. Fie *S* Soarele, *acT* orbita mare, *a*



locul Pămîntului în prima observaţie, *c* locul Pămîntului în observaţia a treia, *T* locul Pămîntului în observaţia ultimă, şi *T*♈ linia dreaptă dusă spre începutul Berbecului. Să adunăm unghiul ♈*TV* egal cu unghiul ♈*QF*, adică, egal cu lungimea cometei cînd Pămîntul se află în *T*. Să unim *ac*, şi să prelungim pînă în *g*, ca să fie *ag* către *ac* precum *AG* către *AC*, şi *g* va fi locul în care Pămîntul va ajunge în timpul ultimei observaţii, continuînd mişcarea în mod uniform pe dreapta *ac*. Şi deci dacă ducem *g*♈, paralelă cu *T*♈, şi luăm unghiul ♈*g V* egal cu unghiul ♈*QG*, unghiul ♈*g V* va fi egal cu longitudinea cometei privită din locul *g*; şi unghiul *TVg* va fi paralaxa, care se naşte din translaţia Pămîntului din locul *g* în locul *T*: şi deci *V* va fi locul cometei în planul eclipticei. Acest loc *V* însă de obicei e mai jos decît orbita lui Jupiter.



Acelaşi lucru se deduce din curbura traiectoriei cometelor. Aceste corpuri se mişcă mai mult pe cercurile maxime atît timp cît se mişcă repede; dar la sfîrşitul cursei, cînd partea mişcării aparente, care provine din paralaxă, are o proporţie mai mare către mişcarea întreagă aparentă, de obicei, se abat de la aceste cercuri, şi de cîte ori se mişcă Pămîntul într-o parte, ele se duc în partea contrară. Această deviere provine îndeosebi din paralaxă, deoarece ea corespunde mişcării Pămîntului; şi mărimea ei considerabilă după calculul meu a aşezat disparente destul de mult dincoace de Jupiter. De unde urmează că în perigee şi perihelii, unde sînt mai aproape, se coboară adesea dincoace de orbita lui Marte şi a planetelor inferioare.

Apropierea cometelor se confirmă şi din lumina capetelor. Căci lumina unui corp ceresc luminat de Soare şi care se duce în regiuni îndepărtate, se micşorează în raportul puterii a patra a distanţei: anume în raportul pătratului din cauza creşterii distanţei la Soare, şi în alt raport pătratic din cauza mişcării diametrului aparent. De unde dacă se dă atît cantitatea de lumină cît şi diametrul aparent al cometei, se va da distanţa, zicînd că distanţa este către distanţa planetei, precum diametrul către diametru şi în raport invers cu rădăcina pătrată a luminii către lumină. Astfel diametrul minim al capătului cometei anului 1682, observat de F l a m s t e e d prin tubul optic de 16 picioare şi măsurat cu micrometrul era egal cu 2′ 0″; iar nucleul sau steaua în mijlocul capului abia ocupa a zecea parte a lăţimii acestuia, şi deci era lată numai de 11″ sau 12″. Dar prin intensitatea luminoasă şi claritatea capului întrecea capul cometei anului 1680, şi se întrecea cu stelele de mărimea întîi sau a doua. Să presupunem că Saturn împreună cu inelul său ar fi fost aproape de patru ori mai luminos: şi fiindcă lumina inelului era aproape egală cu lumina sferei intermediare, şi diametrul aparent al sferei este aproape 21″, şi deci lumina sferei şi a inelului luate împreună ar fi egale cu lumina sferei, al cărei diametru ar fi 30″: distanţa cometei va fi către

distanţa lui Saturn în raport invers cu 1 către $\sqrt{4}$, şi precum 12″ către 30″, adică precum 24 către 30 sau 4 către 5. Iar cometa din luna aprilie a anului 1665, după cum ne informează Hevelius, prin claritatea sa întrecea aproape toate stelele fixe, chiar pe însuşi Saturn, din cauza culorii foarte vii. Căci această cometă era mai luminoasă decît cealaltă, care apăruse la sfîrşitul anului precedent, şi se asemăna cu stelele de mărimea întîi. Lăţimea capului era de aproape 6′, nucleul însă comparat cu planetele cu ajutorul tubului optic era mai mic decît Jupiter, şi părea cînd mai mic decît corpul intermediar al lui Saturn, cînd egal cu el. Apoi cum diametrul capului cometelor rareori întrece 8′ sau 12′, diametrul nucleului sau a stelei centrale este aproapre a zecea parte sau poate a cincisprezecea parte a diametrului capului, este evident că aceste stele în genere sînt de aceeaşi mărime aparentă cu planetele. De aceea cum lumina lor poate fi asemănată nu rareori cu lumina lui Saturn, şi uneori o şi întrece, este evident, că toate cometele în periheliu trebuie situate sau dincoace de Saturn, sau nu departe dincolo. Prin urmare rătăcesc aceia care situiază cometele în regiunea apropiată a stelelor fixe: din care cauză nu ar putea fi luminate mai mult de Soarele nostru, decît sînt luminate planetele, care sînt aici, de stelele fixe.

Acestea le-am discutat fără să considerăm obscuritatea cometelor din cauza fumului foarte bogat şi gros, cu care e înconjurat capul, lucind totdeauna slab ca printr-un nor. Căci cu cît corpul devine mai obscur prin acest fum, cu atît e mai necesar să se apropie de Soare, pentru ca prin bogăţia de lumină reflectată de el să poată concura cu planetele. Deci e verosimil că cometele se apropie cu mult dincoace de sfera lui Saturn, după cum am demonstrat din paralaxă. Acelaşi lucru se confirmă foarte bine prin cozi. Acestea se nasc fie din reflexia fumului împrăştiat prin eter, fie din lumina capului. În primul caz trebuie micşorată distanţa cometelor, ca nu cumva fumul născut totdeauna din cap să se propage prin spaţii foarte vaste cu o viteză şi expansiune de necrezut. În al doilea caz trebuie să atribuim nucleului capului toată lumina atît a cozii cît şi a capului. Aşadar dacă ne închipuim că toată lumina e adunată şi condensată în discul nucleului, desigur nucleul, de cîte ori emite o coadă foarte mare şi strălucitoare, va întrece cu mult în splendoarea sa pe însuşi Jupiter. Prin urmare emiţînd mai multă lumină cu un diametru aparent mai mic, va fi cu mult mai mult luminat de Soare, şi deci va fi cu mult mai aproape de Soare. Iar pe acelea care-şi ascund capetele sub Soare, şi emit cozi pe cît de mari pe atît de strălucitoare, uneori ca nişte torţe de foc, din acelaşi motiv trebuie să le situăm în interiorul orbitei lui Venus. Căci dacă presupunem că întreaga lumină se concentrează într-o stea, le-ar întrece uneori pe însăşi Venus, ca să nu zic mai multe Venus-uri luate împreună.

În sfîrşit acelaşi lucru se deduce din lumina capetelor ce creşte cînd cometele se îndepărtează de la Pămînt spre Soare, şi descreşte cînd ele se îndepărtează de la Soare spre Pămînt. Căci astfel ultima cometă a anului 1665 (după observaţiile lui Hevelius) din momentul cînd a început a fi văzută pierdea totdeauna din mişcarea sa aparentă, şi deci trecuse peste perigeu; totuşi splendoarea capului creştea din zi în zi, pînă ce cometa acoperită de razele solare a încetat de a se vedea. Cometa anului 1683 (după observaţia aceluiaşi Hevelius) la sfîrşitul lunii iulie, cînd s-a văzut mai întîi, se mişca foarte încet, făcînd aproximativ 40 sau 45 minute în fiecare zi pe orbita sa.

Din acel timp mișcarea ei diurnă creștea într-una pînă la 4 septembrie cînd deveni de aproape 5 grade. Deci în tot acest timp cometa se apropia de Pămînt. Ceea ce se deduce și din diametrul capului măsurat cu micrometrul: căci Hevelius a aflat la 6 august că este de numai 6′5″ inclusiv coama, la 2 septembrie că e de 9′7″. Așadar la început capul apăru cu mult mai mic decît la sfîrșitul mișcării, totuși la început din cauza apropierii de Soare apăru cu mult mai luminos decît aproape de sfîrșit, după cum comunică același Hevelius. Prin urmare în tot acest timp, din cauza depărtării sale de Soare, lumina ei a descresut cu toate că se apropia de Pămînt. Cometa anului 1618 de pe la mijlocul lui decembrie, și cea din anul 1680 de pe la sfîrșitul aceleiași luni, se mișcau foarte repede, și deci atunci erau în perigee. Dar strălucirea maximă a capetelor s-a observat înainte cu aproape două săptămîni, cînd tocmai ieșeau din razele solare; și strălucirea maximă a cozilor cu puțin înainte, în apropierea mai mare a Soarelui. Capul primei comete, după observațiile lui Cysat, la 1 decembrie apărea mai mare ca stelele de mărimea întîi, și la 16 decembrie (fiind deja în perigeu) scăzuse în mărime puțin, foarte mult însă în claritatea luminii. La 7 ianuarie Kepler, nefiind sigur de cap, încetă observațiile. În ziua de 12 a lunii decembrie capul ultimei comete a fost văzut și observat de Flamsteed la 9 grade distanță de Soare; ceea ce cu greu s-ar fi admis unei stele de mărimea a treia. La 15 și 17 decembrie, aceeași a apărut ca o stea de mărimea a treia, scăzută prin strălucirea norilor din apropierea Soarelui ce apunea. La 26 decembrie cu o mișcare foarte rapidă, și aflîndu-se aproape de perigeu, era mai mică decît gura lui Pegasus, stea de mărimea a treia. La 3 ianuarie apărea ca o stea de mărimea a patra, la 9 ianuarie ca o stea de mărimea a cincea, la 13 ianuarie a dispărut din cauza strălucirii crescînde a Lunii. La 25 ianuarie abia era egală cu o stea de mărimea a șaptea. Dacă se iau timpuri egale de o parte și de alta, a perigeului, capetele cometei, care în acele timpuri situate în regiuni foarte îndepărtate, din cauza distanțelor egale de la Pămînt, ar fi trebuit să lucească în mod egal, au strălucit mai tare în partea dinspre Soare, dispărînd de cealaltă parte a perigeului. Prin urmare din marea diferență de lumină în fiecare din cele două poziții, se conchide marea vecinătate a Soarelui și a cometei în poziția de mai înainte. Căci lumina cometelor de obicei e regulată, și apare maximă cînd capetele se mișcă foarte repede, și deci sînt în perigee; dacă nu cumva ea e mai mare în vecinătatea Soarelui.

COROLARUL 1. Așadar cometele lucesc prin lumina Soarelui pe care ele o reflectă.

COROLARUL 2. Din cele spuse se înțelege și pentru ce cometele frecventează atît de mult regiunea Soarelui. Dacă ar fi observate în regiunile depărtate dincolo de Saturn, ar trebui să apară mai des în părțile opuse Soarelui. Căci cele care s-ar afla în aceste părți, ar fi mai aproape de Pămînt; și Soarele situat între ele ar acoperi pe celelalte. Într-adevăr, parcurgînd istoria cometelor, am aflat că s-au descoperit de patru sau de cinci ori mai multe pe emisfera dinspre Soare, decît pe emisfera opusă, afară de altele fără îndoială nu puține, pe care le-a acoperit lumina solară. Desigur în apropiere de regiunile noastre ele nu emit nici cozi, nici nu sînt atît de luminate de Soare, ca să se descopere ochilor liberi, înainte de a fi mai aproape decît Jupiter. Dar partea cu mult mai mare a spațiului descris în jurul Soarelui cu o rază atît de mică e situată de partea Pămîntului, care privește spre Soare; și în

această parte mai mare cometele, ca fiind cele mai apropiate de Soare, de obicei sînt mai luminate.

COROLARUL 3. De aici se mai vede, că cerurile sînt lipsite de rezistență. Căci cometele urmînd drumuri oblice și uneori contrare cursului planetelor, se mișcă cu cea mai mare libertate, și-și păstrează mișcările timp foarte îndelungat, chiar împotriva cursului planetelor. Mă înșel dacă nu sînt de genul planetelor, revenind incontinuu pe aceeași orbită. Căci se pare lipsită de temei părerea unor scriitori că ele ar fi meteori, plecînd de la argumentul că, capetele lor sînt supuse la schimbări continue. Capetele cometelor sînt înconjurate de atmosfere foarte mari; și atmosferele în interior trebuie să fie mai dense. Prin urmare norii sînt aceia, nu însăși corpurile cometelor, în care se observă acele schimbări. Astfel, Pămîntul, dacă ar fi privit de planete, fără îndoială că ar străluci de lumina norilor săi, și corpul solid aproape s-ar ascunde sub nori. Astfel cercurile lui Jupiter s-au format în norii acelei planete, care-și schimbă poziția între ele, și corpul solid al lui Jupiter prin acei nori se vede mai greu. Și cu atît mai mult trebuie să se ascundă corpurile cometelor sub atmosferele și mai profunde și mai groase.

PROPOZIȚIA XL. TEOREMA XX

Cometele se mișcă pe secțiuni conice avînd focarele în centrul Soarelui, și cu razele duse la Soare descriu arii proporționale cu timpurile.

Aceasta este evident din corolarul 1, propoziția XIII, Cartea I, comparată cu propozițiile VIII, XII și XIII, Cartea a III-a.

COROLARUL 1. De aici dacă cometele se mișcă pe orbite; orbitele vor fi elipse, și timpurile periodice vor fi către timpurile periodice ale planetelor în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a axelor principale. Și deci cometele care în cea mai mare parte se află dincolo de planete, și de aceea descriu orbite cu axe mai mari, se mișcă mai încet. Astfel dacă axa orbitei cometei este de patru ori mai mare decît axa orbitei lui Saturn, timpul revoluției cometei va fi către timpul revoluției lui Saturn, adică, către 30 de ani, precum $4\sqrt{4}$ (sau 8) către 1, și deci va fi de 240 de ani.

COROLARUL 2. Iar orbitele vor fi atît de apropiate de parabole, încît în locul lor se pot folosi parabole fără erori sensibile.

COROLARUL 3. Și de aceea (potrivit corolarului 7, propoziția XVI, Cartea I) viteza oricărei comete, va fi totdeauna către viteza unei planete oarecare ce se învîrtește pe un cerc în jurul Soarelui, în raportul rădăcinii pătrate a dublului distanței planetei de la centrul Soarelui, către aproximativ distanța cometei de la centrul Soarelui. Să presupunem că raza orbitei mari, sau semidiametrul mare al elipsei pe care se rotește Pămîntul este de 100000000: și Pămîntul în mișcarea sa medie zilnică va descrie 1720212 părți, și din mișcarea orară 71675 $\frac{1}{2}$ părți. Și deci cometa la aceeași distanță medie a Pămîntului de Soare, cu viteza care este către viteza Pămîntului precum $\sqrt{2}$ către 1, va descrie în mișcarea sa diurnă 2432747 părți, și în mișcarea orară 101364$\frac{1}{2}$ părți. Dar la distanțele mai mari sau mai mici,

atît mișcarea zilnică cît și orară va fi către această mișcare diurnă și orară în raport invers cu rădăcina pătrată a distanțelor, și deci e dată.

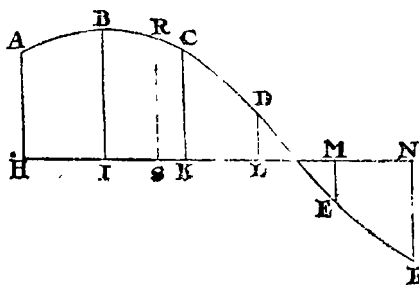
COROLARUL 4. De unde dacă parametrul parabolei este de patru ori mai mare decît raza orbitei mari, și presupunem că pătratul acelei raze este de 100 000 000 părți: aria pe care o descrie zilnic cometa cu raza dusă la Soare, va fi de $1\,216\,373\frac{1}{2}$ părți, și în fiecare oră aria va fi de $50\,682\frac{1}{4}$ părți. Dacă însă parametrul este într-un raport oarecare mai mare sau mai mic, aria zilnică și orară va fi mai mare sau mai mică în același raport al rădăcinii pătrate.

LEMA V

Să aflăm linia curbă de genul parabolei, care va trece prin oricîte puncte date.

Fie A, B, C, D, E, F etc. acele puncte, și din ele pe o dreaptă oarecare de poziție dată să coborîm oricîte perpendiculare AH, BI, CK, DL, EM, FN.

CAZUL 1. Dacă intervalele HI, IK, KL etc. ale punctelor H, I, K, L, M, N etc. sînt egale, să luăm diferențele de ordinul întîi b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$ etc. ale perpendicularelor AH, BI, CK etc., cele de ordinul al doilea c, $2c$, $3c$, $4c$ etc., cele de ordinul al treilea d, $2d$, $3d$ etc., adică, astfel încît să fie $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $- EM + FN = 5b$ etc., apoi $b - 2b = c$ etc., și să pășim astfel



b	$2b$	$3b$	$4b$	$5b$
c	$2c$	$3c$	$4c$	
d	$2d$	$3d$		
e	$2e$			
f				

pînă la ultima diferență, care aici este f. Apoi ridicînd o perpendiculară oarecare RS, care să fie ordonată curbei căutate: ca să aflăm lungimea acesteia să presupunem că intervalele HI, IK, KL LM etc. sînt unități, și să punem $AH = a$, $- HS = p$, $\frac{1}{2}p$ înmulțit cu $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ înmulțit cu $+ SK = r$, $\frac{1}{4}r$ înmulțit cu $+ SL = s$, $\frac{1}{5}s$ înmulțit cu $+ SM = t$; mergînd astfel pînă la perpendiculara penultimă ME, și punînd semnele negative înaintea termenilor HS, IS etc., care sînt situate de părțile punctului S spre A, și semnele pozitive înaintea termenilor SK, SL etc., care sînt situate de celelalte părți ale punctului S. Și observînd corect semnele, va fi $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$ etc.

CAZUL 2. Căci dacă intervalele HI, IK etc. ale punctelor H, I, K, L etc. sînt inegale, să luăm primele diferențe ale perpendicularelor AH, BI, CK etc., împărțite prin intervalele perpendicularelor b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; cele de ordinul al doilea împărțite prin intervalele a oricăror două c, $2c$, $3c$, $4c$ etc. și cele de ordinul al treilea prin intervalele dintre oricare trei d, $2d$, $3d$ etc., cele de

ordinul al patrulea prin intervalele dintre oricare patru $e, 2e$ etc. și așa mai departe; adică, astfel încît să fie $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$ etc., apoi $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$ etc., apoi $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$ etc. Aflînd diferențele, să punem $AH = a$, $-HS = p$, p înmulțit cu $-IS = q$, q înmulțit cu $+SK = r$, r înmulțit cu $+ SL = s$, s înmulțit cu $+ SM = t$; mergînd astfel pînă la perpendiculara penultimă ME, și ordonata va fi $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$ etc.

Corolar. De aici se pot afla aproximativ ariile tuturor curbelor. Căci dacă aflăm cîteva puncte ale unei curbe oarecare a cărei cvadratură voim să o găsim, și ne închipuim că ducem prin ea o parabolă: aria acestei parabole va fi aproximativ aceeași cu aria acelei curbe a cărei cvadratură o căutăm. Cvadratura parabolei însă totdeauna poate fi aflată prin mijloacele foarte cunoscute ale cvadraturii geometrice.

LEMA VI

Din observațiile cîtorva locuri ale cometei să aflăm locul ei într-un timp oarecare intermediar dat.

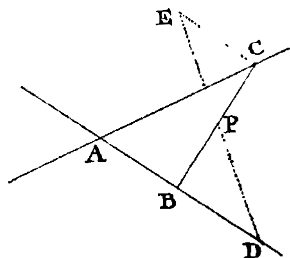
Fie HI, IK, KL, LM timpurile dintre observații (în figura precedentă), HA, IB, KC, LD, ME cinci longitudini observate ale cometei, HS timpul dat între prima observație și longitudinea căutată. Și dacă prin punctele A, B, C, D, E presupunem dusă o curbă regulată $ABCDE$; și prin lema de mai sus aflăm ordonata ei RS, RS va fi lungimea căutată.

Prin aceeași metodă din cinci latitudini observate se află latitudinea la un timp dat.

Dacă diferențele longitudinilor observate sînt mici, să zicem numai de 4 sau 5 grade; ar fi deajuns trei sau patru observații pentru a afla o nouă longitudine și latitudine. Dacă însă diferențele sînt mai mari, să zicem de 10 sau 20 grade, va trebui să folosim cinci observații.

LEMA VII

Printr-un punct dat P să ducem o linie dreaptă BC, ale cărei părți PB, PC, tăiate de două drepte de poziții date AB, AC, să aibă între ele un raport dat.

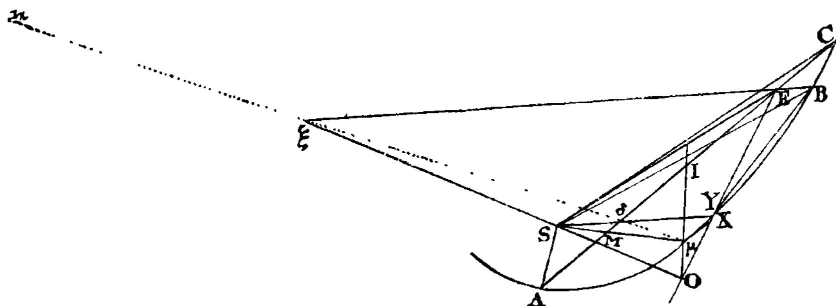


Din punctul P să ducem la una din drepte AB o dreaptă oarecare PD, și să o prelungim spre dreapta cealaltă AC pînă în E, astfel ca PE să fie către PD în acel raport dat. Fie EC paralelă cu AD; și dacă ducem CPB, PC va fi către PB precum PE către PD. Q.E.F.

LEMA VIII

Fie ABC o parabolă avînd focarul S. Coarda AC bisectată în I să taie segmentul ABCI, al cărui diametru fie Iμ şi vîrful μ. Pe Iμ prelungită să luăm μO egală cu jumătatea lui Iμ. Să unim OS, şi să o prelungim pînă în ξ, astfel că Sξ să fie egală cu 2SO. Şi dacă cometa B se mişcă pe arcul CBA, şi ducem ξB tăind AC în E: zic că punctul E va tăia din coarda AC segmentul AE aproximativ proporţional cu timpul.

Căci să unim *EO* tăind arcul parabolic *ABC* în *Y*, și să ducem *μX*, care să atingă același arc în vîrful *μ*, și să întîlnească dreapta dusă *EO* în *X*; și aria curbilinie *AEXμA* va fi către aria curbilinie *ACYμA* precum *AE*



către *AC*. Și deci cum triunghiul *ASE* este către triunghiul *ASC* în același raport, aria întreagă *ASEXμA* va fi către aria întreagă *ASCYμA* precum *AE* către *AC*. Cum însă *ξO* este către *SO* precum 3 la 1, și *EO* către *XO* în același raport, *SX* va fi paralelă cu *EB*: și de aceea dacă unim *BX*, triunghiul *SEB* va fi egal cu triunghiul *XEB*. De unde dacă la aria *ASEXμA* adunăm triunghiul *EXB*, și din sumă scădem triunghiul *SEB*, va rămîne aria *ASBXμA*, egală cu aria *ASEXμA*, și deci către aria *ASCYμA* precum *AE* către *AC*. Dar aria *ASBYμA* este aproximativ egală cu aria *ASBXμA*, și această arie *ASBYμA* este către aria *ASCYμA*, precum timpul de descriere al arcului *AB* către timpul de descriere al arcului întreg *AC*. Și deci *AE* este către *AC* aproximativ în raportul timpurilor. Q.E.D.

Corolar. Cînd punctul *B* coincide cu vîrful *μ* al parabolei, *AE* este către *AC* exact în raportul timpurilor.

SCOLIE

Dacă unim *μξ* tăind *AC* în *δ*, și pe ea luăm *ξn*, care să fie către *μB* precum 27*MI* către 16*μM*: dreapta dusă *Bn* va tăia coarda *AC* în raportul timpurilor mai precis ca mai înainte. Dar punctul *n* trebuie să fie situat dincolo de punctul *ξ*, dacă punctul *B* este mai îndepărtat de vîrful principal al parabolei decît punctul *μ*; și dincoace dacă este mai apropiat de același vîrf.

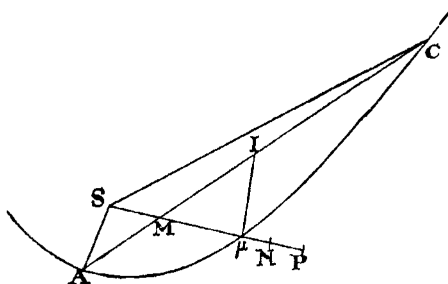
LEMA IX

Dreptele Iμ şi μN şi lungimea $\frac{AIC}{4S\mu}$ *sînt egale între ele, căci 4Sμ este parametrul parabolei aparţinînd vîrfului μ.*

LEMA X

Dacă prelungim pe $S\mu$ în N şi P, astfel că μN să fie a treia parte a lui μI, şi SP către SN să fie precum SN către $S\mu$. Cometa, în timp ce descrie arcul $A\mu C$, dacă ar progresa totdeauna cu aceeaşi viteză pe care o are la o înălţime egală cu SP, ar descrie o lungime egală cu coarda AC.

Căci dacă cometa, cu viteza pe care o are în μ, în acelaşi timp ar înainta în mod uniform pe o dreaptă, care atinge parabola în μ; aria, pe care ar descri-o cu raza dusă în punctul S, ar fi egală cu aria parabolică $ASC\mu$. Şi deci spaţiul cuprins de lungimea tangentei descrise şi de lungimea $S\mu$ ar fi către spaţiul cuprins de lungimile AC şi SM, precum aria $ASC\mu$ către triunghiul ASC, adică, precum SN către SM. De aceea AC este către lungimea descrisă pe tangentă, precum $S\mu$ către SN. Cum însă viteza cometei la înălţimea SP este (potrivit corolarului 6, propoziţia XVI, Cartea I) către viteza ei la înălţimea $S\mu$, în raport invers cu rădăcina lui SP către $S\mu$, adică în raportul $S\mu$ către SN; lungimea descrisă cu această viteză în acelaşi timp, va fi către lungimea descrisă pe tangentă, precum $S\mu$ către SN. Aşadar AC şi lungimea descrisă cu această nouă viteză, fiindcă sînt în acelaşi raport cu lungimea descrisă pe tangentă, sînt egale între ele. Q.E.D.

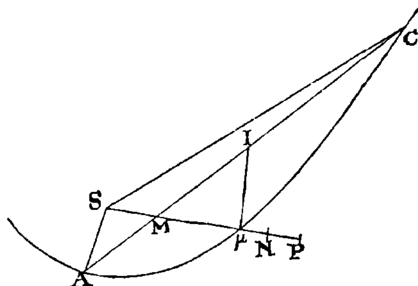


Corolar. Prin urmare o cometă cu viteza, pe care o are la înălţimea $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, în acelaşi timp ar descrie aproximativ coarda AC.

LEMA XI

Dacă o cometă lipsită de orice mişcare e lăsată liberă de la înălţimea SN, sau $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$, ca să cadă spre Soare, şi este totdeauna împinsă spre Soare cu o forţă continuată în mod uniform, cu care e acţionată la început; în căderea sa ea ar descrie un spaţiu egal cu lungimea $I\mu$ în jumătatea timpului, în care va descrie arcul AC pe orbita sa.

Căci cometa în timpul în care ar descrie arcul parabolic AC, în acelaşi timp cu viteza, pe care o are la înălţimea SP (potrivit ultimei leme) va descrie coarda AC, şi deci (potrivit corolarului 7, propoziţia XVI, Cartea I) învîrtindu-se sub forţa gravităţii sale pe un cerc, al cărui semidiametru ar fi SP, ar descrie un arc, a cărui lungime ar fi către coarda AC a arcului para-



bolic, precum rădăcina pătrată a raportului $\frac{1}{2}$. Şi de aceea greutatea, pe care o are în Soare la înălţimea SP, căzînd de la acea înălţime spre Soare, ar descrie în jumătatea acelui timp (potrivit corolarului 9, propoziţia IV, Cartea I) un spaţiu egal cu pătratul jumătăţii acelei coarde împărţite cu cvadruplul înălţimii SP, adică spaţiul $\frac{AI^2}{4S\mu}$. De unde cum greutatea cometei spre Soare la înălţimea SN este către greutatea ei spre Soare la înălţimea SP, precum SP către $S\mu$: cometa căzînd spre Soare, cu greutatea pe care o are la înălţimea SN, în acelaşi timp va descrie spaţiul $\frac{AI^2}{4S\mu}$, adică un spaţiu egal cu lungimea $I\mu$ sau $M\mu$. Q.E.D.

PROPOZIŢIA XLI. PROBLEMA XXI

Să determinăm din trei observaţii date traiectoria unei comete ce se mişcă pe o parabolă.

Această problemă foarte grea încercînd să o rezolv în mai multe feluri, am compus cîteva probleme în Cartea I, care se referă la soluţia ei. Apoi am găsit soluţia următoare ceva mai simplă.

Să alegem trei observaţii depărtate între ele aproximativ prin intervale egale de timp. Fie însă intervalul de timp, în care cometa se mişcă mai încet, cu ceva mai mare decît celălalt, anume astfel ca diferenţa timpurilor să fie către suma timpurilor, precum suma timpurilor către aproape 600 de zile; sau aşa fel ca punctul E (în figura lemei VIII) să cadă aproximativ în punctul M, şi de aici să se îndrepte mai mult spre I decît spre A. Dacă nu avem la dispoziţie astfel de observaţii, trebuie să aflăm un nou loc al cometei cu ajutorul lemei VI. Fie S Soarele, T, t, τ trei locuri ale Pămîntului pe orbita mare, TA, tB, τC trei lungimi observate ale cometei, V timpul dintre observaţia întîi şi a doua, W timpul între a doua şi a treia, X lungimea, pe care o poate descrie cometa în tot acel timp cu viteza, pe care o are la distanţa mijlocie a Pămîntului de Soare, şi care (potrivit corolarului 3, propoziţia XL, Cartea a III-a) trebuie aflată, şi tV perpendiculara pe coarda $T\tau$. Pe lungimea mijlocie observată tB să luăm un punct oarecare B în locul cometei în planul eclipticei, şi de aici spre Soarele S să ducem linia BE, care să fie către săgeata

tV, precum produsul dintre SB și St^2 către cubul ipotenuzei triunghiului dreptunghic, a cărui laturi sînt SB și tangenta latitudinii cometei în observația a doua către raza tB. Și prin punctul E să ducem (potrivit lemei VII, Cartea a III-a) dreapta AEC, ale cărei părți AE, EC, către dreptele terminate TA și τC, să fie una către alta precum timpurile V și W: și A și C vor fi aproximativ locurile cometei în planul eclipticei în observația întîi și a treia, dacă B este locul ei luat corect în observația a doua.

Pe AC bisectată în I să ridicăm perpendiculara Ii. Prin punctul B să ne închipuim linia Bi dusă paralel cu AC. Să unim Si ce taie pe AC în λ, și să completăm paralelogramul $iI\lambda\mu$. Să luăm $I\sigma$ egal cu $3I\lambda$, și prin Soarele S să ducem linia $\sigma\xi$ egală cu $3S\sigma + 3i\lambda$. Și ștergînd literele A, E, C, I, din punctul B să ducem spre punctul ξ o nouă linie BE, care să fie către cea de mai înainte BE precum pătratul raportului distanței BS către cantitatea $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Și prin punctul E să ducem iarăși dreapta AEC după aceeași lege ca mai sus, adică, în așa fel ca părțile ei AE și EC să fie una către alta, precum timpurile V și W dintre observații. Și A și C vor fi locurile cometei cu cea mai mare precizie.

Pe AC bisectată în I să ridicăm perpendicularele AM, CN, IO, dintre care AM și CN să fie tangentele latitudinilor din observația întîi și a treia către razele TA și τC. Să unim MN tăind pe IO în O. Să construim dreptunghiul $iI\lambda\mu$ ca mai sus. Pe IA prelungită să luăm ID egală cu $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Apoi pe MN spre N să luăm MP, care să fie către lungimea X aflată ca mai sus, precum rădăcina pătrată a raportului distanței mijlocii a Pămîntului la Soare (sau a semidiametrului orbitei mari) către distanța OD. Dacă punctul P coincide cu punctul N; A, B, C vor fi trei locuri ale cometei, prin care trebuie descrisă orbita ei în planul eclipticei. Dacă însă punctul P nu coincide cu punctul N; pe dreapta AC să luăm CG egală cu NP, astfel ca punctele G și P să fie situate de aceeași parte a dreptei NC.

Prin aceeași metodă, prin care am aflat punctele E, A, C, G din punctul presupus B, să aflăm din alte puncte oarecare b și β luate la întîmplare

punctele noi e, a, c, g și ε, α, k, γ. Apoi dacă prin G, g, γ, ducem circumferința cercului $Gg\gamma$, tăind dreapta τC în Z : Z va fi locul cometei în planul eclipticei. Și dacă pe AC, ac, αk luăm AF, af, $\alpha\Phi$, egale respectiv cu CG, cg, $k\gamma$ și prin punctele F, f, Φ ducem circumferința cercului $Ff\Phi$, tăind dreapta AT în X; punctul X va fi un alt loc al cometei în planul eclipticei. În punctele X și Z să ridicăm tangentele latitudinilor cometei la razele TX și τZ; și vom avea două locuri ale cometei pe orbita proprie. În sfîrșit (potrivit propoziției XIX, Cartea I) din focarul S, prin cele două locuri să descriem o parabolă, și aceasta va fi traiectoria cometei. Q.E.I.

Demonstrația acestei construcții rezultă din leme; deoarece cum dreapta AC se taie în E în raportul timpurilor, potrivit lemei VII, după cum cere lema VIII: și BE potrivit lemei XI este o parte a dreptei BS sau $B\xi$ în planul eclipticei interceptată între arcul ABC și coarda AEC; și MP (potrivit corolarului lema X) este lungimea coardei arcului pe care trebuie să-l descrie cometa pe orbita proprie între observația întîi și a treia, și deci ar fi egală cu MN, dacă B este locul adevărat al cometei în planul eclipticei.

De altfel e convenabil să nu alegem punctele B, b, β la întîmplare, ci foarte apropiate. Dacă cunoaștem aproximativ unghiul AQt, după care proiecția orbitei descrisă în planul eclipticei taie dreapta tB: în acel unghi trebuie să ducem linia AC, care să fie către $\frac{4}{3}\ T\tau$ precum rădăcina pătrată a raportului lui SQ către St. Și ducînd dreapta SEB, a cărei parte EB să fie egală cu lungimea Vt; vom determina punctul B pe care-l putem întrebuința întîia dată. Atunci ștergînd dreapta AC și ducînd-o din nou după construcția precedentă și, pe lîngă aceea, lungimea MP; pe tB să luăm punctul b, în așa fel că, dacă TA, τC s-ar tăia reciproc în Y, distanța Yb să fie către distanța YB, într-un raport compus din raportul lui MP către MN și rădăcina pătrată a raportului lui SB către Sb. Și după aceeași metodă va trebui aflat punctul al treilea β, dacă voim să repetăm operația a treia oară. Dar prin această metodă două operații de obicei sînt de ajuns. Căci dacă distanța Bb se întîmplă să fie foarte mică; după ce am aflat punctele F, f, și G, g dreptele duse Ff și Gg, vor tăia TA și τC în punctele căutate X și Z.

EXEMPLU

Să considerăm cometa anului 1680. Mișcarea ei observată de Flamsteed și calculată din observații, și corectată de Halley din aceleași observații, este dată în tabloul următor:

		Timpul aparent	Timpul adevărat	Longitudinea Soarelui	Longitudinea cometei	Latitudinea nordică a cometei
	d	h m	h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680 decembrie	12	4 46	4 46 0	♑ 1 51 23	♑ 6 32 38	8 28 0
	21	6 $32\frac{1}{2}$	6 36 59	11 6 44	♒ 5 8 12	21 42 13
	24	6 12	6 17 52	14 9 26	18 49 23	25 23 5
	26	5 14	5 20 44	16 9 22	28 24 13	27 0 52
	29	7 55	8 3 2	19 19 43	♊ 13 10 41	28 9 58
	30	8 2	8 10 26	20 21 9	17 38 20	28 11 53

		Timpul aparent	Timpul adevărat	Longitudinea Soarelui	Longitudinea cometei	Latitudinea nordică a cometei
	d	h m	h m s	° ′	° ′	° ′
1681 ianuarie	3	7 41	7 50 38	24 24 43	2 53 0	27 7 48
	5	5 51	6 1 38	26 22 18	♈ 8 48 53	26 15 7
	9	6 49	7 0 53	♒ 0 29 2	18 44 4	24 11 56
	10	5 54	6 6 10	1 27 43	20 40 50	23 43 52
	13	6 56	7 8 55	4 33 20	25 59 48	22 17 28
	25	7 44	7 58 42	16 45 36	♉ 9 35 0	17 56 30
	26	6 35	6 49 44	17 46 28	10 19 0	17 40 30
	30	8 7	8 21 53	21 49 58	13 19 51	16 42 18
1681 februarie	2	6 20	6 34 51	24 46 59	15 13 53	16 4 1
	5	6 50	7 4 41	27 49 51	16 59 6	15 27 3

Să alăturăm acestora cîteva observaţii de-ale noastre.

		Timpul aparent	Longitudinea cometei	Latitudinea nordică a cometei
	d	h m	° ′ ″	° ′ ″
1681 februarie	25	8 30	♉ 26 18 35	12 46 46
	27	8 15	27 4 30	12 36 12
1681 martie	1	11 0	27 52 42	12 23 40
	2	8 0	28 12 48	12 19 38
	5	11 30	29 18 0	12 3 16
	7	9 30	♊ 0 4 0	11 57 0
	9	8 30	0 43 4	11 45 52

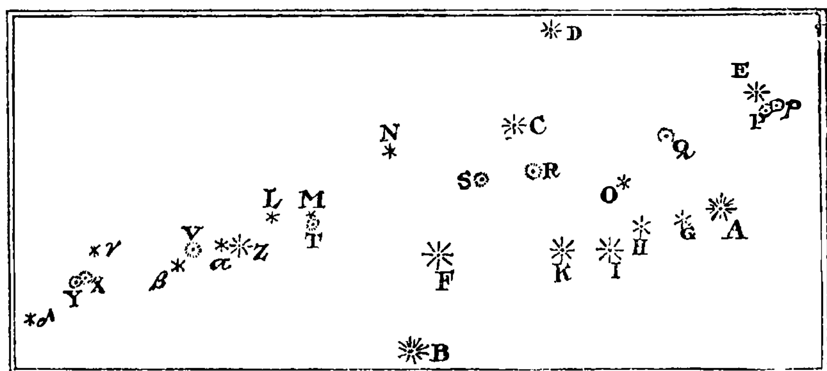
Aceste observaţii au fost făcute cu un telescop de 7 picioare, şi cu un micrometru şi fire plasate în focarul telescopului; cu aceste instrumente am determinat atît poziţiile stelelor fixe între ele cît şi poziţiile cometelor faţă de stelele fixe. Fie A o stea de mărimea a patra în călcîiul stîng al lui Perseus (o a lui Bayer) B steaua următoare de mărimea a treia în piciorul stîng (ξ a lui Bayer) şi C stea de mărimea a şasea (n a lui Bayer) în călcîiul aceuliaşi picior, şi $D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ alte stele mai mici în acelaşi picior. Şi fie p, P, Q, R, S, T, V, X, locurile în observaţiile descrise mai sus: şi distanţa AB fiind de $80\frac{7}{12}$ părţi, AC era de $52\frac{1}{4}$ părţi, BC de $58\frac{5}{6}$, AD de $57\frac{5}{12}$, BD de $82\frac{6}{11}$, CD de $23\frac{2}{3}$, AE de $29\frac{4}{7}$, CE de $57\frac{1}{2}$, DE de $49\frac{11}{12}$, AI de $27\frac{7}{12}$, BI de $52\frac{1}{6}$, CI de $36\frac{7}{12}$, DI de $53\frac{5}{11}$, AK de $38\frac{2}{3}$, BK de 43, CK de $31\frac{5}{9}$. FK de 29, FB de 23, FC de $36\frac{1}{4}$, AH de $18\frac{6}{7}$, DH de $50\frac{7}{8}$, BN de $46\frac{5}{12}$, CN de $31\frac{1}{3}$, BL de $45\frac{5}{12}$, NL de $31\frac{5}{7}$. HO era către HI precum 7 către 6 şi prelungite treceau printre stelele D şi E, astfel încît distanţa stelei D de la această dreaptă era $\frac{1}{6}CD$. LM era către LN precum 2 către 9 şi prelungită trecea prin steaua H. Prin acestea se determinau poziţiile stelelor fixe între ele.

În sfîrşit compatriotul nostru Pound a observat din nou poziţiile acestor stele fixe între ele, şi a pus longitudinile şi latitudinile lor în tabloul următor.

Stelele fixe	Longitudinea	Latitudinea nord	Stelele fixe	Longitudinea	Latitudinea nord
	° ′ ″	° ′ ″		° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26 41 50	12 8 36	*L*	♉ 29 33 34	12 7 48
B	28 40 23	11 17 54	*M*	29 18 54	12 7 20
C	27 58 30	12 40 25	*N*	28 48 29	12 31 9
E	26 27 17	12 52 7	*Z*	29 44 48	11 57 13
F	> I 28 28 37	11 52 22	α	29 52 3	11 55 48
G	26 56 8	12 4 58	β	♊ 0 8 23	11 48 56
H	27 11 45	12 2 1	γ	0 40 10	11 55 18
I	27 25 2	11 53 11	δ	1 3 20	11 30 42
K	27 42 7	11 53 25			

Poziţiile cometei faţă de aceste stele fixe le-am observat după cum urmează:

În ziua de vineri 25 februarie st. v. ora $8\frac{1}{2}$ p.m. distanţa cometei situate în *p* de la steaua *E* era mai mică decît $\frac{3}{13}$ *AE*, mai mare decît $\frac{1}{5}$ *AE*, și



deci aproximativ egală cu $\frac{1}{14}$ *AE*; și unghiul *ApE* era puţin obtuz, dar aproape drept. Căci dacă din *A* s-ar coborî pe *pE* o perpendiculară, distanţa cometei de la acea perpendiculară era $\frac{1}{5}$ *pE*.

În aceeași noapte la ora $9\frac{1}{2}$, distanţa cometei situate în *P* la steaua *E* era mai mare ca $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *AE*, mai mică decît $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *AE*, și deci egală cu $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ *AE*, sau aproximativ $\frac{8}{39}$ *AE*. Dar distanţa cometei la perpendiculara coborîtă din steaua *A* pe dreapta *PE* era de $\frac{4}{5}$ *PE*.

În ziua de duminică 27 februarie ora $8\frac{1}{4}$ p. m. distanţa cometei situate în *Q* la steaua *O* era egală cu distanţa stelelor *O* și *H*, și dreapta *QO* prelungită trecea printre stelele *K* și *B*. Poziţia acestei drepte nu am putut-o determina mai precis din cauza intervenţiei norilor.

În ziua de marţi 1 martie ora 11 p.m., cometa, fiind în *R*, era situată precis între stelele *K* și *C*, și partea *CR* a dreptei *CRK* era ceva mai mare

decît $\frac{1}{3}$ *CK*, și puțin mai mică decît $\frac{1}{3}$ *CK* $+\frac{1}{8}$ *CR*, și deci egală cu $\frac{1}{3}$ *CK* $+$ $\frac{1}{16}$ *CR* sau $\frac{16}{45}$ *CK*.

În ziua de miercuri 2 martie ora 8 p.m. distanța cometei situate în *S* la steaua *C* era aproximativ de $\frac{4}{9}$ *FC*. Distanța stelei *F* la dreapta *CS* prelungită era de $\frac{1}{24}$ *FC*; și distanța stelei *B* la aceeași dreaptă, era de cinci ori mai mare ca distanța stelei *F*. La fel dreapta *NS* prelungită trecea printre stelele *H* și *I*, fiind de cinci sau șase ori mai aproape de steaua *H* decît steaua *I*.

În ziua de sîmbătă 5 martie ora $11\frac{1}{2}$ p. m., cometa fiind în *T*, dreapta *MT* era egală cu $\frac{1}{2}$*ML*, și dreapta *LT* prelungită trecea printre *B* și *F*, de patru sau de cinci ori mai aproape de *F* decît de *B*, tăind din *BF* a cincea sau a șasea parte înspre *F*. Și *MT* prelungită trecea în afara spațiului *BF* de părțile stelei *B*, fiind de patru ori mai aproape de steaua *B* decît de steaua *F*. *M* era o stea foarte mică care abia se putea vedea prin telescop, și *L* o stea mai mare aproape de mărimea a opta.

În ziua de luni 7 martie ora $9\frac{1}{2}$ p.m. cometa fiind în *V*, dreapta $V\alpha$ prelungită trecea printre *B* și *F*, tăind din *BF* spre *F*, $\frac{1}{10}$ *BF*, și era către dreapta $V\beta$ precum 5 către 4. Și distanța cometei la dreapta $\alpha\beta$ era $\frac{1}{2}$ $V\beta$.

În ziua de miercuri 9 martie ora $8\frac{1}{2}$ p. m., cometa fiind în *X*, dreapta γX era egală cu $\frac{1}{4}$ $\gamma\delta$, și perpendiculara coborîtă de la steaua δ pe dreapta γX era de $\frac{2}{5}$ $\gamma\delta$.

În aceeași noapte la ora 12, cometa fiind în *Y*, dreapta γY era egală cu $\frac{1}{3}$, $\gamma\delta$, sau ceva mai mică, anume $\frac{5}{16}\gamma\delta$, și perpendiculara coborîtă de la steaua δ pe dreapta γY era egală cu aproximativ $\frac{1}{6}$ sau $\frac{1}{7}$ $\gamma\delta$. Dar din cauza apropierii de orizont abia am putut observa cometa, și nici n-am putut determina locul ei atît de precis ca în cele precedente.

Din observații de acest fel prin construcțiile figurilor și calcule am dedus longitudinile și latitudinile cometei; și compatriotul nostru Pound din pozițiile mai precise ale stelelor fixe a corectat pozițiile cometei; și pozițiile corectate sînt date mai sus. M-am folosit de un micrometru construit cu puțină artă, totuși erorile longitudinilor și latitudinilor (întru cît provin din observațiile noastre) abia întrec un minut. Cometa însă (după observațiile noastre) la sfîrșitul mișcării sale a început să se abată în mod sensibil spre nord, de la paralela pe care o descria la sfîrșitul lunii februarie.

Pentru a determina orbita cometei, am ales din observațiile descrise pînă acum, trei pe care le-a efectuat Flamsteed la 21 decembrie, 5 ianuarie și 25 ianuarie.

Din acestea am determinat pe *St* de 9842,1 părți și *Vt* de 455 părți, de care semidiametrul orbitei mari are 10000. Atunci pentru întîia operație luînd *tB* de 5657 părți, am aflat *SB* de 9747, *BE* întîia dată de 412, $S\mu$ de 9503, $i\lambda$ de 413: *BE* a doua oară de 421, *OD* de 10186, *X* de 8528,4,

MP de 8450, *MN* de 8475, *NP* de 25. De unde pentru operaţia a doua am obţinut distanţa *tb* de 5640. Şi prin această operaţie am aflat în sfîrşit distanţele *TX* de 4775 şi *τZ* de 11 322. Din acestea determinînd orbita, am aflat nodul ei descendent în ♋ şi ascendent în ♑ 1°53′; înclinarea planului ei faţă de planul eclipticei 61°20′ $\frac{1}{3}$; că vîrful ei (sau periheliul cometei) e la o distanţă de nod de 8°38′: şi că este în ♐ 27°43, avînd latitudinea sudică de 7°34′; şi parametrul de 236,8. şi aria descrisă cu raza dusă la Soare în fiecare zi de 93 585, presupunînd că pătratul semidiametrului orbitei mari e de 100 000 000; că, cometa s-a mişcat pe această orbită după seria semnelor, şi în decembrie $8^d 0^h 4^m$ p.m. se afla în vîrful orbitei sau în periheliu. Toate acestea le-am determinat în mod grafic cu ajutorul scării părţilor egale şi coardele unghiurilor culese din tabloul sinusurilor naturale; construind o schemă destul de vastă, în care anume semidiametrul orbitei mari (de 10 000 părţi) este egală cu $16\frac{1}{3}$ degete ale unui picior englezesc.

În sfîrşit pentru a constata dacă cometa de fapt se mişcă pe orbita astfel aflată, am determinat prin operaţii parte aritmetice, parte grafice poziţiile cometei pe această orbită în timpurile unor observaţii: după cum se pot vedea în tabloul următor:

		Distanţa cometei de la Soare	Longitudinea calculată	Latitudinea calculată	Longitudinea observată	Latitudinea observată	Diferenţa longitudinii	Diferenţa latitudinii
			° ′	° ′	° ′	° ′	′	′
decembrie	12	2792	♑ 6 32	8 $18\frac{1}{2}$	♑ 6 $31\frac{1}{3}$	8 26	+1	− $7\frac{1}{2}$
	29	8403	♓ 13 $13\frac{1}{2}$	28 0	♓ 13 $11\frac{3}{4}$	28 $10\frac{1}{12}$	+2	−$10\frac{1}{12}$
februarie	5	16 669	♉ 17 0	15 $29\frac{2}{3}$	♉ 16 $59\frac{7}{8}$	15 $27\frac{2}{5}$	+0	+ $2\frac{1}{4}$
martie	5	21 737	29 $19\frac{3}{4}$	12 4	29 $20\frac{6}{7}$	12 $3\frac{1}{2}$	−1	+ $\frac{1}{2}$

După aceea compatriotul nostru H a l l e y a determinat orbita printr-un calcul aritmetic mai precis, decît se poate, efectua prin operaţii grafice; şi a aflat locul nodurilor în ♋ şi ♑ de 1°53′ şi înclinarea planului orbitei faţă de ecliptică de 61°20 $\frac{1}{3}$, precum şi timpul periheliului cometei decembrie $8^d 0^h 4^m$: iar distanţa periheliului de la nodul ascendent măsurată pe orbita cometei a aflat-o de 9°20′, şi parametrul parabolei de 2430 părţi, distanţa medie a Soarelui la Pămînt fiind de 100000 părţi. Şi din aceste date, făcînd un calcul aritmetic precis, a determinat poziţiile cometei în timpurile observaţiilor, după cum urmează în tabloul de la p. 396.

Această cometă a mai apărut în luna noiembrie trecut şi a fost observată la *Coburg* în *Saxonia* de către d-l G o t t f r i e d K i r c h în ziua a patra, a şasea şi a unsprezecea a acestei luni, stil vechi; şi din poziţiile ei faţă de stelele fixe cele mai apropiate observate destul de precis cu ajutorul unui telescop de două picioare cît şi a unuia de zece picioare, şi din diferenţa longitudinilor dintre *Coburg* şi *Londra* de unsprezece grade şi din poziţiile stelelor fixe observate de compatriotul nostru P o u n d, compatriotul nostru H a l l e y a determinat locurile cometei după cum urmează.

Noiembrie $3^d 17^h 2^m$, timpul aparent la Londra, cometa era în ♌ 29°51′ cu 1°17′45″ latitudine nordică.

Timpul adevărat				Distanța cometei de la ⊙	Longitudinea calculată				Latitudinea calculată			Erorile de			
												longitudine		latitudine	
	d	h	m			°	′	″	°	′	″	′	″	′	″
decembrie	12	4	46	28028	♑	6	29	25	8	26	0	−3	5	−2	0
	21	6	37	61076	♒	5	6	30	21	43	20	−1	42	+1	7
	24	6	18	70008		18	48	20	25	22	40	−1	3	−0	25
	26	5	21	75576		28	22	45	27	1	36	−1	28	+0	44
	29	8	3	84021	♓	13	12	40	28	10	10	+1	59	+0	12
	30	8	10	86661		17	40	5	28	11	20	+1	45	−0	33
ianuarie	5	6	$1\frac{1}{2}$	101440	♈	8	49	49	26	15	15	+0	56	+0	8
	9	7	0	110959		18	44	36	24	12	54	+0	32	+0	58
	10	6	6	113162		20	41	0	23	44	10	+0	10	+0	18
	13	7	9	120000		26	0	21	22	17	30	+0	33	+0	2
	25	7	59	145370	♉	9	33	40	17	57	55	−1	20	+1	25
	30	8	22	155303		13	17	41	16	42	7	−2	10	−0	11
februarie	2	6	35	160951		15	11	11	16	4	15	−2	42	+0	14
	5	7	$4\frac{1}{2}$	166686		16	58	25	15	29	13	−0	41	+2	10
	25	8	41	202570		26	15	46	12	48	0	−2	49	+1	14
martie	5	11	39	216205		29	10	35	12	5	40	+0	35	+2	24

Noiembrie $5^d\,15^h\,58^m$, cometa era în ♍ 3°23′, cu 1°6′ latitudine nordică.

Noiembrie $10^d\,16^h31^m$, cometa era la o distanță egală de steaua σ din Leul și τ a lui Bayer; dar nu atinsese încă dreapta ce le unește, ci era puțin depărtată de ea. În catalogul stelelor lui Flamsteed σ avea atunci ♍ 14°15′ cu latitudinea nordică de aproximativ 1°41′, iar τ în ♍ $17°3\frac{1}{2}'$ cu latitudinea sudică de 0°34′. Și punctul mijlociu între acestea a fost ♍ $15°39\frac{1}{4}'$, cu $0°33\frac{1}{2}'$ latitudine nordică. Fie distanța mijlocie a cometei la acea dreaptă aproximativ 10′ sau 12′, și diferența longitudinilor cometei și a punctului mediu va fi de 7′, și diferența latitudinilor de aproape $7\frac{1}{2}'$. Și deci cometa era în ♍ 15°32′ cu latitudinea nordică de 26′ aproximativ.

Prima observație din poziția cometei față de anumite stele mici fixe a fost destul de precisă. A doua de asemenea a fost destul de precisă. În a treia, care a fost mai puțin precisă, eroarea putea fi mai mică de șase sau șapte minute, și poate ceva mai mare. Iar longitudinea cometei în prima observație, care a fost mai precisă decît celelalte, calculată pe orbita parabolică menționată era ♌ 29°30′22″ latitudinea nordică de 1°25′7″ și distanța ei de la Soare 115 546.

Mai mult, Halley observînd că o importantă cometă într-un interval de 575 de ani a apărut de patru ori, anume în luna septembrie după moartea lui Juliu Caesar, în anul 531 după Christos în timpul consulatului lui Lampadius și Oreste, în anul de la Christos 1106, luna februarie și la sfîrșitul anului 1680, și anume cu o coadă lungă și remarcabilă (cu excepția epocii morții lui Caesar, cînd din cauza poziției nepotrivite a Pămîntului coada a apărut mai mică): a căutat orbita eliptică a cărei axă mare ar fi de 1 382 957, distanța medie a Pămîntului la Soare fiind de 10 000 părți: pe care orbită, cometa să se poată roti în 575 de ani. Și punînd nodul ascendent în ♋ 2°2′; înclinarea planului orbitei față de planul eclipticei

61°6′48″; periheliul cometei în acest plan în ♐ 22°44′25″; timpul egal al periheliului decembrie $7^d 23^h 9^m$; distanţa periheliului de la nodul ascendent în planul eclipticei 9°17′35″; şi axa conjugată 18481,2: a calculat mişcarea cometei pe această orbită eliptică. Iar locurile ei deduse atît din observaţii cît şi calculate pe această orbită sînt expuse în tabloul următor:

Timpul adevărat		Longitudinea observată	Latitudinea nord observată	Longitudinea calculată	Latitudinea calculată	Erorile în	
						longitudine	latitudine
	d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
noiembrie	3 16 47	♌ 29 51 0	1 17 45	♌ 29 51 22	1 17 32 N	+0 22	−0 13
	5 15 37	♍ 3 23 0	1 6 0	♍ 3 24 32	1 6 9	+1 32	+0 9
	10 16 18	15 32 0	0 27 0	15 33 2	0 25 7	+1 2	−1 53
	16 17 0			♎ 8 16 45	0 53 7A		
	18 21 34			18 52 15	1 26 54		
	20 17 0			28 10 36	1 53 35		
	23 17 5			♏ 13 22 42	2 29 0		
decembrie	12 4 46	♑ 6 32 30	8 28 0	♑ 6 31 20	8 29 6 B	−1 10	+1 6
	21 6 37	♒ 5 8 12	21 42 13	♒ 5 6 14	21 44 42	−1 58	+2 29
	24 6 18	18 49 23	25 23 5	18 47 30	25 23 35	−1 53	+0 30
	26 5 21	28 24 13	27 0 52	28 21 42	27 2 1	−2 31	+1 9
	29 8 3	♓ 13 10 41	28 9 58	♓ 13 11 14	28 10 38	+0 33	+0 40
	30 8 10	17 38 20	28 11 53	17 38 27	28 11 37	+0 7	−0 16
ianuarie	5 6 $1\frac{1}{2}$	♈ 8 48 53	26 15 7	♈ 8 48 51	26 14 57	−0 2	−0 10
	9 7 1	18 44 4	24 11 56	18 43 51	24 12 17	−0 13	+0 21
	10 6 6	20 40 50	23 43 32	20 40 23	23 43 25	−0 27	−0 7
	13 7 9	25 59 48	22 17 28	26 0 8	22 16 32	+0 20	−0 56
	25 7 59	♉ 9 35 0	17 56 30	♉ 9 34 11	17 56 6	−0 49	−0 24
	30 8 22	13 19 51	16 42 18	13 18 28	16 40 5	−1 23	−2 13
februarie	2 6 35	15 13 53	16 4 1	15 11 59	16 2 7	−1 54	−1 54
	5 7 $4\frac{1}{2}$	16 59 6	15 27 3	16 59 17	15 27 0	+0 11	−0 3
	25 8 41	26 18 35	12 46 46	26 16 59	12 45 22	−1 36	−1 24
martie	1 11 10	27 52 42	12 23 40	27 51 47	12 22 28	−0 55	−1 12
	5 11 39	29 18 0	12 3 16	29 20 11	12 2 50	+2 11	−0 26
	9 8 38	0 43 4	11 45 52	♊ 0 42 46	11 45 35	−0 21	−0 17

Observaţiile acestei comete de la început pînă la sfîrşit coincid nu mai puţin cu mişcarea cometei pe orbita descrisă, decît de obicei coincid mişcările planetelor cu teoriile lor, şi fiind în concordanţă demonstrează că a fost una şi aceeaşi cometă, care a apărut în tot timpul, şi orbita ei aici a fost definită corect.

În tabloul precedent am omis observaţiile din zilele de 16, 18, 20 şi 23 noiembrie ca mai puţin precise. Căci cometa a fost observată şi în aceste timpuri. Anume P o n t h i o şi colaboratorii săi, la 17 noiembrie st.v. la ora şase dimineaţa timpul *Romei* (adică, la $5^h 10^m$ timpul de la *Londra*), îndreptînd firele spre stele, a observat cometa în ♎ 8°30′, cu latitudinea sudică 0°40′. Observaţiile lor se află în tratatul, pe care P o n t h i o l-a publicat asupra acestei comete. C e l l i o, care era de faţă şi şi-a trimis observaţiile într-o scrisoare lui C a s s i n i, a văzut cometa la aceeaşi oră în ♎ 8°30′ cu latitudinea sudică 0°30′. G a l l e t din *Avignon* a văzut cometa la aceeaşi oră (adică la $5^h 42^m$ dimineaţa timpul *Londrei*) în ♎ 8° fără latitudine. Dar conform teoriei cometa a fost în ♎ 8°16′45″ cu latitudinea sudică de 0°53 7″.

La 18 *noiembrie* ora dimineţii $6^h\,30^m$ a Romei (adică, ora $5^h\,40^m$ a *Londrei*) Ponthio a văzut cometa în ♎ 13°30′ cu latitudinea sudică 1°20′. Cellio în ♎ 13°30′ cu latitudinea sudică 1°00′. Gallet însă la ora 5^h30^m dimineaţa a văzut la *Avignon* cometa în ♎ 13°00′, cu o latitudine sudică de 1°00′. Şi Ango în Academia din *La Fléche* în Franţa, la ora cinci dimineaţa (adică ora $5^h\,9^m$ a *Londrei*), a văzut cometa la mijloc între două stele mici, dintre care una este media dintre cele trei în linie dreaptă în mîna Fecioarei din emisfera australă, ψ a lui Bayer, şi cealaltă este extrema aripei θ a lui Bayer. Prin urmare cometa atunci a fost în ♎ 12°46′ cu latitudinea sudică de 50′. În aceeaşi zi, la *Boston* din *Noua-Anglie*, la latitudinea de $42\frac{1}{2}$ grade, ora cinci dimineaţa (adică după *Londra* la 9^h44^m dimineaţa), cometa a fost văzută aproape de ♎ 14 grade, cu latitudinea sudică de 1°30′, după cum am aflat de la vestitul Halley.

La 19 noiembrie ora $4\frac{1}{2}$ dimineaţa, la *Cambridge*, cometa (după observaţiile unui tînăr oarecare) era departe de Spica ♍, cam 2 grade spre nord-vest. Spica era însă în ♎ 19°23′47″ cu latitudinea sudică de 2°1′59″. În aceeaşi zi la ora 5 dimineaţa, la *Boston* în *Noua-Anglie*, cometa era la o distanţă de un grad de Spica ♍, diferenţa de latitudine fiind de 40′. În aceeaşi zi în insula *Jamaica*, cometa era la o distanţă de Spica de aproape un grad. În aceeaşi zi Arthur Storer lîngă fluviul *Patuxent*, aproape de *Huting-Creek* în *Maryland*, la graniţele *Virginiei* la latitudinea de $38\frac{1}{2}°$, ora cinci dimineaţa (adică, ora 10 din *Londra*) a văzut cometa deasupra Spicei ♍, şi aproape în contact cu Spica, între ele fiind o distanţă de aproximativ $\frac{3}{4}$ grade. Şi din aceste observaţii comparate între ele conchid că la ora $9^h\,44^m$ după *Londra* cometa era în ♎ 18°50′ cu latitudinea sudică de circa 1°25′. Dar conform teoriei cometa era în ♎ 18°52′15″ cu latitudinea sudică de 1°26′54″.

La 20 noiembrie, d-l Montenari profesor de astronomie la *Padua*, la ora şase dimineaţa *veneţiană* (adică, ora $5^h\,10^m$ după *Londra*) a văzut cometa în ♎ 25° cu latitudinea sudică de 1°30′. În aceeaşi zi la *Boston*, cometa era la o distanţă de Spica ♍, 4° de longitudine spre răsărit, şi deci era în ♎ 25°24′ aproximativ.

La 21 noiembrie, Ponthio şi colaboratorii săi la ora $7\frac{1}{4}$ dimineaţa au observat cometa în ♎ 27°50′ cu latitudinea sudică de 1°16′; Cellio în ♎ 28°, Ango la ora cinci dimineaţa în ♎ 27°45′, Montenari în ♎ 27°51′. În aceeaşi zi în insula *Jamaica*, cometa s-a văzut aproape de începutul Scorpionului, şi avea aproape aceeaşi latitudine cu Spica din Fecioară, adică 2°2′. În aceeaşi zi la ora cinci dimineaţa, la *Ballasore* în *India Orientală* (adică în noaptea precedentă la ora 11^h20^m după *Londra*), s-a luat distanţa cometei de la Spica ♍ 7°35′ spre răsărit. Era pe linia dreaptă dintre Spica şi Balanţă, şi deci se afla în ♎ 26°58′ cu latitudinea sudică de circa 1°11′; şi după orele $5^h\,40^m$ (anume la ora 5 dimineaţa după *Londra*) era în ♎ 28°12′ cu latitudinea sudică de 1°16′. După teorie cometa era în ♎ 28°10′36″, cu latitudinea sudică de 1°53′35″.

La 22 noiembrie, cometa a fost văzută de Montenari în ♏ 2°33′. *La Boston* însă în *Noua-Anglie* a apărut aproximativ în ♏ 3 grade, aproape cu

aceeași latitudine ca mai sus, adică 1°30′. În aceeași zi la ora cinci dimineața, la *Ballasore*, cometa a fost observată în ♏ 1°50′; și deci la ora cinci dimineața după *Londra*, cometa era aproximativ în ♏ 3°5′. În aceeași zi la ora $6\frac{1}{2}$ a *Londrei* compatriotul nostru Hooke a văzut cometa aproximativ în ♏ 3°30′, și anume pe linia dreaptă ce trece prin Spica Fecioarei și Inima Leului, nu tocmai exact, ci puțin mai spre nord. Montenari de asemenea a observat că linia dusă de la cometă prin Spica, în această zi și în cele următoare trecea prin partea de sud a Inimii Leului, fiind un interval foarte mic între Inima Leului și această linie. Linia dreaptă trecînd prin Inima Leului și Spica Fecioarei a tăiat ecliptica în ♍ 3°46′; sub un unghi de 2°51′. Și dacă cometa ar fi fost situată pe această linie în ♏ 3 grade latitudinea ei ar fi fost de 2°26′. Dar cum cometa după părerile lui Hooke și Montenari e puțin depărtată de această linie spre nord, latitudinea ei a fost puțin mai mică. În ziua de 20, după observația lui Montenari, latitudinea ei era aproape egală cu latitudinea Spicei ♍ și era circa de 1°30′, și după părerile unanime ale lui Hooke, Montenari și Ango creștea necontenit, și deci era în mod sensibil mai mare decît 1°30′. Între limitele stabilite de 2°26′ și 1°30′, latitudinea în mărime mijlocie va fi de aproximativ 1°58′. Hooke și Montenari sînt de acord că coada cometei era îndreptată spre Spica ♍, deviind puțin de la această stea, după Hooke spre Sud, după Montenari spre nord; și deci declinația era abia sensibilă, și coada fiind aproape paralelă cu ecuatorul era deviată întrucîtva de la opoziția Soarelui spre nord.

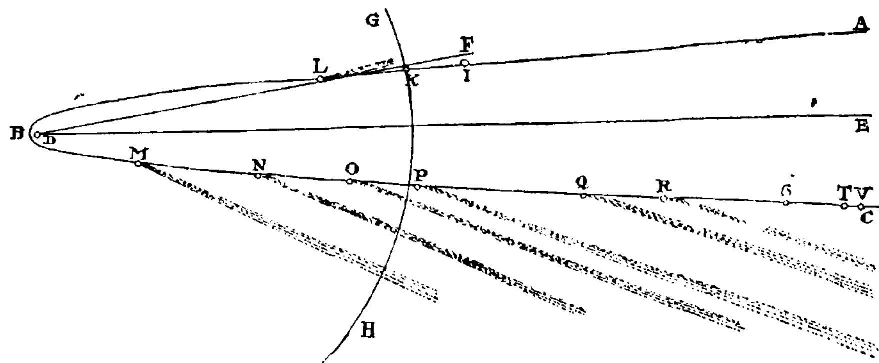
La 23 noiembrie st. v., ora 5 dimineața după *Nüremberg* (adică ora $4\frac{1}{2}$ a Londrei), d-l Zimmerman a văzut cometa în ♏ 8°8′, cu latitudinea sudică de 2°31′, luînd anume distanțele ei de la stelele fixe.

La 24 noiembrie, înainte de răsăritul Soarelui, cometa a fost văzută de Montenari în ♏ 12°52′, de partea nordică a dreptei ce trecea prin Inima Leului și Spica Fecioarei, și deci avea o latitudine ceva mai mică decît 2°38′. Această latitudine, după cum am spus, potrivit observațiilor lui Montenari, lui Ango și ale lui Hooke, creștea necontenit; și deci era ceva mai mare decît 1°58′; și în mărime mijlocie, fără eroare notabilă, se poate stabili la 2°18′. Ponthio și Gallet susțin că latitudinea scade, și Cellio și un observator din *Noua-Anglie*, că ea păstrează aproape aceeași mărime, și anume de un grad sau unul și jumătate. Mai grosolane sînt observațiile lui Ponthio și Cellio, în deosebi acelea în care se foloseau de azimuturi și înălțimi, precum și acelea ale lui Gallet; mai bune sînt acelea care au fost făcute prin pozițiile cometei față de stelele fixe de către Montenari, Hooke, Ango și observatorul din *Noua-Anglie*, și uneori de Ponthio și Cellio. În aceeași zi la ora cinci dimineața la *Ballasore* cometa a fost observată în ♏ 11°45′; și deci la ora cinci dimineața după *Londra* era aproximativ în ♏ 13 grade. Conform teoriei cometa era în ♏ 13°22′42″.

La 25 noiembrie, înainte de răsăritul Soarelui, Montenari a observat cometa aproximativ în ♏ $17\frac{3}{4}$ grade. Și Cellio a observat în același timp că, cometa era pe linia dreaptă dintre steaua luminoasă în coapsa dreaptă a Fecioarei și discul de sud al Balanței, și această dreaptă

taie drumul cometei în ♏ 18°36′. Potrivit teoriei cometa era aproximativ în ♏ $18\frac{1}{3}$ grade.

Așadar aceste observații sînt de acord cu teoria, întrucît ele sînt de acord între ele, și fiind de acord probează că a fost una și aceeași cometă aceea care a apărut tot timpul din 4 noiembrie pînă la 9 martie. Traiectoria acestei comete a tăiat de două ori planul eclipticei, și de aceea nu a fost rectilinie. A tăiat ecliptica nu în părțile opuse ale cerului, ci la sfîrșitul Fecioarei și la începutul Capricornului, la un interval de circa 98 grade; și deci cursul cometei era foarte mult deviat de la un cerc mare. Căci și în luna noiembrie cursul ei devia de la ecliptică spre sud cu cel puțin trei



grade, și apoi în luna decembrie devia cu 29 grade de la ecliptică spre nord, cele două părți ale orbitei, în care cometa tindea spre Soare și revenea de la Soare, deviind una de alta cu un unghi aparent de mai mult de treizeci de grade, după cum a observat M o n t e n a r i. Această cometă trecea prin nouă semne, anume de la ultimul grad al Leului pînă la începutul Gemenilor, afară de semnul Leului, prin care trecea înainte de a fi început a se vedea și nu există altă teorie, prin care o cometă să parcurgă o parte atît de mare a cerului cu o mișcare regulată. Mișcarea ei a fost foarte neegală. Căci în jurul zilei de 20 noiembrie descria aproape 5 grade în fiecare zi; apoi cu o mișcare întîrziată între 26 noiembrie și 12 decembrie, adică într-un spațiu de 15 zile și jumătate, a descris numai 40 grade. Iar după aceea cu o mișcare accelerată, a descris aproximativ 5 grade în fiecare zi, înainte ca mișcarea să fi început să întîrzie. Și teoria care corespunde exact unei mișcări atît de neegale prin cea mai mare parte a cerului, și care observă aceleași legi cu teoria planetelor, și coincide exact cu observațiile astronomice precise, nu poate să nu fie adevărată.

De altfel mi s-a părut util să schițez în figura de mai sus, traiectoria pe care a descris-o cometa, și coada adevărată pe care a emis-o în diversele poziții așezate în planul traiectoriei: unde *ABC* reprezintă traiectoria cometei, *D* Soarele, *DE* traiectoria axei, *DF* linia nodurilor, *GH* intersecția sferei orbitei mari cu planul traiectoriei, *I* locul cometei la 4 noiembrie anul 1680, *K* locul aceleeași la 11 noiembrie, *L* locul la 19 noiembrie, *M* locul la 12 decembrie, *N* locul la 21 decembrie, *O* locul la 29 decembrie, *P* locul la 5 ianuarie următor, *Q* locul la 25 ianuarie, *R* locul la 5 februarie, *S* locul la 25 februarie, *T* locul la 5 martie și *V* locul la 9 martie. M-am folosit de următoarele observații pentru determinarea cozii.

Noiembrie 4 și 6: coada nu apăruse încă. Noiembrie 11: coada începuse să se observe dar nu mai lungă de o jumătate de grad într-un telescop de zece picioare. Noiembrie 17: coada a fost văzută de Ponhtio mai lungă de 15 grade. Noiembrie 18: coada a fost observată lungă de 30 grade în *Noua-Anglie*, direct opusă Soarelui, și se întindea pînă la steaua ♂, care atunci era în ♍ 9°54′. Noiembrie 19: În *Maryland* coada a fost văzută de 15 sau 20 grade lungime. Decembrie 10: coada (după observațiile lui Flamsteed) trecea prin mijlocul distanței dintre coada șarpelui Ophiuchus și steaua δ în aripa de sud a Vulturului și se termina aproape de stelele A, ω, b în tabelele lui Bayer. Prin urmare capătul ei era în ♑ $19\frac{1}{2}$ grade, cu latitudinea boreală de circa $34\frac{1}{4}$ grade. Decembrie 11: coada se urca pînă la capătul Săgeții (α, β după Bayer) terminîndu-se în ♑ 26°43′ cu latitudinea nordică 38°34′. Decembrie 12: coada trecea prin mijlocul Săgeții, și nu se întindea mult mai departe, terminîndu-se în ♒ 4 grade, cu latitudinea nordică de aproximativ $42\frac{1}{2}$ grade. Acestea trebuie înțelese pentru partea mai strălucitoare a cozii. Căci cu o lumină mai obscură, într-un cer poate mai senin, în 12 decembrie la $5^h 40^m$ a *Romei* (după observația lui Ponthio) coada s-a extins pînă la 10 grade deasupra cozii Lebedei; și partea ei dinspre vest și dinspre nord era la o depărtare de 45 minute de această stea. Dar în aceste zile lățimea cozii era de 3 grade, pînă la capătul de sus, și deci mijlocul ei era la o distanță de 2°15′ spre sud, și capătul superior era ♓ în 22 grade, cu latitudinea nordică de 61 grade, și deci coada avea o lungime de circa 70 grade. Decembrie 21: ea se întindea aproape pînă la scaunul *Cassiopeei*, egal depărtată de β și *Schedir*, și fiind la o distanță de fiecare dintre ele egală cu distanța lor reciprocă, și deci terminîndu-se în ♈ 24 grade, cu lățimea de $47\frac{1}{2}$ grade. Decembrie 29: coada atingea *Scheat* situat la stînga, și umplea complet spațiul dintre două stele în piciorul de nord al *Andromedei* și era lungă de 54 grade; și deci se termina în ♉ 19 grade, cu latitudinea de 35 grade. Ianuarie 5: coada a atins steaua π în pieptul *Andromedei* de partea ei dreaptă, și steaua μ în cingătoarea ei de partea stîngă; și (după observațiile noastre) era lungă de 40 grade; era însă curbă și cu partea convexă privea spre sud. Și în apropierea capului cometei făcea un unghi de 4 grade cu cercul ce trecea prin Soare și capul cometei; dar spre celălalt capăt se înclina spre cerc sub un unghi de 10 sau 11 grade și coarda cozii făcea un unghi de 8 grade cu cercul. Ianuarie 13: coada cu o lumină destul de sensibilă se termina între *Alamech* și *Algol* și cu o lumină foarte slabă se termina în regiunea stelei κ în latura lui *Perseus*. Distanța capătului cozii de la cercul ce unea Soarele și cometa era de 3°50′, și înclinarea coardei cozii față de cerc de $8\frac{1}{2}$ grade. Ianuarie 25 și 26: coada strălucea cu o lumină slabă la latitudinea de 6 sau 7 grade; și o noapte sau două după aceea cînd cerul era foarte senin, cu o lumină foarte slabă și abia sensibilă atingea lungimea de 12 grade și ceva mai mult. Iar axa ei era îndreptată exact spre steaua strălucitoare din umărul oriental al Vizitiului, și deci devia de la opoziția Soarelui spre nord cu un unghi de 10 grade. În sfîrșit, la 10 februarie, am observat cu telescopul coada de două grade lungime. Căci lumina mai slabă amintită nu se vedea prin sticle. Ponthio

însă scrie că la 7 februarie a văzut coada avînd o lungime de 12 grade. La 25 februarie și după aceea cometa se vedea fără coadă.

Privind orbita descrisă mai sus și luînd în considerare celelalte fenomene ale acestei comete, se constată fără greutate, că corpurile cometelor sînt solide, compacte, fixe și durabile la fel cu corpurile planetelor. Căci dacă nu ar fi altceva decît vapori sau exhalații de ale Pămîntului, ale Soarelui și planetelor, această cometă în trecerea sa prin vecinătatea Soarelui ar trebui să se risipească imediat. Căci căldura Soarelui este precum densitatea razelor, adică, în raport invers cu pătratul distanței locurilor de la Soare. Și deci cum distanța cometei de la centrul Soarelui la 8 decembrie cînd se afla în periheliu, era către distanța Pămîntului la centrul Soarelui aproximativ precum 6 către 1000, căldura Soarelui către cometă era în acel timp către căldura Soarelui de vară la noi precum 1 000 000 către 36, sau 28 000 către 1. Dar căldura apei în fierbere este aproape de trei ori mai mare decît căldura pe care o primește pămîntul uscat de la soarele de vară, după cum am observat; și căldura fierului incandescent (dacă presupunerea mea este corectă) este aproape de trei sau de patru ori mai mare decît căldura apei ce fierbe; și deci căldura, pe care o poate primi pămîntul uscat de pe cometa situată în periheliu de la razele solare, este de aproape 2000 de ori mai mare decît căldura fierului incandescent. Dar la o căldură atît de mare vaporii și exhalațiile, și orice materie volatilă ar trebui să se consume și să se risipească imediat.

Prin urmare cometa în periheliul său primește o căldură imensă de la Soare, și această căldură o poate conserva timp foarte îndelungat. Căci o sferă de fier incandescent de un deget lățime, stînd în aer abia își pierde căldura întreagă în timp de o oră. O sferă mai mare însă își va păstra căldura timp mai îndelungat în raportul diametrului, deoarece suprafața (după măsura căreia se răcește în contact cu aerul înconjurător) este în acel raport mai mică față de cantitatea materiei sale calde cuprinse. Și deci o sferă de fier incandescent egală cu Pămîntul nostru, adică, avînd o lățime de circa 40 000 000 de picioare, abia s-ar răci în tot atîtea zile, și deci în 50 000 ani. Presupun însă că durata căldurii, din cauze latente, crește într-un raport mai mic decît acela al diametrului: și aș dori să se caute adevăratul raport prin experiențe.

Trebuie să notăm mai departe că cometa din luna decembrie, tocmai cînd se încălzea de la Soare, emitea o coadă cu mult mai mare și mai strălucitoare decît mai înainte în luna noiembrie, cînd nu atinsese încă periheliul. Și în general toate cozile mari și strălucitoare se nasc din comete imediat după trecerea lor prin regiunea Soarelui. Prin urmare încălzirea cometei contribuie la mărimea cozii. Și de aici mi se pare că pot deduce că coada nu este altceva decît o vapoare foarte fină, pe care o emite capul sau nucleul cometei prin căldura sa.

De altfel asupra cozilor cometelor există trei păreri; ele sînt sau lumina Soarelui propagată prin capetele translucide ale cometelor, sau provin din refracția luminii în trecerea ei de la capul cometei spre Pămînt, sau în sfîrșit sînt un nor sau vapori ce izvorăsc într-una din capul cometei îndepărtîndu-se în părțile opuse ale Soarelui. Prima părere o susțin aceia care încă nu sînt familiarizați cu știința opticei. Căci lumina Soarelui nu se vede într-o cameră întunecoasă, decît dacă lumina se reflectă de părticelele de praf și de fum care totdeauna plutesc prin aer; și deci în aerul infectat cu fum gros este

mai strălucitoare, și se va observa mai tare; într-un aer mai clar e mai slabă și abia se va observa: în ceruri însă unde nu există materie reflectantă este nulă. Lumina nu se vede pentru că ea se află într-un corp strălucitor, ci pentru că se reflectă spre ochii noștri. Căci vedere nu există decît prin razele care pătrund în ochii noștri. Trebuie deci să existe o materie reflectantă în regiunea cozii, ca nu cumva întreg cerul luminat de Soare să strălucească în mod uniform. Opinia a doua se lovește de multe dificultăți. Cozile niciodată nu variază în culori: care totuși de obicei sînt însoțitorii inseparabili ai refracțiilor. Lumina stelelor fixe și a planetelor transmisă nouă în mod distinct demonstrează că mediul ceresc nu are nici o putere de refracție. Căci ceea ce se spune despre *egipteni* că ar fi văzut stele fixe cu coadă aceasta, deoarece se întîmplă foarte rar, trebuie să o atribuim unei refracții întîmplătoare a norilor. Radierea și scînteierea stelelor fixe trebuie atribuite refracțiilor atît ale ochilor cît și ale aerului tremurător: căci punînd un telescop înaintea ochilor ele dispar. Din cauza tremurării aerului și a vaporilor ce se ridică se întîmplă ușor ca razele să fie deviate alternativ din spațiul îngust al pupilei, dar niciodată din deschiderea mai largă a sticlei obiectivului. De aici provine că în primul caz se naște scînteierea, în al doilea însă încetează; și încetarea în cazul din urmă demonstrează transmisiunea regulată a luminei prin ceruri fără vreo refracție sensibilă. Să nu spună cineva că cozile nu se văd de obicei în comete, cînd lumina lor nu este destul de intensă, fiindcă atunci razele secundare nu au putere de ajuns ca să impresioneze ochii, și de aceea nu se văd cozile stelelor fixe: căci trebuie să știm că lumina stelelor fixe se poate mări cu ajutorul telescoapelor mai mult de o sută de ori, și totuși cozile nu se văd. Lumina planetelor este mai intensă, dar ele n-au coadă: cometele însă adesea au cozi bogate, pe cînd lumina capetelor este slabă și ștearsă. Căci astfel cometa anului 1680, în luna decembrie, în timp ce capul prin lumina sa abia egala stelele de mărimea a doua, emitea o coadă de o mare strălucire avînd o lungime pînă la 40, 50, 60 sau 70 de grade și chiar și mai mult: după aceea în 27 și 28 ianuarie capul apărea numai ca o stea de mărimea a șaptea, pe cînd coada de o lumină slabă dar destul de sensibilă era lungă de 6 sau 7 grade, și cu o lumină foarte obscură, care abia se putea observa, se întindea pînă la 12 grade sau ceva mai mult: după cum am spus mai sus. Dar și în 9 și 10 februarie, cînd capul nu se putea vedea cu ochii liberi, am observat prin telescop o coadă lungă de două grade. Apoi, dacă coada ar proveni din refracția materiei cerești, și ar devia de la opoziția Soarelui după forma cerurilor, ar trebui ca devierea să aibă loc totdeauna de aceeași parte, în aceleași regiuni ale cerului. Dar cometa anului 1680 din 28 decembrie ora 8½ p.m., ora *Londrei*, se afla în ♊ 8°41′ cu latitudinea nordică de 28°6′, Soarele fiind în ♑ 18°26′. Și cometa anului 1577, în 29 decembrie se afla în ♑ 8°41′ cu latitudinea nordică de 28°40′, Soarele de asemenea fiind aproximativ în ♑ 18°26′. Și în ambele cazuri Pămîntul se afla în același loc și cometa apărea în aceeași parte a cerului; totuși în primul caz coada cometei (după observațiile mele și ale altora) devia cu un unghi de $4\frac{1}{2}$ grade de la opoziția Soarelui spre nord; iar în al doilea (după observațiile lui Tycho) declinația era de 21 grade spre sud. Așadar, respingînd refracția cerurilor, mai rămîne să deducem fenomenele cozilor dintr-o materie oarecare ce reflectă lumina.

Dar faptul că cozile provin din capete și se ridică în regiunile opuse Soarelui se confirmă prin legile pe care ele le observă. Precum și aceea că fiind situate în planele orbitelor cometelor ce trec prin Soare, ele deviază de la opoziția Soarelui totdeauna de aceleași părți, pe care le apasă capetele progresînd pe acele orbite. Că unui spectator plasat în aceste plane îi apar în părți direct opuse Soarelui, deplasîndu-se însă spectatorul din aceste plane, deviația se simte puțin, și apare zilnic mai mare. Că deviația e mai mică, celelalte condiții fiind aceleași, atunci cînd coada e mai oblică față de orbita cometei, precum și cînd capul cometei se apropie mai mult de Soare; mai ales dacă unghiul de deviație se consideră aproape de capul cometei. Că afară de aceasta cozile ce nu deviază apar drepte, iar cele care deviază iau forma unei curbe. Curbura e mai mare cu cît deviația e mai mare, și e mai sensibilă cînd, celelalte condiții fiind egale, coada e mai lungă: căci în cele mai scurte curbura abia se poate observa. Că unghiul de deviație e mai mic lîngă capul cometei, mai mare lîngă extremitatea cealaltă a cozii, și aceasta deoarece coada cu latura sa convexă privește părțile de la care are loc deviația, și care sînt pe linia dreaptă dusă de la Soare prin capul cometei. Și că cozile care sînt mai lungi și mai late, și strălucesc cu o lumină mai puternică, sînt ceva mai strălucitoare și la margine distincte spre laturile convexe decît spre cele concave. Prin urmare fenomenele cozii depind de mișcarea capului, nu însă de regiunea cerului în care se vede capul: și de aceea nu provin din refracția cerurilor, ci se nasc din capul care furnizează materia. Căci după cum în aerul nostru fumul unui corp arzînd se urcă în sus, și aceasta sau perpendicular dacă corpul e în repaus, sau oblic dacă corpul se mișcă în lături: tot astfel în ceruri, unde corpurile gravitează spre Soare, fumurile și vaporii trebuie să se urce dinspre Soare (după cum s-a spus mai sus) și sau să tindă în linie dreaptă în sus, dacă corpul fumegător este în repaus; sau în mod oblic dacă corpul progresînd părăsește necontenit locurile din care se urcau părțile de sus ale vaporilor. Și această oblicitate va fi mai mică cînd ascensiunea vaporilor e mai rapidă: anume în apropierea Soarelui și lîngă corpul fumegător. Dar din cauza variației oblicității coloana de vapori se va curba: și fiindcă vapoarea în latura precedentă a coloanei e ceva mai recentă, astfel că acolo va fi și ceva mai densă, și de aceea va reflecta lumina mai bogat, și se va termina cu o margine mai distinctă. Aici nu adaug nimic despre agitațiile subite și nesigure ale cozilor, și despre figurile lor neregulate, pe care unii le descriu uneori; deoarece ele se nasc fie din schimbările aerului nostru și din mișcările norilor ce întunecă parțial cozile; fie poate din părțile Căii Laptelui, care se pot confunda cu cozile celor care trec pe dinaintea ei, și pot fi privite ca părțile lor.

Iar că vaporii, care sînt de ajuns să umple spații atît de imense, pot proveni din atmosferele cometelor, se explică prin rărimea aerului nostru. Căci aerul în apropierea suprafeței Pămîntului ocupă un spațiu de aproape 850 de ori mai mare decît apa de aceeași greutate, și deci o coloană cilindrică de aer înaltă de 850 picioare are aceeași greutate cu o coloană de apă de un picior și de aceeași lățime. Dar o coloană de aer ajungînd pînă la partea superioară a atmosferei este egală în greutate cu o coloană de apă înaltă de de circa 33 picioare; și de aceea dacă din coloana întreagă de aer se îndepărtează partea de jos de 850 picioare înălțime, partea superioară rămasă va fi egală în greutatea sa cu o coloană de apă înaltă de 32 picioare. De unde

(în baza regulei confirmate de multe experiențe, că compresiunea aerului este precum greutatea atmosferei apăsătoare, și că gravitatea e invers proporțională cu pătratul distanței locurilor de la centrul Pămîntului) făcînd calculul (potrivit corolarului XXII, Cartea a II-a) am aflat că aerul, dacă ne urcăm de la suprafața Pămîntului la înălțimea unui semidiametru pămîntesc, este mai rar decît la noi într-un raport cu mult mai mare, decît a întregului spațiu din interiorul orbitei lui Saturn față de o sferă descrisă cu un diametru de un deget. Și deci o sferă de aer de-al nostru, avînd lățimea de un deget, cu rărimea pe care ar avea-o la înălțimea unui semidiametru terestru, ar umple toate regiunile planetelor pînă la sfera lui Saturn și cu mult dincolo. Prin urmare cum aerul la înălțimi și mai mari se rarefiază enorm de mult și coama sau atmosfera cometei, socotind-o de la centrul ei, este aproape de zece ori mai înaltă decît suprafața nucleului, cum coada se urcă și mai sus, va trebui ca să fie cît se poate de rară. Și cu toate că din cauza atmosferei foarte groase a cometelor, și marea gravitate a corpurilor spre Soare, și gravitatea particulelor de aer și de vapori, una către alta, s-ar putea ca aerul în spațiile cerești și în cozile cometelor să nu se rarefieze atît de mult; totuși din acest calcul e clar că, cantitatea foarte mică de aer și vapori e abundent suficientă pentru a produce toate acele fenomene ale cozilor. Căci și rărimea importantă a cozilor se deduce din astrele care strălucesc prin ele. Atmosfera terestră strălucind în lumina Soarelui, prin grosimea sa de cîteva mile stinge complet și toate astrele și însăși Luna, pe cînd prin grosimea imensă a cozilor, iluminată la fel de lumina solară, astrele cele mai mici pot străluci fără vreo slăbire a clarității. Și de obicei strălucirea mai multor cozi nu e mai mare, decît a aerului nostru de unul sau două degete grosime reflectînd într-o cameră întunecoasă lumina unui fascicul de raze solare.

Putem cunoaște aproximativ în cît timp se ridică vaporii de la capul cometei la coada ei ducînd o dreaptă de la capătul cozii la Soare, și notînd locul unde dreapta taie traiectoria. Căci vaporii la capătul cozii, dacă dreapta e dusă de la soare, au început a urca de la cap, în timp ce capul era în locul de intersecție. Dar vaporii nu se ridică în linie dreaptă de la Soare, ci menținînd mișcarea cometei, pe care o avea înainte de urcarea lor, și compunîndu-se cu mișcarea de ascensiune, se urcă în mod oblic. De unde e mai verosimilă soluția, că dreapta, care taie orbita, e paralelă cu lungimea cozii, sau mai bine (din cauza mișcării curbilinii a cometei) că ea deviază de la linia cozii. În acest fel am aflat că vaporii care erau la capătul cozii la 25 ianuarie au început să se ridice de la capăt înainte de 11 decembrie, și deci pentru urcarea lor întreagă au trebuit mai mult de 45 de zile. Dar întreaga coadă, care a apărut la 10 decembrie s-a urcat în timpul celor două zile, care au trecut de la timpul periheliului cometei. Prin urmare vaporii la început în apropierea Soarelui se ridicau foarte repede, și după aceea au continuat să se urce cu o mișcare totdeauna întîrziată din cauza gravității; și urcîndu-se lungimea cozii se mărea: coada însă, tot timpul cît era vizibilă, consta aproape numai din vaporii care se urcaseră în timpul periheliului; și vaporii, care s-au urcat mai întîi și au compus capătul cozii, nu au dispărut decît cînd din cauza distanței foarte mari atît la Soarele luminos cît și la ochii noștri nu mai erau vizibili. Prin urmare nici cozile celorlalte comete, care sînt scurte, nu se urcă cu o mișcare rapidă și continuă de la capete și imediat după aceea dispar, ci sînt coloane permanente de vapori și exhalații, propagate de la capete cu

o mișcare foarte înceată de mai multe zile, care, participînd la mișcarea pe care o au capetele la început, își continuă mișcarea prin ceruri împreună cu capetele. Și de aici iarăși deducem că spațiile cerești sînt lipsite de rezistență; deoarece în ele nu numai corpurile solide ale planetelor și cometelor, ci și vaporii foarte rari ai cozilor își efectuează în deplină libertate mișcările lor foarte rapide și le păstrează timp foarte îndelungat.

Urcarea cozilor din atmosferele capetelor și dirijarea lor progresivă în sens opus Soarelui Kepler le atribuie acțiunii razelor de lumină ce răpesc cu sine materia cozii. Și e logic să admitem că aerul foarte rar în spațiile foarte libere cedează acțiunii razelor, cu toate că substanțele mai dense din regiunile noastre nu pot fi deplasate în mod sensibil de razele solare. Altul e de părere că pot exista atît particule ușoare cît și grele, și că materia cozilor e ușoară, și din cauza micii greutăți ele se depărtează de Soare. Cum însă gravitatea corpurilor terestre este precum materia în corpuri, și deci conservîndu-se cantitatea de materie ea nu se poate nici mări nici micșora, presupun că acea urcare provine îndeosebi din rarefierea materiei cozilor. Fumul din horn se ridică sub impulsul aerului în care plutește. Aerul rarefiat de căldură se urcă, din cauza micșorării greutății sale specifice și duce cu sine fumul pe care-l conține. Pentru ce nu s-ar urca la fel de la Soare coada cometei? Căci razele solare nu acționează mediile, prin care pătrund, decît prin reflexie și refracție. Particulele reflectante încălzite prin acea acțiune încălzesc materia eterică în care sînt conținute. Această căldură pe care o primește o va rarefia, și din cauza micșorării prin rarefiere a greutății sale specifice, cu care mai înainte tindea spre Soare, va urca și se va duce, cu sine particulele reflectante din care se compune coada. Tot la urcarea vaporilor conduce și faptul, că ei se rotesc în jurul Soarelui și prin acea acțiune tind să se îndepărteze de Soare, pe cînd atmosfera Soarelui și materia cercurilor sau sînt în repaus, sau prin singura mișcare pe care o primesc de la rotația Soarelui, se rotesc mai încet. Acestea sînt cauzele ridicării cozilor în vecinătatea Soarelui, unde orbitele sînt mai curbe, și cometele se află în atmosfera mai densă și deci mai grea a Soarelui, și de aceea emit acum cozi cît se poate de lungi. Căci cozile, care se nasc atunci, păstrîndu-și mișcarea și gravitînd spre Soare, se vor mișca în jurul Soarelui pe elipse ca și capetele, și prin acea mișcare vor însoți totdeauna capetele și vor adera la ele în modul cel mai liber. Căci gravitatea vaporilor spre Soare nu va mai putea face ca după aceea cozile să se despartă de capete spre Soare, după cum nici gravitatea capetelor nu poate face, ca acestea să se îndepărteze de cozi. Prin gravitatea comună sau vor cădea simultan spre Soare, sau vor întîrzia împreună în urcarea lor; și deci gravitatea nu împiedica, ca cozile și capetele să ia foarte ușor o poziție reciprocă oarecare din cauzele descrise sau din altele oarecare, și după aceea să le păstreze liber.

Așadar cozile, care se nasc în periheliile cometelor, se vor duce în regiuni foarte îndepărtate cu capetele lor, și sau de acolo după o serie lungă de ani, se vor reîntoarce la noi cu ele, sau mai degrabă, acolo rarefiate, vor dispare cu încetul. Căci după aceea în coborîrea capetelor spre Soare vor trebui să se propage din capete cozi noi scurte cu o mișcare lentă, și apoi în periheliile acelor comete, care se coboară pînă la atmosfera Soarelui, să crească imens. Căci în acele spații foarte libere, vaporii se răresc și se dilată necontenit. Din care cauză orice coadă la extremitatea superioară este mai lată decît

lîngă capătul cometei. Se pare logic ca prin acea rarefiere vaporii încontinuu dilataţi la urmă se împrăştie şi curg în toate sensurile, apoi din cauza greutăţii lor ei sînt atraşi spre planete, şi se amestecă cu atmosferele acestora. Căci după cum mările sînt absolut necesare pentru constituţia acestui Pămînt, şi anume pentru ca din ele prin căldura Soarelui să se producă vapori de ajuns, care sau adunaţi în nori cad sub formă de ploaie, şi să ude şi să nutrească întreg pămîntul pentru a produce vegetaţiile; sau condensaţi pe vîrfurile reci ale munţilor (după cum filozofează unii cu tot dreptul) să curgă în izvoare şi fluvii: tot astfel pentru conservarea mărilor şi umezelii în planete se pare că sînt necesare cometele, din exhalaţiile şi vaporii condensaţi ai cărora, orice lichid ce se consumă prin vegetaţie şi putrefacţie şi se transformă în pămînt uscat, poate fi încontinuu înlocuit şi refăcut. Căci toate vegetaţiile cresc numai din lichide, apoi în mare parte se prefac prin putrefacţie în pămînt arid, şi încontinuu se depune nămol din fluidele putrede. Astfel masa pămîntului arid creşte zilnic, şi lichidele, dacă nu şi-ar primi de undeva un supliment, ar trebui să descrească incontinuu şi în sfîrşit să dispară. Mai mult, mi se pare că spiritul, care e partea cea mai mică dar cea mai subtilă şi mai bună a aerului nostru, şi e necesară vieţii tuturor lucrurilor, ne vine îndeosebi din comete.

Atmosferele cometelor în căderea lor spre Soare alergînd spre cozi, se micşorează, şi (desigur în partea care priveşte spre Soare) devin mai înguste: şi la rîndul lor la depărtarea lor de Soare, cînd fug mai puţin spre cozi, se măresc; dacă H e v e l i u s a notat bine fenomenele. Apar însă foarte mici, cînd capetele încălzite la Soare se depărtează în cozile foarte mari şi foarte strălucitoare, şi nucleele sînt înconjurate în părţile cele de mai jos ale atmosferelor de un fum mai dens şi mai negru. Căci orice fum produs de o căldură foarte mare de obicei e mai gros şi mai negru. Astfel capul cometei, despre care am vorbit, la distanţe egale de Soare şi Pămînt a apărut mai obscur după periheliu decît înainte. Căci în luna decembrie, de obicei se compara cu stelele de mărimea a treia, în luna noiembrie însă cu stele de mărimea întîi şi a doua. Şi cei care au văzut-o în ambele epoci descriu cometa de la început mai mare. Căci unui tînăr oarecare din *Cambridge*, la 19 noiembrie, această cometă cu lumina sa oricît de plumburie şi ştearsă, i se părea egală cu Spica Fecioarei, şi lucea mai clar decît după aceea. Şi lui M o n t e n a r i la 20 noiembrie st.v. i se părea cometa mai mare decît o stea de prima mărime, avînd o coadă de două grade lungime. Şi S t o r e r în unele scrisori, care mi-au căzut în mîini, a scris că, capul ei, în luna decembrie cînd emitea coada cea mai mare şi strălucitoare, era mic şi în mărimea vizibilă rămînea mult în urma cometei, care apăruse în luna noiembrie înaintea răsăritului Soarelui. A cărei cauză am presupus a fi, că materia capului la început era mai bogată şi cu încetul s-a consumat.

Se pare că din aceeaşi cauză, capetele altor comete, care au emis cozi foarte mari şi strălucitoare, au apărut foarte obscure şi mici. Căci la 5 martie st.n. anul 1669 ora şapte seara, V a l e n t i n E s t a n c e l fiind în Brazilia, a văzut o cometă aproape de orizont spre sud-vest, avînd un capăt foarte mic şi abia observabil, iar coada peste măsură de strălucitoare, astfel că cei care stăteau pe litoral îi vedeau uşor forma reflectată de mare. Avea forma unei bare strălucitoare de o lungime de 23 grade, întinzîndu-se de la vest la sud, şi aproape paralelă cu orizontul. Dar această mare strălucire

a durat numai trei zile, descrescînd apoi în mod remarcabil; și în timp ce strălucirea scădea coada creștea în mărime. De aceea se spune că și în *Portugalia* a ocupat aproape a patra parte a cerului (adică 45 grade) întinzîndu-se de la apus spre răsărit cu o mare strălucire; totuși nu a apărut întreagă, capul fiindu-i în aceste regiuni totdeauna ascuns sub orizont. Din creșterea cozii și din descreșterea strălucirii este evident că, capul s-a depărtat de Soare, și că a fost mai aproape de el la început, la fel cu cometa anului 1680. Și în cronica *Saxoniei* de asemenea se citește, că cometa anului 1106, *a cărei stea era mică și obscură* (*ca aceea a anului 1680*) *dar strălucirea cozii care ieșea din ea foarte clară și se întindea ca o bară foarte mare între est și nord*, după cum scrie și Hevelius după călugărul Simeon din *Durham*. A apărut la începutul lunii *februarie*, și apoi spre seară, spre sud-vest. De aici și din poziția cozii se deduce că capul era în vecinătatea Soarelui. *De la Soare*, scrie Matei Parizianul, *era depărtat de aproape un cot, de la ora a treia* (mai corect a șasea) *pînă la ora a noua emițînd din ea o rază lungă*. Astfel era și cometa aceea foarte arzătoare, descrisă de Aristotel în Cartea I, Meteor 6 *al cărei cap în prima zi nu se vedea, din cauză că apusese înaintea Soarelui sau tocmai sub razele solare, dar în ziua următoare s-a văzut cît s-a putut. Căci a rămas o mică distanță în urma Soarelui, și imediat a apus. Din cauza strălucirii extraordinare* (se înțelege a cozii) *lumina dispersată a capului nu s-a văzut încă, dar în timpul următor* (scrie Aristotel) *cînd* (coada) *strălucea mai puțin, fața* (capului) *cometei a început a se vedea. Și strălucirea sa s-a extins pînă la a treia parte a cerului* (adică, la 60°). *A apărut însă în timpul iernii* (an 4 al olimpiadei 101) *și urcîndu-se pînă la cingătoarea lui Orion acolo a dispărut.* Cometa anului 1618 care a ieșit din razele solare cu o coadă foarte mare, se părea că e egală cu stelele de prima mărime sau le întrece cu ceva, dar au apărut nu puține comete mai mari care au avut cozi mai scurte. Se spune că unele din ele erau egale cu Jupiter, altele cu Venus sau chiar cu Luna.

Am spus că cometele sînt un fel de planete ce se rotesc pe orbite foarte excentrice în jurul Soarelui. Și după cum dintre planetele fără coadă de obicei acelea sînt mai mici, care se învîrtesc pe orbite mai mici și mai apropiate de Soare, tot astfel pare a fi logic să admitem că și cometele, care în periheliile lor se apropie mai mult de Soare sînt în general mai mici, ca nu cumva prin atracția lor să acționeze prea mult Soarele. Las să se determine diametrii transversali ai orbitelor și timpurile periodice ale revoluțiilor, din compararea cometelor ce se întorc pe aceleași orbite după intervale lungi de timp. Între timp propoziția următoare poate da oarecare lumină în această cercetare.

PROPOZIȚIA XLII. PROBLEMA XXII

Să corectăm traiectoria aflată a cometei.

OPERAȚIA 1. Să considerăm poziția planului traiectoriei, aflată prin propoziția de mai sus; și să alegem trei poziții de-ale cometei definite prin observații foarte precise, și depărtate cît se poate de mult una de alta; și fie A timpul dintre întîia și a doua, și B timpul dintre a doua și a treia. E convenabil însă ca într-unul din ele cometa să se afle în perigeu, sau cel puțin

nu departe de perigeu. Din aceste poziţii aparente aflăm, prin operaţii geometrice, trei poziţii adevărate în planul considerat al traiectoriei. Apoi prin acele poziţii aflate, în jurul centrului Soarelui ca focar, prin operaţii aritmetice, efectuate conform propoziţiei XXI, Cartea I, să descriem o secţiune conică: şi fie D şi E ariile ei terminate prin razele duse de la Soare la poziţiile aflate; anume D aria dintre observaţia întîi şi a doua, şi E aria dintre a doua şi a treia. Şi fie T timpul întreg în care trebuie descrisă aria întreagă $D + E$ cu viteza cometei, potrivit propoziţiei XVI, Cartea I.

OPERAŢIA 2. Să mărim longitudinea nodurilor planului traiectoriei, adunînd la acea longitudine o mărime de 20′ sau 30′ pe care să o numim P: şi să păstrăm înclinarea acelui plan faţă de planul eclipticei. Apoi din cele trei poziţii menţionate ale cometei, să aflăm în acest nou plan trei poziţii adevărate, ca mai sus; apoi şi orbita trecînd prin acele poziţii, şi cele două arii descrise între observaţii, care fie d şi e, precum şi timpul întreg t, în car ar trebui descrisă aria întreagă $d + e$.

OPERAŢIA 3. Să menţinem longitudinea nodurilor în prima operaţie şi să mărim înclinarea planului traiectoriei faţă de planul eclipticei, adunînd la acea înclinare o mărime de 20′ sau 30′, pe care să o numim Q. Apoi din observaţia celor trei poziţii aparente menţionate ale cometei să aflăm în acest nou plan cele trei adevărate, şi orbita ce trece prin acele poziţii, precum şi cele două arii ale ei descrise între observaţii, care fie δ şi ε, şi timpul întreg τ, în care ar trebui descrisă aria întreagă $\delta + \varepsilon$.

Fie acum C către 1 precum A către B, şi G către 1 precum D către E, şi g către 1 precum d către e, şi γ către 1 precum δ către ε; şi fie S timpul adevărat între observaţia întîi şi a treia; şi observînd bine semnele $+$ şi $-$ să aflăm numerele m şi n, în aşa fel, ca să avem $2G-2C=mG-mg+$ $+nG-n\gamma$, şi $2T-2S$ egal cu $mT-mt+nT-n\tau$. Şi dacă din prima operaţie, I reprezintă înclinarea planului traiectoriei faţă de planul eclipticei, şi K longitudinea unuia din cele două noduri, $I+nQ$ va fi înclinarea adevărată a planului traiectoriei faţă de planul eclipticei şi $K + mP$ longitudinea adevărată a nodului. Şi în sfîrşit dacă în operaţia întîi, a doua şi a treia, cantităţile R, r şi ρ reprezintă parametrii traiectoriei, şi cantităţile $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ respectiv laturile ei transversale aici: $R + mr - mR+n\rho - nR$ va fi parametrul adevărat, şi $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ latura transversală a traiectoriei pe care o descrie cometa. Dar fiind dată latura transversă e dat şi timpul periodic al planetei. Q.E.I.

De altfel timpurile periodice ale cometelor ce se învîrtesc, şi laturile transverse ale orbitelor, nu se vor determina destul de exact decît prin comparaţia cometelor între ele, care apar în diverse timpuri. Dacă mai multe comete, după intervale egale de timp, se constată că au descris aceeaşi orbită, trebuie să conchidem că toate acestea sînt una şi aceeaşi cometă, ce se roteşte pe aceeaşi orbită. Şi atunci în sfîrşit din timpurile revoluţiilor se vor da laturile transverse ale orbitelor şi din aceste laturi se vor determina orbitele eliptice.

În acest scop, să calculăm deci traiectoriile mai multor comete, în ipoteza că ele sînt parabolice. Căci traiectoriile de acest fel totdeauna sînt aproximativ în concordanţă cu fenomenele. Aceasta este evident, nu numai din traiectoria parabolică a cometei anului 1680, pe care am comparat-o mai sus

cu observațiile, ci și din aceea a cometei importante care a apărut în anii 1664 și 1665, și a fost observată de H e v e l i u s. El a calculat din observațiile sale longitudinile și latitudinile acestei comete, dar mai puțin precis. Din aceleași observații, compatriotul nostru H a l l e y a calculat din nou pozițiile acestei comete, și atunci în sfîrșit, din pozițiile astfel aflate, a determinat traiectoria cometei. A aflat nodul ei ascendent în ♊ 21°13′55″, înclinarea orbitei față de planul eclipticei 21°18′40″, distanța periheliului de la nod exprimată în orbită 49°27′30″. Periheliul în ♌ 8°40′30″ cu latitudinea sudică heliocentrică de 16°1′45″. Cometa în periheliu la noiembrie $24^d\,11^h\,52^m$ p.m. în timpul egal al *Londrei*, sau $13^h\,8^m$ la *Danzig*, st.v., și parametrul parabolei 410 286, distanța mijlocie a Pămîntului la Soare fiind 100 000. Cu cîtă precizie coincid pozițiile cometei calculate pe această orbită cu observațiile, se va vedea din tabloul calculat de H a l l e y (p. 411).

În luna februarie, la începutul anului 1665, prima stea din Berbec, pe care în cele următoare o voi numi γ, era în ♈ 28°30′15″ cu latitudinea nordică de 7°8′58″. A doua din Berbec era în ♈ 29°17′18″ cu latitudinea nordică de 8° 28′16″. Și o altă stea oarecare de mărimea a șaptea, pe care o voi numi *A*, era în ♈ 28° 24′45″ cu latitudinea nordică 8° 28′33″. Cometa în februarie $7^d\,7^h\,30^m$ timpul de la *Paris* (adică februarie $7^d\,8^h\,37^m$ timpul de la Danzig) st. v. forma cu stelele γ și *A* un triunghi dreptunghi în γ. Și distanța cometei de la steaua γ era egală cu distanța stelelor γ și *A*, adică 1° 19′46″ pe un cerc mare, și de aceea ea era de 1° 20′26″ pe paralela latitudinii stelei γ. De aceea dacă din longitudinea stelei γ se scade longitudinea de 1° 20′26″, va rămîne longitudinea cometei ♈ 27° 9′49″. A u z o u t din această observație a sa a situat cometa aproximativ în ♈ 27°0′. Și din figura, prin care H o o k e a schițat mișcarea ei, ea era atunci în ♈ 26° 59′24″. Luînd media, am situat-o în ♈ 27° 4′46″. Din aceeași observație A u z o u t a fixat latitudinea cometei de 7° și 4′ sau 5′ nord. Mai corect ar fi trebuit să o fixeze la 7°3′29″, diferența latitudinii cometei și a stelei γ fiind egală cu diferența longitudinilor stelelor γ și *A*.

În februarie $22^d\,27^h\,30^m$, ora *Londrei*, adică februarie $22^d\,8^h\,46^m$ după *Danzig*, distanța cometei de la steaua *A*, după observația lui H o o k e notată de el însuși pe figură, precum și după observațiile lui A u z o u t introduse în figură de P e t i t, era a cincea parte a distanței dintre steaua *A* și prima din Berbec, sau 15′57″. Și distanța cometei de la linia ce unește steaua *A* și prima din Berbec era a patra parte a părții a cincea de mai sus, adică 4′. Și deci cometa era în ♈ 28°29′46″, cu latitudinea nordică de 8° 12′36″.

În martie $1^d\,7^h\,0^m$ ora *Londrei*, adică martie $1^d\,8^h\,16^m$ ora *Danzigului*, cometa a fost observată aproape de-a doua stea din Berbec, distanța dintre ele find către distanța dintre prima și a doua din Berbec, adică 1° 33′, precum 4 către 45 după H o o k e sau precum 2 către 25 după G o t t i g n i e s. De unde distanța cometei la a doua din Berbec era de 8′16″, după H o o k e, sau 8′5″ după G o t t i g n i e s sau în medie de 8′10″. Dar după G o t t i g n i e s, cometa trecuse pe lîngă a doua din Berbec cu un spațiu de aproape a patra sau a cincea parte a drumului său efectuat într-o zi, adică cu aproape 1′35″ (cu care e de acord A u z o u t) sau ceva mai mică anume cu 1′ după H o o k e. De aceea dacă la longitudinea primei stele a Berbecului se adună 1′, și la latitudinea ei 8′10″, vom avea longitudinea cometei ♈ 29° 18′, și latitudinea nordică de 8° 36′26″.

Timpul aparent la Danzig	Distanțele observate ale cometei		Locurile observate		Locurile calculate pe orbită
decembrie		° ′ ″		° ′ ″	° ′ ″
d h m 3 18 29$\frac{1}{2}$	de la Inima Leului de la Spicul Fecioarei	46 24 20 22 52 10	Long. ♎ Lat. austr.	7 1 0 21 39 0	♎ 7 1 29 21 38 50
4 18 1$\frac{1}{2}$	de la Inima Leului de la Spicul Fecioarei	46 2 45 23 52 40	Long. ♎ Lat. austr.	16 15 0 22 24 0	♎ 6 16 5 22 24 0
7 17 48	de la Inima Leului de la Spicul Fecioarei	44 48 0 27 56 40	Long. ♎ Lat. austr.	3 6 0 25 22 0	♎ 3 7 33 25 21 40
17 14 43	de la Inima Leului de la Umărul drept al lui Orion	53 15 15 45 43 30	Long. ♌ Lat. austr.	2 56 0 49 25 0	♌ 2 56 0 49 25 0
19 9 25	de la Procyon de la Steaua lucitoare din Fălcile Balenei	35 13 50 52 56 0	Long. ♊ Lat. austr.	28 40 30 45 48 0	♊ 28 43 0 45 46 0
20 9 53$\frac{1}{2}$	de la Umărul drept al lui Orion de la steaua lucitoare din Fălcile Balenei	40 49 0 40 4 0	Long. ♊ Lat. austr.	13 3 0 23 41 0	♊ 13 5 0 39 53 0
21 9 9$\frac{1}{2}$	de la Umărul drept al lui Orion de la steaua lucitoare din Fălcile Balenei	26 21 25 29 28 0	Long. ♊ Lat. austr.	2 16 0 33 41 0	♊ 2 18 30 33 39 40
22 9 0	de la Umărul drept al lui Orion de la steaua lucitoare din Fălcile Balaurului	29 47 0 20 29 30	Long. ♉ Lat. austr.	24 24 0 27 45 0	♉ 24 27 0 27 46 0
26 7 58	de la steaua lucitoare a Berbecului de la Aldebaran	23 20 0 26 44 0	Long. ♉ Lat. austr.	9 0 0 12 36 0	♉ 9 2 28 12 34 13
27 6 45	de la steaua lucitoare a Berbecului de la Aldebaran	20 45 0 28 10 0	Long. ♉ Lat. austr.	7 5 40 10 23 0	♉ 7 8 45 10 23 13
28 7 39	de la steaua lucitoare a Berbecului De la Galilicium	18 29 0 29 37 0	Long. ♉ Lat. austr.	5 24 45 8 22 50	♉ 5 27 52 8 23 37
31 6 45	de la Centura Andromedei de la Palilicium	30 48 10 32 53 30	Long. ♉ Lat. austr.	2 7 40 4 13 0	♉ 2 8 20 4 16 25
ianuarie 1665 7 7 37$\frac{1}{2}$	de la Centura Andromedei de la Galilicium	25 11 0 37 12 25	Long. ♈ Lat. bor.	28 24 47 0 54 0	♈ 28 24 0 0 53 0
13 7 0	de la Capul Andromedei de la Palilicium	28 7 10 38 55 20	Long. ♈ Lat. bor.	27 6 54 3 6 50	♈ 27 6 39 3 7 40
24 7 29	de la Centura Andromedei de la Palilicium	20 32 15 40 5 0	Long. ♈ Lat. bor.	26 29 15 5 25 50	♈ 26 28 50 5 26 0
februarie 7 8 37			Long. ♈ lat. bor.	27 4 46 7 3 2	♈ 27 24 55 7 3 15
22 8 46			Long. ♈ lat. bor.	28 29 46 8 12 36	♈ 28 29 58 8 10 25
martie 1 8 16			Long. ♈ Lat. bor.	29 18 15 8 36 26	♈ 29 18 20 8 36 12
7 8 37			Long. ♉ Lat. bor.	0 2 48 8 56 30	♉ 0 2 42 8 56 56

În martie $7^d\,7^h\,30^m$ ora *Parisului* (adică martie $7^d\,8^h\,37^m$ ora *Danzigului*) după observațiile lui Auzout distanța cometei la a doua a Berbecului era egală cu distanța stelei a doua a Berbecului la steaua *A*, adică 52′29″. Și diferența dintre longitudinea cometei și a stelei a doua a Berbecului era de 45′ sau 46′, sau în medie 45′30″. Și deci cometa era în ♉ 0° 2′48″. Din schema observațiilor lui Auzout, construită de Petit, Hevelius a dedus pentru latitudinea cometei 8° 54′. Dar gravorul a curbat drumul cometei spre sfîrșitul mișcării ei în mod neregulat, și Hevelius în schema observațiilor lui Auzout construită de el a corectat curbura neregulată, și astfel a făcut ca latitudinea cometei să fie de 8° 55′ 30″. Și corectînd iregularitatea ceva mai mult, latitudinea poate deveni 8° 56′, sau 8° 57′.

Această cometă s-a mai văzut la 9 martie, și atunci a trebuit situată în ♉ 0° 18′, cu latitudinea boreală de circa $9°\,3\frac{1'}{2}$.

Această cometă s-a văzut timp de trei luni, și a descris aproape 6 semne, și a făcut într-o zi aproape 20 de grade. Cursul ei a deviat foarte mult de la un cerc mare, curbîndu-se spre nord; și mișcarea ei la sfîrșit din retrogradă a devenit directă. Și cu toate că acest curs e atît de neobișnuit, teoria este de acord de la început pînă la sfîrșit cu observațiile nu mai puțin precise, decît cum de obicei sînt de acord teoriile planetelor cu observațiile lor, după cum va arăta tabloul. Trebuie însă să scădem aproximativ două minute, cînd cometa a fost foarte rapidă; ceea ce se va efectua scăzînd 12 secunde din unghiul dintre nodul ascendent și periheliu sau formînd unghiul de 49°27′18″. Paralaxa anuală a ambelor comete (atît a acesteia cît și a celei de mai sus) a fost importantă, și de aici se demonstrează mișcarea anuală a Pămîntului pe orbita mare.

Teoria se confirmă și prin mișcarea cometei, care a apărut în anul 1683. Aceasta a fost retrogradă pe o orbită, al cărei plan făcea un unghi aproape drept cu planul eclipticei. Nodul ascendent al acesteia (după calculul lui Halley) era în ♍ 23° 23′; înclinarea orbitei pe ecliptică 83° 11′; periheliul în ♊ 25° 29′ 30″; distanța periheliului de la Soare 56 020, raza orbitei mari fiind de 100 000, și timpul periheliului în iulie $2^d\,3^h\,50'$. Iar locurile cometei pe această orbită calculată de Halley, și comparate cu locurile observate de Flamsteed, se află în tabloul următor:

1683 Timpul ecuatorial		Locul Soarelui	Longitudinea cometei calculate	Latitudinea N calculată	Longitudinea cometei observate	Latitudinea cometei observate	Diferența Longitudinea	Diferența Latitudinea
	d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
iulie	13 12 55	♌ 1 2 30	♋ 13 5 42	29 28 13	♋ 13 6 42	29 28 20	+1 0	+0 7
	15 11 15	2 53 12	11 37 48	29 34 0	11 39 43	29 34 50	+1 55	+0 50
	17 10 20	4 45 45	10 7 6	29 33 30	10 8 40	29 34 0	+1 34	+0 13
	23 13 40	10 38 21	5 10 27	28 51 42	5 11 30	28 50 28	+1 3	−1 14
	25 14 5	12 35 28	3 27 53	24 24 47	3 27 0	28 23 40	−0 53	−1 7
	31 9 42	18 9 22	♊ 27 55 3	26 22 52	♊ 27 54 24	26 22 25	−0 39	−0 27
	31 14 55	18 21 53	27 41 7	26 16 57	27 41 8	26 14 50	+0 1	−2 7
august	2 14 56	20 17 16	25 29 32	25 16 19	25 28 46	25 17 28	−0 46	+1 9
	4 10 49	22 2 50	23 18 20	24 10 49	23 16 55	24 12 19	−1 25	+1 30
	6 10 9	23 56 45	20 42 23	22 47 5	20 40 32	22 49 5	−1 51	+2 0

1693 Timpul ecuatorial	Locul Soarelui	Longitudinea cometei calculate	Latitudinea N calculată	Longitudinea cometei observate	Latitudinea cometei observate	Diferența	
						Longitudinea	Latitudinea
9 10 26	26 50 52	16 7 57	20 6 37	16 5 55	20 6 10	− 2 2	− 0 27
15 14 1	♍ 2 47 13	3 30 48	11 37 33	3 26 18	11 32 1	− 4 30	− 5 32
16 15 10	3 48 2	0 43 7	9 34 16	0 41 55	9 34 13	− 1 12	− 0 3
18 15 44	5 45 33	♉ 24 52 53	5 11 15	♉ 24 49 5	5 9 11	− 3 48	− 2 4
			Austr.		Austr.		
22 14 44	9 35 49	11 7 14	5 16 53	11 7 12	5 16 50	− 0 2	− 0 3
23 15 52	10 36 48	7 2 18	8 17 9	7 1 17	8 16 41	− 1 1	− 0 28
26 16 2	13 31 10	♈ 24 45 31	16 38 0	♈ 24 44 0	16 38 20	− 1 31	+ 0 20

Teoria se mai confirmă și prin mișcarea cometei retrograde, care a apărut în anul 1682. Nodul ascendent al acesteia (calculat de H a l l e y) era în ♉ 21° 16′30″. Înclinarea orbitei față de planul eclipticei 17° 56′0″. Periheliul în ♒ 2° 52′50″. Distanța periheliului la Soare 58 328, raza orbitei mari fiind 100 000. Și timpul egal al periheliului în septembrie $4^d\,7^h\,39^m$. Iar locurile calculate din observațiile lui F l a m s t e e d, și comparate cu locurile calculate prin teorie, se află în tabloul următor:

1682 Timpul aparent	Locul Soarelui	Longitudinea calculată a cometei	Latitudinea calculată a cometei	Longitudinea cometei observate	Latitudinea N observată	Diferența	
						Longitudinii	Latitudinii
d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
august 19 15 38	♍ 7 0 7	♌ 18 14 28	25 50 7	♌ 18 14 40	25 49 55	− 0 12	+ 0 12
20 15 38	7 55 52	24 46 23	26 14 42	24 46 22	26 12 52	+ 0 1	+ 1 50
21 8 21	8 36 14	29 37 15	26 20 3	29 38 2	26 17 37	− 0 47	+ 2 26
22 8 8	9 33 55	♍ 6 29 53	26 8 42	♍ 6 30 3	26 7 12	− 0 10	+ 1 30
29 8 20	16 22 40	♎ 12 37 54	18 37 47	♎ 12 37 49	18 34 5	+ 0 5	+ 3 42
30 7 45	17 19 41	15 36 1	17 26 43	15 35 18	17 27 17	+ 0 43	− 0 34
sep- 1 7 33	19 16 9	20 30 53	15 13 0	20 27 4	15 9 49	+ 3 49	+ 3 11
tembrie 4 7 22	22 11 28	25 42 0	12 23 48	25 40 58	12 22 0	+ 1 2	+ 1 48
5 7 32	23 10 29	27 0 46	11 33 8	26 59 24	11 33 51	+ 1 22	− 0 43
8 7 16	26 5 58	29 58 44	9 26 46	29 58 45	9 26 43	− 0 1	+ 0 3
9 7 26	27 5 9	♏ 0 44 10	8 49 10	♏ 0 44 4	8 48 25	+ 0 6	+ 0 45

Teoria se confirmă și prin mișcarea retrogradă a cometei, care a apărut în anul 1723. Nodul ascendent al acesteia (după calculele d-lui B r a d l e y, profesor S a v i l i a n de astronomie la *Oxford*) era în ♈ 14° 16′. Înclinarea orbitei față de planul eclipticei 49° 59′. Periheliul în ♉ 12° 15′20″. Distanța periheliului la Soare 998 651, raza orbitei mari fiind 1 000000, și timpul egal al periheliului din septembrie $16^d\,16^h\,10^m$. Iar pozițiile cometei pe această orbită calculată de B r a d l e y, și comparate cu pozițiile observate de el însuși și unchiul său P o u n d, și de H a l l e y se află în tabloul următor.

Din aceste exemple e destul de evident, că mișcările cometelor sînt descrise prin teoria expusă de noi nu mai puțin precis, decît de obicei mișcările

1723 Timp ecuatorial	Longitudinea cometei observate	Latitudinea N observată	Longitudinea cometei calculate	Latitudinea N calculată	Diferența Longitudinii	Diferența Latitudinii
d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
octombrie 9 8 5	♒ 7 22 15	5 2 0	♒ 7 21 26	5 2 47	+ 49	− 47
10 6 21	6 41 12	7 44 13	6 41 42	7 43 18	− 50	+ 55
12 7 22	5 39 58	11 55 0	5 40 19	11 54 55	− 21	+ 5
14 8 57	4 59 49	14 43 50	5 0 37	14 44 1	− 48	− 11
15 6 35	4 47 41	15 40 51	4 47 45	15 40 55	− 4	− 4
21 6 22	4 2 32	19 41 49	4 2 21	19 42 3	+ 11	− 14
22 6 24	3 59 2	20 8 12	3 59 10	20 8 17	− 8	− 5
24 8 2	3 55 29	20 55 18	3 55 11	20 55 9	+ 18	+ 9
29 8 56	3 56 17	22 20 27	3 56 42	22 20 10	− 25	+ 17
30 6 20	3 58 9	22 32 28	3 58 17	22 32 12	− 8	+ 16
noiembrie 5 5 53	4 16 30	23 38 33	4 16 23	23 38 7	+ 7	+ 26
8 7 6	4 29 36	24 4 30	4 29 54	24 4 40	− 18	− 10
14 6 20	5 2 16	24 48 46	5 2 51	24 48 16	− 35	+ 30
20 7 45	5 42 20	25 24 45	5 43 13	25 25 17	− 53	− 32
decembrie 7 6 45	8 4 13	26 54 18	8 3 55	26 53 42	+ 18	+ 36

planetelor prin teoriile lor. Și de aceea orbitele cometelor se pot calcula prin această teorie și în sfîrșit se poate ști timpul periodic al cometei ce se învîrtește pe o orbită oarecare, și atunci în sfîrșit se vor cunoaște laturile transverse ale orbitelor eliptice și înălțimile afeliilor.

Cometa retrogradă, care a apărut în anul 1607, a descris o orbită, al cărei nod ascendent (după calculul lui H a l l e y) era în ♉ 20° 21′; înclinația planului orbitei față de planul eclipticei era de 17° 2′; periheliul era în ♒ 2° 16′; și distanța periheliului la Soare era 58 680, raza orbitei mari fiind 100 000. Și cometa era în periheliu în octombrie $16^d\ 3^h\ 50^m$. Această orbită aproximativ a coincis cu orbita cometei, care a apărut în anul 1682. Dacă cele două comete ar fi una și aceeași, această cometă își va face revoluția în timp de 75 ani, și axa mare a orbitei va fi către axa mare a orbitei mari, precum $\sqrt[3]{75^2}$ către 1, sau aproximativ 1778 către 100. Și distanța afeliului acestei comete la Soare va fi către distanța medie a Pămîntului la Soare, aproximativ precum 35 către 1. Acestea fiind cunoscute nu va fi greu să determinăm orbita eliptică a acestei comete. Dar acestea toate vor fi astfel dacă cometa, după un timp de șaptezeci și cinci de ani, se va întoarce pe aceeași orbită. Se pare că celelalte comete se învîrtesc într-un timp mai îndelungat și se urcă mai sus.

De altfel cometele, din cauza numărului lor mare, și marea distanță a afeliilor la Soare, și lunga întîrziere în afeliu, din cauza gravităților lor reciproce, trebuie să se perturbe întrucîtva, și excentricitățile și timpurile lor de revoluție cînd se măresc întrucîtva, cînd se micșorează. De aceea nu trebuie să ne așteptăm ca aceeași cometă să se întoarcă precis pe aceeași orbită, și în aceleași timpuri periodice. E deajuns dacă nu intervin schimbări mai mari, decît acelea care provin din cauzele amintite.

Și de aici se explică, pentru ce cometele nu se cuprind în zodiac la fel cu planetele, și se îndepărtează de acolo și sînt purtate cu mișcări variate

în toate regiunile cerului. Anume cu scopul, ca în afeliile lor, unde se mişcă foarte încet, să fie cît mai îndepărtate una de alta, şi să se atragă cît mai puţin una spre alta. Din această cauză cometele, care se coboară mai jos, şi deci se mişcă foarte încet în afelii, trebuie să se urce mai sus.

Cometa care a apărut în anul 1680, era mai puţin depărtată de Soare în periheliul său decît cu a şasea parte a diametrului Soarelui; şi din cauza vitezei foarte mari în acea regiune şi a densităţii oarecare a atmosferei Soarelui, a trebuit să sufere oarecare rezistenţă, şi oarecare întîrziere, şi să se apropie mai mult de Soare: şi la fiecare revoluţie apropiindu-se de Soare, va cădea în sfîrşit pe corpul Soarelui. Dar şi în afeliu unde se mişcă foarte încet, uneori poate fi întîrziată prin atracţia altor comete, şi apoi să cadă în Soare. Dar şi stelele fixe, care cu încetul dispar în lumină şi vapori, se pot reface prin cometele ce cad în ele, şi aprinse prin noua alimentaţie pot fi considerate ca stele noi. De acest gen sînt stelele fixe, care apar subit, şi la început strălucesc foarte intens, apoi cu încetul dispar. Astfel a fost steaua din Scaunul *Cassiopeei* pe care a văzut-o Corneliu Gemma la opt noiembrie 1572 luminînd acea parte a cerului pe o noapte perfect senină; dar în noaptea următoare (noiembrie 9) a văzut-o mai strălucitoare decît toate stelele fixe, şi abia rămînînd în urmă lui Venus cu lumina sa. Pe aceasta a văzut-o Tycho Brahe la unsprezece a aceleiaşi luni, cînd strălucea mai tare; şi din acel timp a observat-o descrescînd cu încetul şi dispărînd în timp de 16 luni. În luna lui noiembrie, cînd a apărut mai întîi, egala cu lumina sa pe Venus. În luna decembrie se vedea puţin micşorată egalînd pe Jupiter. În anul 1573, luna ianuarie era mai mică decît Jupiter şi mai mare decît Sirius, cu care la sfîrşitul lui februarie şi începutul lui martie a devenit egală. În luna aprilie şi mai se vedea egală cu stelele de mărimea a doua, în iunie, iulie şi august cu stelele de mărimea a treia, în septembrie, octombrie şi noiembrie cu stelele de-a patra, în decembrie şi în anul 1574, în luna ianuarie cu stelele de-a cincea, şi în luna februarie, cu stelele de mărimea a şasea, şi în luna martie a dispărut din ochi. Culoarea ei la început era clară alburie şi strălucitoare, apoi gălbuie, şi în luna martie a anului 1573, roşiatică la fel cu Marte sau steaua Aldebaran; în mai însă a luat o culoare alburie-albăstruie, pe care o observăm în Saturn, culoare pe care a păstrat-o pînă la sfîrşit, devenind totuşi tot mai obscură. Astfel a fost şi steaua din Piciorul drept al Şarpelui, pe care discipolii lui Kepler au observat-o că a început a se vedea în 30 septembrie st.v. a anului 1604, şi prin lumina sa întrecea steaua Jupiter, deşi în noaptea precedentă abia se observase. Dar din acel timp cu încetul a descrescut şi în timp de 15 sau 16 luni a dispărut din ochi. Se spune că de o astfel de stea nouă neobişnuit de strălucitoare a fost îndemnat Hipparchus să observe stelele şi să le treacă într-un catalog. Dar stelele fixe, care apar şi dispar alternativ, şi care cresc cu încetul, şi prin lumina lor abia întrec vreodată stelele fixe de-a treia mărime, par a fi de alt gen, şi învîrtindu-se se arată alternativ partea luminoasă şi pe cea întunecată. Vaporii însă, care provin din Soare şi din stelele fixe şi din cozile cometelor, pot cădea din cauza gravităţii lor în atmosferele planetelor, şi acolo să se condenseze şi să se transforme în apă şi în esenţe umede, şi apoi prin căldură lentă să se prefacă cu încetul în săruri şi sulfuri, şi tincturi, şi nămol, şi lut, şi argilă, şi nisip, şi pietre, şi corale, şi alte substanţe terestre.

SCOLIE GENERALĂ

Ipoteza vîrtejurilor întîmpină multe dificultăţi. Pentru ca fiecare planetă cu o rază dusă la Soare să descrie arii proporţionale cu timpul, timpurile periodice ale părţilor vîrtejului ar trebui să fie precum pătratele distanţelor la Soare. Pentru ca timpurile periodice ale planetelor să fie în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a distanţelor la Soare, timpurile periodice ale părţilor vîrtejului ar trebui să fie în proporţia puterii $\frac{3}{2}$ a distanţelor. Pentru ca vîrtejurile mai mici din jurul lui Saturn, Jupiter şi alte planete să-şi păstreze rotaţiile şi să înoate liniştit în vîrtejul Soarelui, timpurile periodice ale părţilor vîrtejului solar ar trebui să fie egale. Revoluţiile Soarelui şi ale planetelor în jurul axelor lor, care ar trebui să fie în concordanţă cu mişcările vîrtejurilor se abat de la toate aceste proporţii. Mişcările cometelor sînt foarte regulate, şi observă aceleaşi legi cu mişcările planetelor, şi nu pot fi explicate prin vîrtejuri. Cometele sînt purtate prin mişcări foarte excentrice în toate părţile cerurilor ceea ce nu poate avea loc decît dacă eliminăm toate vîrtejurile.

Proiectilele, în aerul nostru, suferă numai rezistenţa aerului. Îndepărtînd aerul, după cum se întîmplă în vidul lui B o y l e, rezistenţa încetează, astfel că un fulg uşor şi aurul solid cad cu aceeaşi viteză în acest vid. Şi acelaşi este cazul spaţiilor cereşti, care sînt deasupra atmosferei terestre. În aceste spaţii, toate corpurile trebuie să se mişte foarte liber; şi de aceea planetele şi cometele se învîrtesc necontenit pe orbite de gen şi poziţie date după legile expuse mai sus. Ce e drept, vor persevera pe orbitele lor prin legile gravităţii, dar poziţia primitivă regulată a orbitelor nu ar fi putut-o cîştiga prin aceste legi.

Cele şase planete principale se învîrtesc în jurul Soarelui pe cercuri concentrice cu Soarele, în aceeaşi direcţie a mişcării, aproximativ în acelaşi plan. Zece Luni se învîrtesc în jurul Pămîntului, al lui Jupiter şi al lui Saturn în cercuri concentrice, în aceeaşi direcţie a mişcării, aproximativ în planele orbitelor planetare. Şi toate aceste mişcări regulate nu-şi au origina în cauze mecanice; deoarece cometele sînt duse liber pe orbite foarte excentrice, şi în toate părţile cerurilor. Prin acest fel de mişcare cometele trec foarte repede şi foarte uşor prin orbitele planetelor şi în afeliile lor unde sînt mai încete şi întîrzie timp îndelungat; sînt cît se poate de îndepărtate una de alta, pentru a se atrage reciproc cît mai puţin. Acest sistem foarte elegant

al Soarelui, planetelor și cometelor nu a putut să se nască decît din mintea și puterea unei ființe inteligente și puternice. Și dacă stelele fixe sînt construite de o minte asemănătoare vor fi supuse stăpînirii *Unuia*: îndeosebi fiindcă lumina stelelor fixe este de aceeași natură cu lumina Soarelui, și toate sistemele își trimit lumină reciproc. Și ca nu cumva sistemele stelelor fixe să cadă din cauza greutății lor unele în altele, el le-a așezat pe acestea la o distanță imensă unele de altele.

Acestea toate le guvernează nu ca sufletul lumii, ci ca Domnul universului. Și din cauza stăpînirii sale de obicei se numește Domnul Dumnezeu a) Παντοκράτωρ.

a) Adică împărat universal.

Căci Dumnezeu este un cuvînt relativ și se referă la servitori: și Dumnezeirea este stăpînirea lui Dumnezeu, nu asupra corpului propriu, după cum înțeleg aceia pentru care Dumnezeu este sufletul lumii, ci asupra servitorilor. Dumnezeul suprem este o ființă eternă, infinită, absolut perfectă: dar o ființă oricît de perfectă fără stăpînire nu e Dumnezeu. Căci zicem Dumnezeul meu, Dumnezeul vostru, Dumnezeul lui Israel, Zeul Zeilor, și Domnul Domnilor; dar nu zicem eternul meu, eternul vostru, eternul lui Israel, eternul Zeilor: nu zicem infinitul meu sau perfectul meu. Aceste apostrofări nu se referă la servitori.

Cuvîntul Dumnezeu uneori b) înseamnează domn: dar nu orice domn este dumnezeu. Dominația unei ființe spirituale constituie un Dumnezeu, una adevărată, unul adevărat, una supremă, unul suprem, una fictivă, unul fictiv. Și din stăpînirea adevărată urmează că un Dumnezeu adevărat este viu, inteligent și puternic; și din celelalte perfecțiuni este supremul sau cel mai perfect. Este etern și infinit, atotputernic și atotștiutor, adică durează, din etern în etern, este prezent din infinit în infinit, toate le guvernează; și toate le cunoaște, care sînt sau pot fi. Nu este eternitate și infinitate, ci etern și infinit: că nu este durată și spațiu, ci durează și e de față. Durează totdeauna și e de față pretutindenea, și existînd totdeauna și peste tot locul constituie durata și spațiul. Cum fiecare particulă a spațiului este *totdeauna*, și fiecare moment indivizibil al duratei *pretutindenea*, desigur că creatorul și domnul tuturor lucrurilor nu va fi *niciodată nicăieri*. Orice suflet ce simte în diverse timpuri, și în diverse organe ale simțurilor și mișcărilor, este aceeași persoană indivizibilă. Există părți succesive în durată, coexistente în spațiu, dar nici de un fel în persoana omului sau în principiul lui cugetător: și cu atît mai puțin în substanța cugetătoare a lui Dumnezeu. Orice om, întrucît este un lucru ce simte, e unul și același om în timpul vieții sale în toate și în fiecare organ al simțurilor. Dumnezeu este unul și același Dumnezeu totdeauna și pretutindenea. Este omniprezent nu numai *virtual*, ci și substanțial: căci virtutea nu poate exista fără substanță. În ea c) sînt cuprinse și se mișcă toate, dar fără afecțiune reciprocă. Dumnezeu nu suferă nimic prin mișcările corpurilor; ele nu suferă nici o rezistență din omniprezența lui Dumnezeu. E clar că supremul Dumnezeu există

b) Compatriotul nostru Pocock derivă cuvîntul Deus din cuvîntul arab *du* (și în cazul genetiv *di*) care înseamnă domn. Și în acest sens principii se numesc zei (*Psalm* LXXXIV, 6 și Ioan X, 45). Și *Moise* se numește zeul fratelui său *Aaron*, și zeul regelui *Pharaoh*. (*Exod* IV, 16 și VII, 1). Și în același sens sufletele principilor morți odinioară se numeau de către popoare zei, dar în mod fals din cauza lipsei de stăpînire.

c) Așa credeau cei vechi, ca *Pitagora* și *Cicero*: De natura deorum, Cartea I. *Thales*, *Anaxagoras*, *Vergilius*, *Georgice*, Cartea IV, v. 220

și Eneida, Cartea VI, v. 721, *Philo*, Allegor: Cartea I la început. *Aratus* în Phaenom la început. Astfel și scriitorii bisericești ca *Paul* în Act. XVII, 27, 28, *Ioan* în Evang. XIV, 2, *Moise* în Deut. IV 39 și X, 14, *David* Psal. CXXXIX, 7, 8, 9, *Solomon* I, Reg. VIII, 27. Iov. XXII, 12, 13, 14, *Eremie* XXIII, 23, 24. Idolatrii credeau însă că Soarele, Luna și stelele, sufletelor oamenilor și alte părți ale lumii sînt părți ale supremului Dumnezeu și deci trebuie venerate dar în mod greșit.

în mod necesar: Și din aceeași necesitate este *totdeauna* și *pretutindenea*. De unde de asemenea totul este asemenea lui, întreg ochiul, întreaga ureche, întreg creierul, întreg brațul, toată puterea de simțire, înțelegere și acțiune, dar într-un fel mai puțin omenesc, într-un fel mai puțin trupesc, într-un fel cu totul necunoscut nouă. După cum un orb nu are ideea culorilor, astfel noi nu avem idee de felurile, în care preînțeleptul Dumnezeu simte și înțelege toate. E cu totul lipsit de orice corp și figură trupească, și deci nu poate fi văzut, nici auzit, nici atins, și nici nu trebuie să-l adorăm sub nici o formă trupească. Avem idei despre atributele sale, dar nu cunoaștem de loc care e substanța unui lucru oarecare. Vedem numai figurile și culorile corpurilor, auzim numai sunetele, atingem numai suprafețele externe, mirosim numai mirosurile, și gustăm gusturile; substanțele intime nu le cunoaștem prin nici un simț, prin nici o acțiune reflexă; și cu mult mai puțin avem idee despre substanța lui Dumnezeu. Pe el îl cunoaștem numai prin proprietățile și atributele lui, și prin structurile foarte înțelepte și foarte bune ale lucrurilor și prin cauzele finale, și le admirăm din cauza perfecțiunilor; îl venerăm însă și ne închinăm lui din cauza stăpînirii. Căci îl adorăm ca servitori; și Dumnezeu fără stăpînire, providență și cauză finală nu este altceva decît fatalitate și natură. Din oarba necesitate metafizică, care totdeauna și pretutindenea e aceeași, nu se naște nici o variație a lucrurilor. Toată diversitatea tuturor lucrurilor zidite în locuri și timpuri, s-a putut produce numai din ideile și prin voința unei ființe ce există în mod necesar. Dar se spune în mod alegoric că Dumnezeu vede, aude, vorbește, rîde, iubește, dorește, dă, primește, se bucură, se supără, se luptă, fabrică, zidește, construiește. Căci tot ce se spune despre Dumnezeu se ia de la lucrurile omenești printr-o asemănare oarecare, ce e drept nu perfectă; dar totuși cu oarecare asemănare. Și acestea despre Dumnezeu, despre care a vorbi din fenomene, aparține filozofiei naturale.

Pînă acum am expus fenomenele cerurilor și ale mării noastre prin forța gravității, dar încă nu am dat cauza gravității. Această forță se naște dintr-o cauză oarecare, ce pătrunde pînă în centrul Soarelui și al planetelor, fără micșorarea puterii; și care acționează nu după mărimea *suprafețelor* particulelor asupra cărora acționează (după cum obișnuiesc cauzele mecanice), ci după cantitatea materiei *solide*: și a cărei acțiune se extinde în toate părțile la distanțe imense, descrescînd totdeauna în raportul pătratului distanțelor. Gravitatea spre Soare se compune din gravitățile spre diversele particule ale Soarelui, și cu depărtarea de la Soare descrește precis în raportul pătratului distanțelor pînă la orbita lui Saturn, după cum e evident din repausul afeliilor planetelor, și pînă la ultimele afelii ale cometelor, dacă acele afelii sînt în repaus. Dar pînă acum nu am putut încă afla cauza acestor proprietăți ale gravității și nu imaginez ipoteze. Căci orice nu se deduce din fenomene, trebuie numit *ipoteză*; și ipotezele fie metafizice, sau fizice, sau ale calităților oculte, sau mecanice, în *filozofia experimentală*, nu au loc. În această filozofie propozițiile se deduc din fenomene, și devin generale prin inducție. Astfel s-au cunoscut impenetrabilitatea, mobilitatea și impulsurile

corpurilor și legile mișcărilor și ale gravității. Și e de ajuns ca gravitatea să existe în realitate, și să acționeze după legile expuse de noi, și e suficient pentru toate mișcările corpurilor cerești și ale mării noastre.

Ar fi locul să adaug cîte ceva despre spiritul subtil ce pătrunde prin corpurile grosolane, și se ascunde în ele; prin forța și acțiunile căreia particulele corpurilor se atrag reciproc la distanțe minime, și dacă se ating devin coerente; și corpurile electrice acționează la distanțe mai mari, atît respingînd cît și atrăgînd corpurile vecine; și lumina este emisă, se reflectă, se refractă, se difractă, și încălzește corpurile; și orice senzație se excită, și membrele animalelor se mișcă după voie, anume prin vibrațiile acestui spirit propagate prin firișoarele solide ale nervilor de la organele externe ale simțurilor la creier și de la creier în mușchi. Dar acestea nu se pot expune în puține cuvinte; și nici nu avem material experimental suficient, prin care trebuie determinate precis și arătate legile acțiunilor acestui spirit.

ISAAC NEWTON

Secolul al XVII-lea, care l-a dat pe Newton, reprezintă o epocă de înflorire a științelor cum nu a cunoscut înainte decît elenismul antic, iar după aceea veacul nostru. Transformările sociale și economice, descoperirile geografice, războiul etc. au pretins de la știință o cunoaștere mai adîncă a proprietăților corpurilor și a fenomenelor naturii. Dintre diversele ramuri de cunoștințe, acelea care erau în legătură mai strînsă cu necesitățile imediate ale industriei, agriculturii, perfecționării navigației, armelor de foc etc. — cum sînt mecanica, optica, matematica și astronomia — s-au dezvoltat în măsură cu mult mai mare decît electricitatea. magnetismul, științele naturale, a căror utilitate pe atunci nu era înțeleasă și care abia se nășteau. Este ușor de înțeles în acest fel că rezultatele cele mai uimitoare le-a obținut Newton tocmai în matematică, optică, mecanică și astronomie.

Matematica veacului al XVII-lea se poate mîndri cu invenția logaritmilor de către Neper și Briggs și cu geometria analitică a lui Descartes. Cea mai importantă realizare este însă calculul infinitezimal la care au contribuit în măsură egală Newton și Leibniz.

Optica acestui secol a cunoscut invenția lunetei și microscopului, a descoperit interferența, difracția și polarizarea luminii, viteza ei de propagare și legile refracției. Dar și aici Newton are o contribuție de primul rang: explicarea dispersiei luminii și stabilirea unei teorii a luminii, care avea să mențină supremația timp de mai bine de un secol față de teoria ondulatorie elaborată în același timp de către Huygens.

Mecanica lui Galileu și Descartes ne-au dat primele două legi fundamentale ale dinamicii, dar cel care a stabilit legea a treia și enunțînd precis cele trei legi a pus bazele dinamicei moderne a fost tot Newton.

În astronomie, lupta lui Galileu pentru triumful concepției lui Copernic a distrus vechea imagine a lui Ptolemeu despre lume, dar nici minunatele sale descoperiri astronomice, nici teoria vîrtejurilor lui Descartes, nici legile lui Kepler nu ne-au putut explica funcționarea mașinii universului. Prin descoperirea atracției universale, Newton a dat nu numai o lege simplă care să explice mișcarea corpurilor cerești, ci și o concepție mecanică a universului, care a stăpînit gîndirea oamenilor de știință pînă la începutul veacului al XX-lea.



Isaac Newton s-a născut la 5 ianuarie st. n. 1643 în localitatea Woolsthorpe, situată la cîțiva kilometri spre sud de orășelul Grantham (Lincolnshire, Anglia). Tatăl său, numit de asemenea Isaac, era un om « slab, extravagant și aprins », și mama sa Ana Ayscough o femeie harnică și econoamă, aveau acolo o mică moșioară. Tatăl a murit la etatea de 30 de ani, înainte de nașterea fiului său. În curînd mama lui Newton se mărită cu un preot din satul vecin, lăsînd pe micul Isaac în grija bunicii sale, care-l crescu pînă la etatea de 15 ani.

N e w t o n era un copil de constituţie slabă şi timid din fire. În loc să se joace cu copiii de etatea sa, el îşi fabrică singur jucăriile, în care începu să se manifeste geniul său inventiv. O moară mînată de un şoarece, un zmeu cu lanternă pentru a speria seara pe ţărani, un cadran solar, un orologiu de lemn etc. indicau deja pe viitorul experimentator.

Asupra firii sensibile a lui N e w t o n au lăsat urme adînci evenimentele politice desfăşurate în Anglia în perioada copilăriei sale. Anglia trecea în acea epocă prin mari frămîntări interne. În anul naşterii lui N e w t o n războiul civil era în plină desfăşurare. Lupta dintre parlamentul care reprezenta interesele burgheziei în expansiune, şi regele sprijinit de cler şi nobilimea înaltă duse la decapitarea lui Carol I în 1649, cînd N e w t o n abia împlinise 6 ani. Energia lui C r o m w e l l readuse ordinea în interior şi restabili prestigiul extern al Angliei, dar el muri în 1658. Fiul său nu fu în stare să continue opera marelui bărbat de stat, astfel că în 1660 avu loc restauraţia, urcîndu-se pe tron Carol al II-lea.

La etatea de 12 ani N e w t o n fu trimis la şcoala din Grantham, unde intră în gazdă la apotecarul Clark. Programul şcolii din Grantham nu era atît de încărcat încît să nu rămînă elevilor timp şi pentru distracţii. N e w t o n îşi petrecea timpul liber în farmacia gazdei sale unde căpătă gust pentru chimie, pe care o cultivă toată viaţa cu mult entuziasm. Cărţile vechi ce se găseau în biblioteca farmacistului îi serviră la lărgirea orizontului ştiinţific.

În 1656 muri soţul al doilea al mamei lui N e w t o n, Barnabath Smith, astfel că ea se întoarse la moşia dela Woolsthorpe. Simţind în curînd lipsa unui bărbat care să conducă gospodăria, reţinu de la şcoală pe I s a a c. Nu peste mult însă constată că acesta nu avea nici o atracţie pentru cultivarea pămîntului. În loc să vadă de treburile gospodăriei, copilul se ocupa de probleme mecanice. Astfel în septembrie 1658, pe timpul unei furtuni groaznice, pe I s a a c nu-l interesau pagubele pe care aceasta le pricinuia edificiilor, ci se puse să măsoare forţa vîntului. La insistenţele unchiului său după mamă W. Ayscough, fu decis ca N e w t o n să fie trimis înapoi la şcoală la Grantham, unde rămase pînă în 1661. În această epocă se pare că N e w t o n simţi o afecţiune deosebită pentru Miss Storey, fiica apotecarului Clark. Idila s-a întrerupt prin plecarea lui N e w t o n din Grantham, dar relaţiile dintre ei au rămas cordiale toată viaţa.

Terminînd studiile la Grantham cu rezultate splendide, N e w t o n fu admis în iunie 1661 la Trinity College din Cambridge. Acest colegiu avea să-l adăpostească pe N e w t o n, ca elev şi apoi ca profesor, timp de 35 de ani, şi aici avea el să facă cele mai mari descoperiri şi să publice lucrările care l-au făcut nemuritor şi au ridicat prestigiul Universităţii din Cambridge.

În acel timp, ca şi azi, învăţămîntul superior din Anglia se rezema pe colegii, în care profesorii şi studenţii duceau o viaţă comună, locuind şi studiind în interiorul instituţiei, aproape izolaţi de lumea dinafară. Studenţii trebuiau să plătească o anumită taxă de întreţinere şi de studii; N e w t o n însă nu dispunea de suma necesară, de aceea a fost primit cu condiţia să facă anumite servicii.

În momentul intrării sale în colegiu, N e w t o n cunoştea foarte puţin matematicile; nu citise decît *Logica* lui S a n d e r s ce se preda ca un fel de introducere în matematici. Cît de străin era atunci de matematici rezultă din propria lui mărturisire că vizitînd ca student în anul întîi tîrgul din octombrie şi găsind o carte de astrologie, constată că nu o înţelege din cauza lipsei de cunoştinţe de geometrie şi trigonometrie. Cumpără deci *Elementele* lui E u c l i d, care însă i se părură atît de uşoare încît le dădu puţină atenţie.

Învăţămîntul matematicilor la Trinity College în primii doi ani de studenţie a lui N e w t o n era la un nivel foarte puţin ridicat; în aceşti ani nu se predau decît matematicile elementare. De aceea împins de dorinţa de a se instrui el nu se mărgini la cursuri, ci citea tot ce-i cădea în mînă, la început fără alegere, pe încetul însă se dedică cu totul matematicii. Consultă cu predilecţie pe marii matematicieni greci şi contemporani. Se spune că mai tîrziu cînd a ajuns la renume, s-ar fi exprimat astfel: « Dacă am putut vedea ceva mai departe decît alţii, aceasta

se datorește faptului că m-am ridicat pe umeri de giganți ». Se pare că cea dintîi carte cu conținut matematic pe care a citit-o la Cambridge a fost *Optica* lui K e p l e r. Urmă apoi *Clavis mathematica* a lui O u g h t r e d și mai ales *Geometria* lui D e s c a r t e s, înțelegerea căreia îi cauză unele dificultăți. Îl interesară apoi operele lui V i é t e, ale lui V a n S c h o o t e n și în special *Arithmetica infinitorum* a lui W a l l i s, profesor la Oxford. În felul acesta cunoștințele sale de matematici sporiră considerabil, fără însă a avea o direcție bine precizată. Cel care avea să-i îndrumeze pașii în cercetările matematice era I s a a c B a r r o w.

I s a a c B a r r o w (1630—1677) a fost nu numai un mare matematician,ci și un excelent profesor. În 1663 B a r r o w fu numit profesor la catedra de matematici a Universității din Cambridge, unde avu norocul să-l aibă ca elev pe N e w t o n. Această întîlnire a fost fericită pentru dezvoltarea matematicilor și decisivă pentru geniul matematic al lui N e w t o n.



Teoria binomului și calculul infinitezimal. B a r r o w avea obiceiul ca la cursul de geometrie și de optică să expună și cercetările sale originale. Acestea au apărut în 1669 sub titlul *Lectiones Opticae et Geometricae* și înainte de tipărire au fost revăzute de N e w t o n. În aceste lecții B a r r o w sugestionează o metodă nouă de a determina ariile și a trasa tangenta la o curbă, probleme care sînt strîns legate de calculul infinitezimal. În partea de optică B a r r o w se ocupă de formarea imaginilor în oglinzi și lentile și explică în mod simplu dispersia luminii în curcubeu. Influența considerabilă a acestor lecții asupra lui N e w t o n se relevă prin aceea că atît în calculul infinitezimal cît și în optică el a ajuns la rezultate de importanță fundamentală.

În ianuarie 1665 N e w t o n obținu titlul de bacalaureat în arte, fără ca geniul său creator să se fi manifestat sub o formă oarecare în exterior. Aceasta se explică atît prin firea închisă a lui N e w t o n, care nu exterioriza ceea ce se întîmpla în interior, cît și prin obiceiul foarte răspîndit pe atunci printre savanți de a nu-și publica descoperirile pînă nu rezolvă problemele ce pot fi deslegate prin noua descoperire.

Primele descoperiri matematice ale lui N e w t o n se referă la seriile de puteri, care în acea epocă prezentau un mijloc important de a extinde noțiunea de funcție. Înainte de aceea, pe timpul lui D e s c a r t e s, se cunoșteau numai funcțiile algebrice, în care y se calcula în funcție de variabila x prin operații algebrice. Seriile de puteri dădeau posibilitatea de a defini noi funcții; ele nu erau altceva decît o generalizare a noțiunii de polinom.

Aprofundînd teoria seriilor N e w t o n a generalizat formula binomului $(1+x)^r$. cunoscută pentru r întreg și pozitiv, pentru orice exponent r rațional, pozitiv sau negativ. Plecînd de la seria binomului el află prin integrare dezvoltarea în serie a lui arc sin x, apoi aplicînd metoda aproximațiilor succesive îi reușește să inverteasca o serie. Prin această metodă din seria logaritmică află seria exponențială, iar din seria lui arc sin x ajunge la seria lui sin x și cos x. N e w t o n se mulțumi însă cu enunțarea teoremei binomului și cu rezultatele obținute în cazurile particulare menționate, demonstrația ei generală și riguroasă putînd fi dată abia în veacul al XIX-lea de către A b e l.

N e w t o n nu a publicat această descoperire matematică decît în 1711 în *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, dar a menționat-o încă în 1676 în două scrisori adresate lui L e i b n i z. Aceeași tăcere o păstră și în ce privește cea mai mare descoperire matematică a veacului al XVII-lea, calculul infinitezimal.

Ideea calculului infinitezimal N e w t o n o avea deja în ultimul an de studenție la Cambridge. În vara anului 1665 însă izbucni ciuma și părăsi orașul retrăgîndu-se la Woolsthorpe. Cea mai mare parte a anilor 1666—1667 o petrecu în liniștea de la țară. Aici deveniră mature în mintea lui cele trei mari descoperiri ale sale: calculul infinitezimal, gravitația universală și compunerea luminii. Deși în *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* din 1687 se găsesc cîteva teme referitoare la chestiuni infinitezimale, metoda infinitezimală a lui N e w t o n a

fost publicată abia în *Tractatus de quadratura curvarum* din 1704 și în opera postumă *Methodus Fluxionum et Seriarum infinitarum* din 1736.

Ideea calculului infinitezimal o găsim în antichitate în mod implicit, la Archimede care a folosit un raționament infinitezimal la aflarea cvadraturii unui segment de parabolă. Construcția calculului infinitezimal a durat aproape întreg secolul al XVII-lea. Printre matematicienii de seamă care s-au ocupat cu probleme de integrare și diferențiere amintim aici pe Galileu, Cavalieri, Descartes, Torricelli, Roberval, Wallis etc. Cei care au adus contribuția cea mai de seamă la fundamentarea calculului infinitezimal înaintea lui Newton și Leibniz au fost Fermat, Torricelli și Barrow.

Fermat a introdus noțiunea de derivată prin 1637 și în același timp avea și noțiunea de integrală pe care a folosit-o la aflarea cvadraturii unui segment de dreaptă de ordin superior $y=x^n$. Cu toate că el știa să ducă tangenta la aceeași curbă, nu a putut descoperi caracterul invers al celor două operații: de integrare și derivare.

Din fragmentele rămase de la Torricelli rezultă că acesta cunoștea cvadrarea curbelor parabolice și hiperbolice și știa să ducă tangente la acestea, iar în cazuri particulare recunoscu caracterul invers al acestor operații. Dar nici Torricelli, nici mai tîrziu Barrow nu au fost în stare să exploateze complet aceste fapte fiindcă ei operau în mod geometric, iar nu analitic. Cel dintîi care a văzut problema inversiunii celor două calcule, integral și diferențial, a fost Newton.

Newton numește noul calcul metoda directă și inversă a fluxiunilor, operații pe care azi le numim derivare și integrare. El caracterizează în felul următor modul său de a concepe metoda fluxiunilor: « Liniile se descriu și deci se nasc nu prin alăturarea părților, ci prin mișcarea continuă a punctelor; suprafețele prin mișcarea liniilor, solidele prin mișcarea suprafețelor ; unghiurile prin rotația laturilor; porțiunile de timp prin fluxul continuu; și tot astfel celelalte cantități... Prin urmare, considerînd că aceste cantități care cresc în timpuri egale și se nasc prin creștere în timpuri egale, devin mai mari sau mai mici după cum e mai mare sau mai mică viteza cu care cresc sau se generează, caut o metodă de a determina cantitățile din vitezele mișcărilor sau creșterilor prin care se nasc și numind aceste viteze ale mișcărilor sau creșterilor *fluxiuni*, iar cantitățile generate *fluente*, am ajuns în mod treptat la problema fluxiunilor în anii 1665 și 1666».

Newton notează cantitatea fluentă cu x, iar fluxiunea corespunzătoare cu $\dot{x}$. Aceasta la rîndul ei are și ea o fluxiune pe care o însemnă cu $\ddot{x}$, ... Numește momentul unei fluente x cantitatea infinit de mică cu care aceasta crește într-un interval infinit de mic și o exprimă prin ox; aceasta în notația modernă se notează cu dx.

Cu ajutorul celor de mai sus, Newton consideră două feluri de probleme. Întîia constă în a găsi fluxiunea unei cantități fluente date, sau în general « fiind dată relația dintre fluente să se afle relația fluxiunilor lor », problemă echivalentă cu derivarea. Pentru a rezolva această problemă el consideră două variabile legate printr-o ecuație algebrică $f(x,y)=0$. Înlocuind pe x,y cu binomii $x+x0, y+y0$, determină raportul fluxiunilor necunoscute dezvoltînd în serie pe $f(x+\dot{x}0, y+\dot{y}0)=0$ și ținînd seama că punctul x,y aparține curbei $f(x,y)=0$, deci partea independentă de o dispare. Împărțind termenii ce rămîn cu o și anulînd pe o obține raportul fluxiunilor care în notația modernă se scrie $\dot{y}:\dot{x}=dy:dx$.

A doua problemă este inversa celei dintîi și se cere ca din fluxiune să se determine fluenta sau în general « fiind dată o ecuație cuprinzînd relația dintre fluxiunile cantităților, să se găsească relațiile dintre aceste cantități sau fluente, una față de alta ». Această metodă este echivalentă fie cu o integrare sau cu *metoda cvadraturii*, cum o numea Newton, fie cu o ecuație diferențială, pe care el o numea *metoda inversă a tangentelor*. Newton arată că derivata unei arii, limitată de o curbă dată, de axa absciselor și de două ordonate, față de abscisă e ordonata variabilă. De aici deduce că aflarea ariei echivalează cu găsirea funcției

primitive. Prin aceasta el stabileşte în mod neîndoielnic caracterul invers al derivării şi integrării. El aplică noul calcul la aflarea de maxime şi minime, tangente, rectificări de curbe etc. De asemenea, rezolvă ecuaţii diferenţiale de diferite ordine fie prin cvadraturi, fie prin schimbări de variabile sau alte procedee.

Nepublicarea la timp a marilor sale contribuţii în domeniul calculului infinitezimal din partea lui Newton l-a dus mai tîrziu la o aspră polemică cu Leibniz privitor la prioritatea asupra acestui calcul.

Cercetările de optică. Întors în 1667 la Cambridge, Newton se dedică în mod special cercetărilor optice. Problemele de optică l-au interesat şi mai înainte. Astfel în 1664, ca student, făcu observaţii asupra halourilor. La studiul compunerii luminii a fost condus căutînd să înlăture aberaţia cromatică a lentilelor, care produc margini irizate ale imaginilor formate în telescoapele cu refracţie, singurele întrebuinţate pe atunci. Pentru a putea înlătura acest defect, el îşi propuse să facă un studiu experimental complet al dispersiei luminii. « În acest scop — povesteşte Newton — în anul 1666 (pe cînd mă ocupam cu cizelarea lentilelor avînd altă formă decît cea sferică), mi-am procurat o prismă triunghiulară pentru a studia cu ea celebrele fenomene ale culorilor ».

Experienţele au fost întrerupte din cauza ciumei timp de aproape doi ani, iar rezultatele au fost publicate abia în 1672 în *Philosophical Transactions* sub forma unei scrisori către Oldenburg, secretarul Societăţii regale din Londra. În această scrisoare istoriseşte că « întunecînd camera mea şi făcînd o mică spărtură în obloane pentru a permite să treacă o cantitate suficientă de lumină solară, am aşezat prisma la intrarea ei în aşa fel ca să poată fi refractată pe peretele opus. La început era o adevărată distracţie să priveşti lumina vie şi intensă a culorilor produsă acolo; dar după un răstimp observînd-o cu mai mare atenţie am fost surprins să o văd sub forma unui oblong; căci potrivit legii refracţiei mă aşteptam să fie circulară ». Iar mai departe: « Comparînd lungimea acestui spectru colorat cu lăţimea lui, l-am aflat de aproape cinci ori mai mare, o disproporţie atît de extravagantă încît îmi excită o curiozitate neobişnuită să caut de unde poate proveni ».

Încercînd să explice fenomenul, Newton emise diverse ipoteze, care însă fură contrazise de experienţe. Felul în care procedă pentru a elimina ipotezele neverificate de experienţă şi pentru a ajunge la cunoaşterea fenomenului, constituie un model de procedare ştiinţifică şi e caracteristic pentru mentalitatea lui Newton. « Începui apoi — scrie el — să suspectez dacă nu cumva razele, după ce trec prin prismă, se propagă în linii curbe şi din cauza curburei lor mai mari sau mai mici tind spre diversele părţi ale peretelui. Presupunerea mea se întărea, aducîndu-mi aminte că adesea am văzut cum o minge de tenis lovită cu o rachetă oblică, descrie o astfel de linie curbă. Căci dîndu-i-se prin această lovitură atît o mişcare circulară cît şi una progresivă, părţile ei din direcţia în care se întîlnesc mişcările trebuie să apese şi să lovească aerul din vecinătate mai mult decît pe celălalt şi acolo produce o reluctanţă şi o reacţiune a aerului proporţional mai mare. Şi din aceeaşi cauză, dacă razele de lumină ar fi corpuri sferice şi prin trecerea lor oblică dintr-un mediu în altul ar cîştiga o mişcare circulară, ele ar suferi o rezistenţă mai mare de la eterul înconjurător de partea în care se întîlnesc mişcările şi de aceea încontinuu ar fi deviate spre cealaltă. Dar cu tot temeiul plauzibil al acestei ipoteze, cînd am procedat la examinarea ei, nu am putut să observ în ea nici un fel de curbură. Şi afară de aceea (ceea ce era de ajuns pentru scopul urmărit) am observat că diferenţa dintre lungimea imaginii şi diametrul orificiului prin care trece lumina era proporţională cu distanţa ei. Înlăturarea treptată a acestor ipoteze m-a condus în sfîrşit la un *experimentum crucis*, care a fost următorul: am luat două paravane şi am aşezat unul din ele imediat înapoia prismei de la fereastră, astfel ca lumina să poată trece printr-o deschidere făcută în el în acest scop şi să cadă pe celălalt paravan pe care l-am aşezat la o distanţă de aproape 12 picioare, făcînd mai întîi o mică deschidere şi în el, pentru ca o

parte din această lumină incidentă să treacă prin ea. Apoi am pus o altă prismă înapoia paravanului al doilea ».

Învîrtind prisma întîia în jurul axei sale trecu pe rînd fiecare culoare prin deschiderea paravanului al doilea, făcînd să cadă pe prisma a doua şi notă locul fiecărei culori pe paravanul al doilea. Observă astfel că culoarea roşie e mai puţin deviată, iar cea violetă mai mult.

« Şi astfel aflai că adevărata cauză a lungimii acestei imagini nu e alta decît că lumina nu e asemenea sau omogenă, ci constă din raze uniforme, unele din ele fiind mai refrangibile decît altele ».

Mai tîrziu completă această experienţă cu alta în care lumina după ce a fost refractată prin întîia prismă în aşa fel, ca să formeze o bandă dreaptă pe perete, trece prin a doua prismă a cărei muchie era perpendiculară pe cea dintîi. Lăţimea spectrului rezultant nu creştea prin o a doua refracţie, dar spectrul devenea oblic, culorile care aveau cea mai mare deviaţie la prima refracţie, sufereau deviaţia mai mare şi la a doua. Din aceste experienţe deduse că lumina solară şi în general lumina albă se compune din raze de toate culorile, astfel de culori fiind « proprietăţile naturale şi înnăscute » ale luminii, iar nu cauzate de prismă. « Aceluiaşi grad de refrangibilitate îi corespunde aceeaşi culoare şi aceleiaşi culori totdeauna îi corespunde acelaşi grad de refrangibilitate ».

Prin aceste experienţe Newton a arătat în mod neîndoielnic că lumina albă e compusă dintr-o infinitate de culori. Natura culorilor nu e o proprietate a corpurilor, ci a luminii însăşi. El caracterizează culorile prin refrangibilitatea lor, ceea ce s-a dovedit ulterior că nu este exact, deoarece indicele de refracţie e o însuşire a corpurilor iar nu a lumin i.

În 1667 Newton luă ultimele grade universitare şi se stabili la Cambridge. În cei doi ani ce urma ă revăzu cursul lui Barrow, care apăru în 1669 sub titlul de *Lectiones Opticae et Geometricae*. În octombrie 1669 Barrow renunţă la catedra de matematici în avoarea lui Newton, care o ilustră pînă în 1696. În 1670 el începu să expună într-un curs sistematic de analiză prin serii infinite descoperirile sale din acest domeniu, care apărură ca apendice la *Optica* sa din 1704.

Studiul dispersiei i-a sugerat lui Newton ideea că ea este o cauză mai importantă a imperfecţiei lunetelor decît aberaţia de sfericitate. Constată că dacă printr-o prismă trece lumina albă, razele roşii au un focar mai îndepărtat decît cele violete astfel că punînd în calea lor o a doua lentilă ele nu mai pot fi reunite ca să ne dea o imagine clară. Punînd într-o prismă lichidă una de sticlă, deduse că dispersia luminii în spectru este aceeaşi indiferent de substanţa din care este făcută prisma sau lentila. Cu această ocazie însă nu a fost suficient de precaut trăgînd dintr-o singură experienţă concluzia că aberaţia cromatică nu se poate înlătura, prin urmare nu se pot construi lunete perfecte. Din acest motiv abandonă încercările de perfecţionare a lunetelor şi trecu la construirea telescopului cu reflexie. « Văzînd atunci — scrie el — că perfecţionarea telescopului de lungime dată prin refracţie este irealizabilă, inventai un telescop cu reflexie, folosindu-mă în loc de obiectiv de o oglindă metalică ».

Ideea unui telescop cu reflexie îi fu sugerată lui Newton de *Optica promota* a lui James Gregory, apărută în anul 1663. Gregory însă nu a construit telescopul imaginat de el. Newton modifică planul şi construi unul care deşi avea numai 6 degete lungime şi 1 deget diametru, avea o putere măritoare de vreo 30—40. El îşi descrie instrumentul într-o scrisoare din februarie 1669 adresată prietenului său Est. Societatea Regală aflînd de noul instrument ceru să-i fie prezentat. Newton construi un al doilea telescop mai mare, pe care-l trimise secretarului Oldenburg în decembrie 1671. Instrumentul fu prezentat Societăţii Regale în şedinţa din 11 februarie 1672, stîrnind un entuziasm deosebit. Telescopul se păstrează şi azi în colecţia de aparate ale Societăţii Regale. Ca o consecinţă a construirii telescopului său, Newton fu ales membru al acestei instituţii în luna ianuarie 1672. În acelaşi an se publică în *Philosophical Transactions* schema şi descrierea instrumentului.

La 6 februarie 1672, abia la o lună după alegerea sa ca membru, Newton trimise Societății Regale o dare de seamă asupra experiențelor sale de optică și a teoriei dispersiei, care apăru în *Philosophical Transactions*. Ea reprezintă începutul unei serii de controverse științifice cu diverși savanți ai epocii, ca Pardies, Linus, Lucas, Hooke și Huygens.

Ignace Gaston Pardies susținea împotriva lui Newton că prelungirea imaginii Soarelui în spectrul solar provine din cauza incidenței diferite a razelor, pe cînd Franciscus Linus afirmă că ea e cauzată de norii albi de pe cer și nu poate avea loc cînd cerul e senin. Obiecție cu mult mai serioasă ridică Anton Lucas, care repetînd experiențele lui Newton află că lungimea spectrului nu este de 5 ori, ci numai de 3,5 ori mai mare decît imaginea Soarelui. Newton răspunse că aceasta provine din cauză că unghiul prismei cu care a experimentat Lucas este prea mic; dacă acesta ar întrebuința o prismă de un unghi de 66—67°, lungimea spectrului ar fi mai mare. De aici se vede că Newton era atît de convins de invariabilitatea dispersiei încît nu repetă experiențele cu alte prisme de natură diferită pentru a se convinge de adevărul afirmațiilor lui Lucas. În acest fel din cauza unei inadvertențe a lui Newton corectarea aberației cromatice pentru a obține lentile acromatice suferi o amînare de aproape un secol.

Meditînd asupra naturii luminii Newton ajunse la concluzia că ea constă din particule materiale extrem de mici, care se propagă din corpul luminos în linie dreaptă în toate direcțiile cu o iuțeală extraordinară. Spre deosebire de această teorie numită corpusculară, Hooke și mai tîrziu Huygens au elaborat o teorie ondulatorie susținînd că lumina e formată din unde ce se mișcă în eter. Atît teoria culorilor cît și cea a naturii luminii a lui Newton au provocat criticele lui Hooke și Huygens. În ce privește natura culorilor Hooke susținea că nu există decît două culori fundamentale, roșu și violet, din amestecul cărora provin toate celelalte și că inegalitatea refracției este cauzată de descompunerea și slăbirea vibrațiilor eterului, pe cînd Huygens afirma că lumina albă se compune din cele două culori fundamentale galben și albastru.

Într-o scrisoare din 11 iunie 1673 către Oldenburg, Newton răspunde criticilor arătînd că două culori fundamentale nu sînt deajuns să explice toate culorile și că teoria culorilor este independentă de natura luminii. În ce privește teoria lui Huygens asupra luminii, Newton o considera ca insuficientă din cauză că ea nu putea da o explicatie simplă a propagării în linie dreaptă. El scrie: « Mie mi se pare imposibilă însăși ipoteza fundamentală, anume că undele sau vibrațiile unui fluid pot, la fel cu razele de lumină, să se propage în linie dreaptă fără o neîtreruptă și extravagantă săritură și îndoire în mediul în repaus, cînd ele se termină în el. . . Mă îndoiesc dacă aici experiența și demonstrația sînt de acord ».

Discuțiile asupra luminii l-au amărît atît de mult pe Newton, care avea oroare de publicitate și controverse, încît într-o scrisoare către Oldenburg se plînge împotriva criticilor exprimîndu-și dorința de a se lăsa de filozofie. « Văd că omul trebuie sau să se hotărască să nu producă nimic nou, sau să devină un sclav al descoperirii ca să o apere ». În anul 1763 își dădu chiar demisia de la Societatea Regală pe motivul că nu poate achita cotizația de membru; Oldenburg însă îl convinse să și-o retragă intervenind ca Newton să fie dispensat de plata ei.

O altă problemă de optică pe care a rezolvat-o Newton a fost aceea a lamelor subțiri. Fenomenul a fost cercetat mai întîi de Robert Boyle în 1663 și a fost studiat mai amănunțit de către Hooke, care într-o comunicare făcută în 1672 la Societatea Regală arată că el se observă și la lamele subțiri de mica, precum și atunci cînd apăsăm una pe alta două plăci de sticlă. El ajunse la rezultatul că culorile observate depind de distanța dintre cele două plăci, dar nu a putut arăta în ce fel și nici să dea o explicație a fenomenului.

Influențat de aceste experiențe, Newton consideră problema dintr-un punct de vedere mai matematic. El puse pe o sticlă plană o lentilă cu o rază de 50 de picioare și le apăsă puțin

una pe cealaltă. Prin acest mijloc observă că se obţin inele colorate concentrice, atît prin transparenţă cît şi prin reflexie, unele fiind complementarele celorlalte. Astfel prin transparenţă se obţin inele cu centru luminos, iar prin reflexie inele cu centrul întunecat. El făcu experienţe nu numai cu lumină albă ci şi cu lumină monocromatică, în care caz obţinu o serie de inele alternativ luminoase şi întunecate. Măsurînd razele inelelor luminoase şi întunecate constată că la cele luminoase pătratele razelor sînt în raportul 1 : 3 : 5 : 7 . . ., iar la cele întunecate în raportul 0 : 2 : 4 : 6 : . . . Umplînd spaţiul dintre sticlă şi lentilă cu apă, află că raza inelelor se contractă în raportul de 8 pe 7. De aici deduse că grosimea stratului de apă se raportă către a celui de aer care produce aceleaşi culori precum $7^2 : 8^2 = 49 : 64$, adică aproximativ precum 3 : 4, prin urmare în raportul indicelui de refracţie al apei şi al aerului.

Fenomenul inelelor colorate îl îndeamnă pe Newton să-şi completeze teoria luminii atribuind particulelor facultatea de a-şi varia periodic proprietăţile şi anume în aşa fel că într-un moment dat ele se reflectă uşor la o suprafaţă, în alt moment se refractă uşor. El numi această însuşire «fits» (fr. accès) şi admise că ele se succed cu atît mai repede cu cît particulele luminoase sînt mai mici, adică cu cît ne apropiem mai mult de violet. Cu ajutorul acestei ipoteze suplimentare îi reuşi să dea o explicaţie inelelor, dar îşi dădu seama că ea nu e satisfăcătoare. Într-adevăr este greu de precizat în ce condiţii se găsesc particulele în starea de a fi uşor reflectate şi cînd se găsesc în starea de a fi uşor refractate. Pentru a explica aceasta el îşi imagină că particulele luminoase produc oscilaţii în corpurile pe care cad. Vibraţiile fiind mai rapide decît razele, ele măresc sau micşorează alternativ iuţeala razelor producînd astfel «fits»-urile. Imposibilitatea de a putea explica în mod simplu fenomenele de interferenţă constituie unul din neajunsurile teoriei lui Newton.

În 1676 Newton publică o lucrare asupra culorilor naturale ale corpurilor în care afirmă că ele depind de mărimea şi distanţa dintre particulele din care sînt alcătuite corpurile distanţă comparabilă cu grosimea lamelor din experienţele sale. În această teorie el explică transparenţa corpurilor, admiţînd că particulele constitutive ale corpurilor şi distanţele dintre ele sînt atît de mici încît ele nu pot reflecta lumina. Pentru a explica culoarea albastră a cerului el presupune că particulele de apă din aer au o astfel de mărime încît fac să predomine culoarea albastră.

Lucrările asupra culorilor lamelor subţiri l-au atras pe Newton într-o polemică vie cu Hooke, ceea ce-l amărî atît de mult încît promise că pînă ce va trăi acesta nu va mai publica nimic privitor la optică, promisiune pe care a şi ţinut-o. În urma nereuşitei momentane a teoriilor sale optice şi din cauza criticilor ce i s-au adus, el părăsi aceste studii revenind la problema gravitaţiei.



Gravitaţia universală. Este caracteristic pentru personalitatea lui Newton că toate ideile sale ştiinţifice s-au ivit în prima lui tinereţe, dar datorită firii sale meditatoare şi rezervate el nu şi-a publicat operele decît foarte tîrziu. Aceasta o confirmă şi istoria descoperirii legii gravitaţiei sau a atracţiei universale.

Voltaire povesteşte că Newton plimbîndu-se în grădină absorbit în gînduri asupra cauzei gravitaţiei văzu un măr căzînd din pom, ceea ce-l conduse să se întrebe care sînt limitele forţei gravitaţionale şi cît de înalt ar trebui să fie pomul pentru ca mărul să nu mai cadă la pămînt şi a ajuns la rezultatul că ar trebui să-i ajungă vîrful pînă la lună fără ca acţiunea gravitaţiei să înceteze. Povestirea lui Voltaire cu tot aspectul său de verosimilitate nu poate fi adevărată din cauza că ideea gravitaţiei au avut-o înaintea lui Newton şi alţi oameni de ştiinţă ca Leonardo da Vinci, Copernic, Kepler etc. Meritul incontestabil al lui Newton este însă că a dus la bun sfîrşit munca începută de alţii şi a clarificat o idee pe care alţii înaintea lui au avut-o numai în mod vag.

Cu mult mai verosimile sînt detaliile pe care le dă Pemberton, care-l cunoscuse pe Newton în ultimii ani ai vieţii sale şi care-l ajută la scoaterea ediţiei a III-a a *Principiilor.*

« Plimbîndu-se singur prin grădină — scrie Pemberton — medită asupra forței gravitației; oare aceasta nu se micșorează în mod sensibil la distanțele cele mai mari de la centrul Pămîntului pînă la care nu ne putem urca, nici pe vîrful edificiilor celor mai înalte, i se păru rezonabil să conchidă că această forță trebuie să se extindă cu mult mai departe decît se credea de obicei; pentru ce nu pînă la Lună se întreabă el? Dar dacă este așa mișcarea trebuie să fie influențată de ea; poate de aceea este reținută pe orbita ei ».

Izvorul cel mai autentic desigur este însuși Newton, care-și reamintește astfel de importanta descoperire: « În același an (1666) am început să mă gîndesc că gravitația se întinde pînă la orbita Lunii și aflînd cum se exprimă forța cu care o sferă ce se învîrtește în interiorul altei sfere apasă asupra suprafeței acesteia, din legea lui Kepler că timpurile periodice ale planetelor sînt în raportul puterii 3/2 a distanțelor de la centrele orbitelor lor, am dedus că forțele care țin planetele pe orbite trebuie să fie în raport invers cu pătratele distanțelor lor de la centrele în jurul cărora se învîrtesc; prin urmare am comparat forța necesară să țină Luna pe orbita sa cu forța gravitației pe suprafața pămîntului și am aflat că ea corespunde cu multă aproximație ».

În posesia acestei legi Newton căută să o verifice în cazul Pămîntului și a Lunii. Făcu ipoteza că greutatea la suprafața Pămîntului este cauzată de aceeași forță gravitațională care menține Luna pe orbita ei și că potrivit legii de mai sus accelerația căderii corpurilor la suprafața Pămîntului și aceea a Lunii sînt invers proporționale cu pătratul distanțelor de la centrul Pămîntului. Dacă acest lucru se verifică înseamnă că legea forțelor invers proporționale cu pătratul distanțelor este adevărată.

În acea epocă nu se cunoștea raportul razei Pămîntului față de distanța Lunii de la Pămînt. De asemenea nu se cunoșteau rezultatele diverselor măsurări asupra razei pămîntești, a cărei valoare era necesară pentru determinarea accelerației Lunii spre Pămînt. Abia în 1684 a aflat de măsurările precise ale lui Picard, făcute în Franța, și astfel a fost în stare să verifice legea.

Astronomul Adams mai aduce un motiv care ar explica întîrzierea publicării legii gravitației universale și anume dificultatea întîmpinată în calculul atracției unei pături sferice sau a unei sfere de pături omogene asupra unui punct exterior. Abia după rezolvarea acestei probleme care nu i-a reușit decît prin 1685 se putea pune problema publicării legii gravitației universale.

Împrejurarea care l-a silit pe Newton să iasă din rezerva sa obișnuită și să-și comunice marea descoperire a fost discuția ce s-a ivit privitor la legea atracției invers proporționale cu pătratul distanței între trei fizicieni de seamă din Anglia: R. Hooke, Chr. Wren și Edm. Halley.

Robert Hooke (1635—1703), unul din fondatorii Societății Regale, începuse să se ocupe cu problema gravitației cam în același timp cu Newton. În 1666 prezintă acestei societăți un memoriu asupra gravitației în care arată că variația acestei forțe cu altitudinea s-ar putea măsura cu ajutorul unui pendul. În 1674 Hooke emise ideea gravitației universale concepînd gravitația ca pe o radiație, de unde urmează că forța gravitației e proporțională cu suprafața sferei atinse de această iradiație, adică invers proporțională cu pătratul distanței.

În 1680 Hooke i-a propus să determine traiectoria unei particule ce se mișcă în apropierea unui centru spre care este atras cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței. Răspunsul lui Newton fu că aceasta este o spirală, Hooke însă îi atrase atenția că ea este o elipsă, avînd unul din focare în centrul de atracție. Newton reamintindu-și de această discuție scrie: « Și în acest fel corectîndu-mi spirala mă făcu să aflu teorema cu ajutorul căreia mai tîrziu am examinat elipsa ».

Newton dădu o soluție generală problemei puse de Hooke demonstrînd că un corp ce se mișcă sub influența unei forțe invers proporționale cu pătratul distanței de la un

centru fix descrie o elipsă, parabolă sau hiperbolă, şi invers un corp ce se mişcă pe o elipsă, parabolă, sau hiperbolă este atras spre un centru fix cu o forţă invers proporţională cu pătratul distanţei corpului de la acel centru. Mai arată că raza vectoare a unui mobil ce se mişcă pe o orbită centrală descrie arii egale în timpuri egale. Demonstrînd şi acest lucru, Newton, după cum scrie într-o scrisoare din 1686, a « întrerupt calculele, trecînd la alte studii şi aşa a rămas timp de cinci ani». După trecerea celor cinci ani intrară în scenă Wren şi Halley.

Christian Wren (1632—1723), arhitect, a găsit legea atracţiei invers proporţionale cu pătratul distanţei căutînd să determine traiectoria unei planete din condiţiile iniţiale şi din forţa gravitaţională.

Edmund Halley (1656—1742), astronom şi prieten al lui Newton, află în 1682 că dacă admitem că planetele descriu în jurul Soarelui orbite circulare din legea a treia a lui Kepler se poate deduce că forţa centripetă este în raport invers cu pătratul distanţei planetei de la Soare. El însă nu putu să rezolve problema inversă de a găsi traiectoria unui corp atras spre un centru fix cu o forţă invers proporţională cu pătratul distanţei, de aceea propuse această problemă lui Hooke şi lui Wren. Acesta din urmă recunoscu că nu poate da soluţia, pe cînd Hooke răspunse că cu ajutorul forţei invers proporţionale cu pătratul distanţei « toate legile mişcărilor cereşti pot fi demonstrate şi că el a făcut aceasta ». Ca urmare a acestor discuţii Wren oferi o carte de valoare aceluia din cei doi savanţi care va rezolva problema în decurs de două luni. Răspunsul lui Halley fu negativ, iar Hooke susţinu din nou că el « o posedă, dar vrea să o ţină ascunsă cîtva timp, pentru ca alţii încercînd şi nereuşindu-le să-i poată aprecia valoarea cînd o va publica »; dar n-a publicat-o niciodată.

Văzînd că nu se ajunge la nici un rezultat, Halley, care învăţase să-l aprecieze pe Newton, în august 1684 se duse la Cambridge şi-i puse întrebarea: ce traiectorie ar descrie o planetă sub acţiunea unei forţe invers proporţională cu pătratul distanţei? Newton răspunse imediat: o elipsă. La cererea lui Halley de a-i comunica demonstraţia, Newton răspunse că nu o mai are, dar i-o va trimite la Londra în curînd. După trei luni Halley avu demonstraţia lui Newton. Entuziasmul lui Halley era fără margini şi hotărî să-l convingă pe Newton să-şi publice descoperirea. În acest scop călători din nou la Cambridge, unde află cu plăcere că Newton a terminat un mic tratat intitulat: *De motu corporum*, în care se ocupă cu mişcarea centrală şi în particular cu forţele invers proporţionale cu pătratul distanţei. Halley îl făcu să promită că va trimite manuscrisul la Societatea Regală pentru a-şi asigura prioritatea şi înştiinţă Societatea despre aceasta în şedinţa din 10 decembrie 1684. Manuscrisul ajunse la Londra în februarie 1685 însoţit de o scrisoare a lui Newton în care menţionează că pregăteşte un tratat mai mare asupra aceluiaşi subiect.

Newton putea acum să anunţe pregătirea unei lucrări mai mari asupra gravitaţiei fiindcă la începutul anului 1685 îi reuşi să demonstreze că o sferă formată din pături omogene atrage un punct material exterior ca şi cînd întreaga ei masă ar fi concentrată în centrul sferei. Considerînd planetele ca puncte materiale în care este concentrată întreaga lor masă, el putu enunţa legea atracţiei universale: două planete se atrag cu o forţă proporţională cu masele lor şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele. În posesia acestei legi, Newton, în aprilie 1685, începu redactarea marii opere pe care o termină în timp de 18 luni, cu toate că în acelaşi timp făcea şi cercetări de chimie. În munca sa avu sprijinul lui John Flamsteed, astronom la Cambridge şi un excelent observator al fenomenelor cereşti, care-i comunica cele mai noi şi precise observaţii asupra orbitei lui Saturn, a mişcării sateliţilor lui Jupiter şi Saturn, a mareelor etc.

Cartea întîi fu terminată în primăvara lui 1685, a doua în vara aceluiaşi an, pe cînd redactarea celei de-a treia se sfîrşi abia în anul următor. La 21 aprilie 1686 Halley anunţă la Societatea Regală că « dl Issac Newton are aproape gata de tipar un incomparabil tratat asupra mişcării ». În sfîrşit, la 28 aprilie fu prezentat în şedinţă manuscrisul intitulat *Philosophiae*

Naturalis Principia Mathematica. El nu cuprindea decît Cartea I, totuşi prezentarea stîrni entuziasmul adunării, cu excepţia lui Hooke, care îşi revendică prioritatea. Newton nu era de faţă, astfel că Halley reuşi să aplaneze conflictul ce se născu după aceasta între cei doi mari fizicieni. Ca rezultat al stăruinţelor lui Halley, prin scrisoarea din 14 iulie 1686 Newton se învoi ca să se insereze în locul potrivit în carte că legea forţei invers proporţionale cu pătratul distanţei a fost descoperită atît de el, cît şi în mod independent de Hooke, Wren şi Halley.

Societatea Regală hotărî publicarea imediată a *Principiilor* şi însărcină pe Halley cu îngrijirea tipăririi. Acesta însă în curînd îşi dădu seama că Societatea nu dispune de fonduri suficiente şi ca apariţia cărţii să nu sufere întîrziere, deşi el însuşi nu era bogat şi avea şi familie, completă din al său suma ce lipsea. În acest fel datorită spiritului de jertfă al lui Halley, care nu cruţă nici o oboseală făcînd el însuşi corecturile de tipar, adunînd date astronomice, convingîndu-l pe Newton să nu renunţe la publicarea Cărţii a III-a, apărură în 1687 *Principiile matematice ale filozofiei naturale*, unul din cele mai de seamă monumente ale gîndirii omeneşti.

În timpul imprimării *Principiilor* Newton luă parte la un incident politic important pentru viaţa universitară a Angliei. Carol al II-lea muri în anul 1685 şi se urcă pe tron fratele său Iacob al II-lea, un mare protector al catolicilor. Nu peste mult timp regele impuse Universităţii din Oxford acceptarea numirii într-un post important academic a unei persoane fără nicio calitate decît aceea de a fi catolic. În februarie 1687 regele pretinse Universităţii din Cambridge să confere titlul de « magister artium » unui călugăr benedictin, fără a-i pretinde jurămîntul reglementar către universitate. Vicecancelarul Universităţii refuzînd executarea decretului regal fu chemat în faţa Înaltei Curţi din Westminster împreună cu reprezentanţii Universităţii. Curtea era prezidată de celebrul Jefreys, un jurist excelent, dar un om brutal. Imediat reduse la tăcere pe vicecancelar şi nu lăsă să vorbească nici unul din cei opt reprezentanţi ai Universităţii, printre care se afla şi Newton, ci-i dojeni cu cuvintele: « În ce vă priveşte pe D-voastră, cei mai mulţi sînteţi teologi. De aceea mergeţi acasă reamintindu-vă cuvintele din Scriptură: iar de acum înainte să nu mai păcătuiţi ca să nu vi se întîmple ceva mai rău ». Ca urmare a conflictului, vicecancelarul fu destituit, dar Universitatea nu execută nici după aceea decretul regelui.

Munca excesivă depusă de Newton la redactarea *Principiilor* i-a măcinat mult energia şi l-a obosit. La sfatul prietenului său Halley întrerupse pentru un timp activitatea ştiinţifică. În 1689, după « revoluţia glorioasă » care-l detronă pe Iacob al II-lea, Newton fu trimis de Universitatea din Cambridge ca reprezentant al său în parlamentul din Londra, demnitate pe care o menţinu pînă la dizolvarea acestuia în februarie 1690, fără însă a lua cuvîntul la dezbateri. Se povesteşte că o singură dată atrase atenţia uşierului să închidă un geam ca să nu răcească oratorul de la tribună. Istoricul Macaulay scrie despre el: « În mulţimea membrilor tăcuţi se vedea fruntea majestoasă şi faţa meditativă a lui Isaac Newton; el stătea acolo în măreţia sa modestă, prieten neîmbulzit, dar neşovăitor al libertăţii cetăţeneşti şi religioase ».

În timpul deputăţiei sale, Newton îşi dădu seama că în vreme ce oameni fără nici o valoare ocupă situaţii înalte şi slujbe bine retribuite, situaţia sa materială nu e de invidiat. Acest fapt îl enervă atît de mult încît le reproşă prietenilor săi cu influenţă Pepys, preşedinte al Societăţii Regale, Montague, Locke etc. că nu se interesează de soarta lui.

O altă cauză a deprimării lui Newton a fost moartea mamei sale. În tot timpul vieţii, Newton i-a purtat o afecţiune deosebită, iar în decursul bolii ce o chinuia a îngrijit-o cu mult devotament stînd noaptea de veghe lîngă căpătîiul ei şi alinîndu-i suferinţele. Probabil că acest eveniment i-a mărit inclinaţia pe care deja o avea în mare măsură pentru studiul teologiei.

Cu toate acestea el continuă preocupările sale științifice. În 1692 publică în volumul al II-lea al *Algebrei* lui W a l l i s, cîteva propoziții referitoare la calculul fluxiunilor, ține corespondență cu L e i b n i z asupra problemelor de matematici și discută cu B e n t l e y probleme teologice.

În această perioadă însă starea sănătății lui N e w t o n devine îngrijorătoare. Singurătatea vieții de la Cambridge îl făcu tot mai nervos și dădu adesea semne de slăbiciuni fizice. Într-o scrisoare din 1692 către L o c k e scrie: « adorm prea des lîngă foc... astfel că atunci cînd v-am scris nu am dormit o oră pe noapte timp de două săptămîni, iar vreme de cinci zile nici o clipită ». Cu ocazia unei vizite la episcopul de Canterbury începu să înșire cuvinte neînțelese de cei prezenți. În curînd vestea despre îmbolnăvirea lui N e w t o n se răspîndi nu numai în Anglia, ci și pe Continent, unde se zvoni că ar fi înnebunit. Această deprimare sufletească însă nu dură mult, fiindcă prietenii săi îl forțează să se odihnească cîtva timp, după care își recîștigă liniștea și puterea de muncă.

Încă în 1691 N e w t o n începu redactarea unei lucrări asupra mișcărilor Lunii, cărora le-a dat totdeauna o atenție deosebită. Mișcările acestui satelit al planetei noastre l-a preocupat ani de-a rîndul și starea sa nervoasă s-a agravat și din cauza acestei probleme dificile. De multe ori se plîngea lui H a l l e y că ea îi cauzează dureri de cap. El nu numai a formulat precis problema Lunii, dar i-a dat cel dintîi o soluție aproximativă. A arătat că din cauza atracției Soarelui linia apsidelor descrie o mișcare progresivă, iar cea a nodurilor una retrogradă. Dificultatea problemei constă tocmai în influența Soarelui, astfel că ea a condus la problema celor trei corpuri, care în generalitatea ei nu a fost soluționată pînă în prezent.

În 1694 ajunse ministru de finanțe al Angliei C h a r l e s M o n t a g u e, elev al lui N e w t o n și președinte în acea vreme al Societății Regale. În această calitate își propuse să facă o reformă monetară, pentru ducerea la îndeplinirea căreia crezu că ajutorul lui N e w t o n ar fi foarte prețios. Profitînd de faptul că postul de controlor al Monetăriei Statului era vacant interveni la rege ca el să fie dat lui N e w t o n. La 19 noiembrie al aceluiași an îi comunică lui N e w t o n numirea în termenii următori: « Postul este foarte potrivit pentru D-voastră... El reprezintă cinci sau șase sute de fonți pe an și ocupația nu cere mai mult timp decît ați putea dispune. Doresc să veniți imediat ce veți putea... Cred că veți putea avea o locuință aproape de mine ». N e w t o n acceptă postul care înaintea lui era considerat ca o sinecură, dar pe care el îl luă în serios. Rezultatul activității sale a fost că după trei ani redresarea monetară a Angliei fu desăvîrșită. Ca recompensă N e w t o n fu numit în 1699 director al Monetăriei Statului, situație foarte bine retribuită și pe care o păstră tot timpul vieții sale.

Prin mutarea la Londra, felul de viață al lui N e w t o n luă o întorsătură importantă. El nu se căsători, dar își aranjă un cămin comod și lipsit de griji. Sarcina menajului o încredință nepoatei sale de soră Ecaterina, care s-a achitat în chip splendid de rolul primit. N e w t o n începu să joace un rol de primul rang în societatea londoneză.

Cu toate că preocupările lui N e w t o n erau de altă natură de cît pur științifică, geniul său nu încetă să dea dovezi de strălucire. Una din acestea este soluționarea problemei brachistocronei. Problema a fost pusă de J e a n B e r n o u l l i sub forma următoare: Fiind date două puncte *A* și *B* în așa fel ca dreapta ce le unește să nu fie nici verticală nici orizontală, să se găsească traiectoria descrisă de o particulă sub influența gravității în așa fel ca ea să ajungă din *A* în *B* în timpul cel mai scurt. Problema a fost enunțată în *Acta Eruditorum* din Leipzig ca o sfidare a matematicienilor din Europa. N e w t o n rezolvă problema într-o după masă și arătă că traiectoria este o cicloidă. Soluția pe care a dat-o era atît de elegantă încît B e r n o u l l i văzînd-o a exclamat: « recunosc leul după ghiare ».

În 1699 regele Franței Ludovic al XIV-lea îi oferi o pensie, pe care însă o refuză. În schimb acceptă alegerea sa ca membru străin al Academiei de Științe, alături de L e i b n i z, frații B e r n o u l l i și O l a f R o e m e r. În același an se decise să renunțe la catedra de la

Cambridge, fiind înlocuit de matematicianul W. W h i s t o n, pînă în 1701, cînd N e w t o n părăsi definitiv această catedră. Totuşi el nu rupse definitiv legăturile sale cu Universitatea, care în acelaşi an îl trimise din nou ca reprezentant al ei în parlamentul din Londra pînă la dizolvarea acestuia în 1702.

Ca preocupări ştiinţifice din această epocă amintim o încercare din 1699 de reformă a calendarului, şi o descriere a sextantului inventat de el pe care o trimise lui H a l l e y în 1700. În 1701 publică o lucrare asupra scărilor de temperatură în care se găsesc două legi descoperite de el. Întîia poartă numele de *legea de răcire a lui Newton* şi spune că viteza de răcire a unui corp este în fiecare moment proporţională cu diferenţa dintre temperatura proprie şi aceea a mediului înconjurător. A doua spune că temperatura unei substanţe în tot timpul topirii şi a fierberii rămîne constantă.

În 1703, N e w t o n obţinu cea mai înaltă distincţie ştiinţifică fiind numit preşedinte al Societăţii Regale. El păstră această funcţie onorifică pînă la moarte spre gloria instituţiei şi a ştiinţei engleze. O ultimă şi importantă distincţie obţinu în 1705 cînd regina Ana a Angliei îi conferi titlul de nobil.

În această perioadă a vieţii, N e w t o n se ocupă mai ales cu editarea operelor sale. În 1703 murind H o o k e, N e w t o n îşi publică în limba engleză *Optica*, scrisă încă din 1675, dar tipărită abia în 1704. Ea fu tradusă în latineşte de S a m u e l C l a r k şi apăru în această limbă în 1706. *Optica* cuprinde în deosebi descoperirile autorului în domeniul luminii, fiind descrise experienţele lui N e w t o n din 1666 asupra spectrului solar şi teoria sa despre lumină.

Publicîndu-şi *Optica* după ce H o o k e nu mai era în viaţă el se credea la adăpostul criticilor. La sfîrşitul cărţii anexă însă două lucrări de cuprins pur matematic. Întîia, intitulată *Tractatus de quadratura curvarum* cuprinde în realitate teoria fluxiunilor aplicată la calcularea ariilor închise de curbe, iar a doua cu titlul *Enumeratio linearum tertiis ordinis* este un studiu despre curbele de gradul al treilea. Publicarea primei lucrări avea să-l ducă la o discuţie aprigă cu L e i b n i z asupra priorităţii calculului infinitezimal.

În 1707, W. W h i s t o n publică sub titlul *Arithmetica universalis* cursul de algebră pe care N e w t o n îl ţinuse la Cambridge şi pe care W h i s t o n îl avea în manuscris încă din anul 1685 cînd îl audiase. Cartea a apărut fără învoirea lui N e w t o n. În 1711 se tipări o altă carte a lui N e w t o n intitulată *Methodus differentialis* care cuprinde metode de calcul care nu şi-au pierdut încă actualitatea.

În acelaşi timp N e w t o n era preocupat şi de scoaterea celei de-a doua ediţii a *Principiilor*. În vederea retipăririi el făcuse o serie de note marginale pe unul din exemplarele proprii şi în 1708 îl trimise lui B e n t l e y care solicita retipărirea; acesta însă nu putu să se achite de această sarcină. N e w t o n însuşi avea alte ocupaţii, aşa că chestiunea rămase în suspensie. Ea s-ar mai fi amînat dacă în anul următor nu şi-ar fi luat această sarcină un tînăr matematician de la Cambridge, R o g e r C o t e s, profesor de astronomie şi filozofie la acea universitate. Deşi în etate de abia 25 de ani C o t e s se dovedi un excelent matematician. În 1709 N e w t o n îi trimise prin W h i s t o n exemplarul corectat şi completat pentru tipar. C o t e s nu se mulţumi însă numai cu o simplă retipărire, ci la îndemnul lui B e n t l e y şi cu învoirea lui N e w t o n se apucă să reediteze întreaga operă. Pregătirile tipăririi durară patru ani, în decursul cărora avu loc o vastă corespondenţă între N e w t o n şi C o t e s. În sfîrşit *Principiile* reapărură în 1713 adăugite cu părţi noi şi puse la punct cu ultimele descoperiri fizice şi astronomice. Noua ediţie era precedată şi de o prefaţă a lui C o t e s, care arăta şi atitudinea filozofică a operei.

C o t e s muri în 1716 în etate de abia 41 de ani. După epuizarea ediţiei a doua, N e w t o n căută un alt matematician potrivit pentru a scoate o a treia ediţie. Astfel găsi pe doctorul P e m b e r t o n, care începuse să studieze *Principiile* ca student la medicină, ceea ce-l determină să se ocupe cu matematicile. N e w t o n recunoscu în unele

lucrări pe care i le prezentă tînărul medic puterea de creaţie a acestuia în matematici şi-i încredinţă sarcina scoaterii celei de-a treia ediţii a marii sale opere. La fel ca şi Cotes, Pemberton nu a fost un simplu editor. El discută cu Newton fiecare pasaj şi scoase o ediţie complet revizuită. Datorită entuziasmului lui Pemberton această ultimă ediţie a *Principiilor* din timpul vieţii lui Newton apăru în 1726, împreună cu un frumos portret al lui Newton în etate de 83 de ani, datorit pictorului Vanderbank.

Ajungînd la etatea de 80 de ani, sănătatea lui Newton începu să lase de dorit. În 1722 suferi de o afecţiune de vezică, o putu însă stăpîni repede ţinînd o dietă strictă. Peste doi ani suferi de piatră la vezică, iar în 1725 trecu peste o pneumonie. Toate acestea nu-l împiedicară de la lucru și pregăti pentru tipar o lucrare de cronologie intitulată *The Chronology of Ancient Kingdoms Amended.* Nu avu însă timp să o vadă tipărită, căci se îmbolnăvi din nou din cauza pietrii la vezică, de astă dată însă fără remediu. La 10 martie 1727 prezidă pentru ultima dată o ședință a Societăţii Regale. Chinurile boalei care urmară le suferi cu mult curaj și în momentele fără durere își recăpătă buna dispoziţie. La 26 martie starea sa păru că se îmbunătăţeşte, dar în dimineaţa zilei de 31 martie 1727 își dădu sfîrşitul în etate de 84 de ani, 2 luni şi 21 de zile. A fost înmormîntat cu onorurile cuvenite unui rege în abaţia Westminster. În 1731 i s-a ridicat un monument cu o inscripţie ce se termină cu cuvintele: « să se felicite muritorii, că a existat o astfel și atît de mare podoabă a genului omenesc». La Cambridge în hall-ul de la Trinity College i s-a ridicat o statuie de marmoră, executată de Roubilliac, pe soclul căruia se poate citi: « Cel care a întrecut prin geniu neamul omenesc».



Portretul lui Vanderbank ni-l înfăţişează pe Newton ca pe un bătrîn venerabil cu părul alb-argintiu şi o înfăţișare gînditoare. El nu a fost nicicînd slab, iar către bătrîneţe părea chiar corpolent. Nepotul său Humprey Newton care i-a fost asistent și secretar între anii 1683 şi 1689 îl descrie ca « foarte blînd, liniștit și modest, fără să pară vreodată mînios, de gîndire adîncă, avînd o comportare plăcută, agreabilă și simpatică». Cursul îl dicta repede timp de o jumătate de oră. Auditori la curs avea puţini, uneori nici unul. Atunci se întorcea repede la lucrul său, căruia îi dedica tot timpul, fără răgaz și fără distracţii. « Mînca foarte puţin, aproape nimic, uneori uita de tot de mîncare, astfel că mergînd în camera lui, găseam alimentele neatinse . . . Rareori se culca înainte de orele două sau trei, uneori chiar pe la cinci sau şase, dormind patru sau cinci ore, mai ales primăvara și toamna, cînd obișnuia să stea vreo şase săptămîni în laboratorul său, cu focul arzînd aproape neîntrerupt ziua şi noaptea, el veghind o noapte și eu alta, pînă ce-și termina experienţele de chimie. Nu pot spune că l-am văzut vreodată bînd vin sau bere, decît la masă, dar și atunci foarte puţin. Foarte rar venea la masă în sufragerie, cu excepţia festivităţilor, dar și atunci, dacă nu i s-ar fi atras atenţia, s-ar fi dus complet neîngrijit, desculţ şi cu părul nepieptănat . . . Dădea multă atenţie grădinii, care i se părea că nicicînd nu e în ordine și în care rareori făcea o plimbare sau două, nesuferind să vadă în ea vre-o buruiană. În schimb se plimba prin laborator. În cameră se plimba atît de mult, încît s-ar fi crezut că a fost educat la Atena printre elevii lui Aristotel».

Din cele de mai sus se vede că Newton se cufunda uneori atît de adînc în meditaţiile sale că nu-l preocupa ceea ce se întîmplă în jurul său. Au rămas o mulţime de anecdote în legătură cu firea sa distrată. Astfel se povestește că întorcîndu-se o dată călare de la Grantham, la poalele unei coline se dădu jos de pe cal spre a-l conduce pe jos; ajungînd în vîrful colinei şi voind să se urce din nou pe cal, constată că a rămas cu frîul în mînă, pe cînd calul eliberîndu-se a luat-o singur înainte. În ocaziile rare cînd își rupea din timp și invita oaspeţi, dacă i se întîmpla să-i părăsească pentru a merge să aducă vin sau din alte motive, aceştia îl găseau după cîtva timp preocupat de vre-o problemă, uitîndu-şi cu totul de oaspeţi şi de datoriile sale de patron al casei. Una din cele mai răspîndite este următoarea anecdotă. Într-o

zi voind să fiarbă un ou, pentru ca acesta să nu fie prea tare scoase orologiul din buzunar pentru a observa timpul de fierbere. În loc însă de a introduce oul în vasul cu apă fierbinte puse orologiul şi se uită la ou ca să vadă cînd va fi fiert orologiul.

Newton era un om conştiincios şi religios, ducînd o viaţă morală; unul din contemporanii săi îl caracterizează ca « sufletul cel mai curat » pe care l-a cunoscut. Era însă de o sensibilitate extraordinară faţă de critici şi în materie de ştiinţă nu suferea critici sau contraziceri. Aceasta l-a condus la discuţii aprinse şi inutile cu Leibniz şi Flamsteed etc., discuţii în care nu-şi cruţa adversarii. În toiul acestor polemici Flamsteed l-a caracterizat, în mod injust, ca « perfid, ambiţios, extrem de sgîrcit cu laudele şi intolerant la contraziceri ».

Newton s-a bucurat de un prestigiu ştiinţific incontestabil atît în timpul vieţii, cît şi după moarte. Rivalul său Leibniz spunea că opera matematică a lui Newton este mai valoroasă decît tot ce s-a creat înaintea lui. În timpul revoluţiei franceze cînd se discutau proiecte de ameliorare a speciei umane Lagrange spunea celor din jurul său: « Vreţi să vedeţi spiritul omenesc în adevăr mare? Intraţi în cabinetul unui Newton descompunînd lumina şi dezvelind sistemul lumii ».

Biot, care a studiat cu multă atenţie operele lui Newton, îl caracterizează în felul următor: « ca geometru şi ca experimentator Newton este fără egal; prin unirea celor două feluri de genii în cel mai înalt grad, el este incomparabil ».

În aprecierea operei sale ştiinţifice cu toate că era conştient de valoarea ei, Newton se arăta foarte modest. El îşi atribuia succesele în cea mai mare parte operei înaintaşilor săi în ştiinţă, iar o dată s-a exprimat că dacă a văzut mai departe decît alţii, aceasta e din cauza că s-a ridicat pe umeri de giganţi. Cea mai frumoasă şi cea mai potrivită caracterizare însă sînt cuvintele pe care nu cu mult înaintea morţii le-a spus lui Spencer: «Nu ştiu cum voi apare înaintea lumii, dar mie însumi mi se pare că am fost ca un copil care se juca pe malul mării şi distrîndu-mă din cînd în cînd am găsit o pietricică mai netedă sau o scoică mai frumoasă decît de obicei, în timp ce marele ocean al adevărului zace nedescoperit înaintea mea».

VICTOR MARIAN

BIBLIOGRAFIA OPERELOR LUI NEWTON

1687

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Auctore Is. Newton. Trinit. Coll. Cantab. Socio Matheseos Professore Lucasiano, et Societatis Regalis Sodali, Londini. 4°.

1704

Opticks: or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light. Also two Treatise of the Species and Magnitudes of Curvilinear Figures. 1. Enumeratio linearum tertiis ordinis. 2. Tractatus de quadratura curvarum. London.

1706

Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis. Libri III. Latine reddidit Samuel Clarke, A.M.; accedunt Tractatus II ejusdem Authoris de Speciebus et Magnitudine Figurarum Curvilinearum, Londini. 4°.

1707

Arithmetica universalis sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. Londini. 4°.

1711

Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones ac Differentias · cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis, Londini. 4°.

1713

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica; Editio II, auctior et emendatior. Cantabrigiae. 4°.

1714

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, auctore Isaaco Newtono, equite aurato. Editio ultima, auctior et emendatior. Amstelodami. 4°.

1717

Opticks: or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light, 2d Edition, London. 8°.

1719

Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis. Libri III. Latine reddidit Samuel Clarke, A.M. Editio secunda, auctior. Londini. 4°.

1720

Universal Arithmetick: or a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution, translated by Joseph Raphson, F.R.S., and revised and corrected by Samuel Cunn. London. 4°.

Traité d'Optique sur les Réflexions, Refractions, Inflexions, et les Couleurs de la Lumière, traduit de l'Anglais par M. Costes. Sur la Seconde Edition, augmentée par l'Auteur. A Amsterdam.

1721

Opticks; or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light, 3rd Edition, corrected. London. 8°

1722

Traité d'optique sur les Réflections, Réfractions, Inflexions, et les Couleurs de la Lumière, traduit par Coste, sur la seconde Edition angloise, augmentée par l'auteur. Seconde Edition française, Paris. 4°.

Arithmetica Universalis; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. Editio II, in qua multa immutantur et emendantur, nonnula adduntur. Londini. 4°.

1723

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Editio ultima, cui accedit Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones ac Differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis. Amstelodami. 4°.

1726

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Editio tertia aucta et emendata. Londini. 4°.

1728

Optical Lectures Read in the Publick Schools of the University of Cambridge, Anno Domini 1669. By the late Sir Isaac Newton, Then Lucasian Professor of the Mathematicks. Translated into English out of the Original Latin. London.

Universal Arithmetick; or a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. Translated by Joseph Raphson, F.R.S. and revised and corrected by Samuel Cunn. Second Edition, very much corrected. London.

The Chronology of Ancient Kingdoms Amended, with short Chronicle from the First Memory of Things in Europe, to the Conquest of Persia by Alexander the Great. London. 4°.

Sir Isaac Newton's Chronology Abridged by Himself. London. 4°. *De Mundi Systemate Liber,* Londini. 4°.

1729

Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World. Translated into English by Andrew Motte. 2 vol. London. 8°.

Isaaci Newtoni, Eq Aur. In Academia Cantabrigiensi Matheseos olim Professoris Lucasiani Lectiones Opticae. Annis 1769, 1770 et 1771. In Scholis publicis habitae: Et nunc primum ex MSS, in lucem editae. Londini. 4°.

1730

Opticks: or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light, fourth Edition, corrected. London. 8°.

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Editio IV, Donick, Londini, 2 vol. 8°.

1731

De Mundi Systemate Liber; Opus diu integris suis Partibus desideratum in usum Juventutis Academicae. Editio secunda, Londini. 4°.

1732

Arithmetica Universalis: sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. Editio nova. Lugduni Batavorum. 4°.

1733

Observations upon the Prophecies of Holy Writ, particularly the Prophecies of Daniel, and the Apocalypse of St. John. London.

1736

Methodus Fluxionum et Seriarum Infinitarum. London.

The Method of Fluxions, and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines, translated from the Latin Original not yet made publick: with a Perpetual Comment, consisting of Annotations, Illustrations, and Supplements, by John Colson, F.R.S. London. 4°.

1737

Ad Danielis prophetae vaticinia, nec non Sancti Joannis apocalypsin observationes. Opus postumum. Ex anglica lingua in Latinam convertit et adnotationibus quibusdam et indicibus auxit Guilelmus Luderman, Amstelodami. 4°.

1739-42

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Auctore Isaaco Newtono, Ec. Aurato. Perpetuis Commentariis illustrata, communi Studio P.P. Thomae Le Seur et Francisci Jacquier, Ord. Min. Genevae. T. I. 1739, T. II. 1740, T. III. 1742.

1740

Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis. Libri III. Latine reddidit Samuel Clarke, A.M. cum indice copiosissimo. Lausannae et Genevae, 4°.
Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis. Libri III, cui accedunt ejusdem *Lectiones Opticae,* et Opuscula omnia ad Lucem et Colores pertinentia, interprete Samuele Clarke. Graecii. 4°.
La Méthode des Fluxions et de Suites infinies, par M. le Chevalier de Newton, traduite par Jean Louis Leclerc, Comte de Buffon, Paris. 4°.

1741

Arithmetica Universalis sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. Amstelodami, 2 vol. 4°.

1744

Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica, collegit partimque Latine vertit ac recensuit Johannes Castillioneus, Jurisconsultus, Lausannae, 3 vol. 4°.

1745

Two Treatise of the Quadrature of Curves, and Analysis by Equations of an Infinite Number of Terma, explained; containing the Treatises translated into English, with large Commentary, in which the Demonstrations are supplied where wanting, the Doctrine illustrated, etc., by John Steward, Prof. Mathematicks, Aberdeen. 4°.

1752

Arithmetica Universalis, sive de Compositione et Resolutione Arithmetica. Commentata, illustrata et aucta, auctore A. Loochi. Mediolanum Marellum.

1759

Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle, par feue Madame la Marquise du Chastellet. Paris. 2 vol. 4°.

1760

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Perpetuis Commentariis illustrata, communi Studio P.P. Thomae Le Seur et Francisci Jacquier, Ord. Min. Editio altera, longe accuratior et emendatior. Coloniae Allobrogum. 3 vol. 4°.

1769

Universal Arithmetick: or a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. The whole illustrated and explained in a Series of Notes, by Theaker Wilder, D.D., T.C.D. London. 8°.

1773

Opera omnia optica. Continens: *Optices libri tres;* accedit eiusdem *Lectiones Opticae,* et *Opuscula omnia ad Lucem et Colores pertinentia.* Sumpta ex Transactionibus Philosophicis, Ed. II. Patavina. Padua. 4°.

1777

Mathematical Principles of Natural Philosophy, Translated, and illustrated with a Commentary, by Robert Thorp, D.D. Archdeacon of Northumberland. London roy. 4°.

1779-85

Opera quae exstant Omnia, Commentariis illustrabat Samuel Horsley, R.S.S. 5 vol. Londini. 4°.

1787

Optique de Newton, Traduction nouvelle, faite par M*** (Jean Paul Marat) sur la dernière Edition originale. Dédiée au Roi, par M. Beauzée, Editeur de cet Ouvrage, l'un des Quarante de l'Académie Françoise. 2 vol. Paris. 8°.

1794

Opuscula Mathematica Philosophica et Philologica, Lausanne, 3 vol. 4°.

1801

The Mathematical Principles of Natural Philosophy, translated by Andrew Motte, with Newton's System of World; new Edition, with Life, carefully revised and corrected by William Davis, 3 vol. London, 8°.

1802

Mathematical Principles of Natural Philosophy, translated, and illustrated with a Commentary, by Robert Thorp, D.D., Archdeacon of Northumberland, Second Edition, London. 4°.
Arithmétique Universelle, traduite du Latin, avec des Notes explicatives, par Noël Beaudeux, 2 vol. Paris. 4°.

1803

The Mathematical Principles of Natural Philosophy, translated by Andrew Motte, with Newton System of World; new Edition, with Life, carefully revised and corrected by William Davis. 3 vol. London. 8°.

1822

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Editio nova, summa cura recensita. Glasguae, 4 vol. roy. 8°.

1830

An Historical Account of two Notable Corruptions of Scripture in a Letter to a Friend. London.

1833

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Editio Secunda Glasgowiensis, summa cura recensita J.M.F. Wright. Glasguae. 2 vol. 8°.

1841

An Historical Account of two Notable Corruptions of Scripture in a Letter to a Friend. London.

1850

The Mathematical Principles of Natural Philosophy. translated by Andrew Motte, with Newton's System of World, and Life, by N.W. Chittenden, New York. 8°.

1854

Mathematical Principles of Philosophy. Sections I, II, III with Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Methods, by Percival Frost, Pr.F.R.S. London 8°.

1860

Enumeration of Lines of the Third Order, Generation of Curves by Shadows, Organic Description of Curves, and Construction of Equations by Curves, translated from the Latin, with Notes and Examples, by C.R.M. Talbot, M.P., F.R.S.

1863

Mathematical Principles of Natural Philosophy. Sections, I, II, III, with Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Method, by Percival Frost, Pr., F.R.S. Second edition enlarged. London. 8°.

1871

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Reprint of the third Edition, for Sir William Thomson and Hugh Blackburn, Professors of Natural Philosophy and Mathematics in the University of Glasgow. Glasgow. 4°.

1872

Sir Isaac Newtons Mathematische Principien der Naturlehre. Mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Prof. Dr. I. Ph. Wolfers. Berlin. 4°.

1889

Mathematical Principles of Natural Philosophy. Sections I, II, III, with Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Methods, by Percival Frost, Pr., F.R.S. Third Edition. London. 8°.

1883

Mathematical Principles of Natural Philosophy. Sections I, II, III, with Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Methods, by Percival Frost, F.R.S., Fourth Edition. London. 8°.

1900

Mathematical Principles of Natural Philosophy. With Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Methods, by Percival Frost, Pr., F.R.S. Fifth Edition. London. 8°.

1915

Matematiceskie Naceala Naturalnoi Filosofii. Perevod Akad. A.N. Krîlova. Petrograd.
Zameceaniia na Knigu Proroka Daniila i apokalipsis sv. Ioanna. Petrograd. (Traducătorul e necunoscut).

1925

Principii di Filosofia Naturale. Teoria della Gravitazione, Con note critiche sullo sviluppo dei concetti della mecanica. Per cura di F. Enriques e Ugo Forti.

1927

Optika ili Traktat ob Otrajeniiah, Prelomleniiah, Izghivaniiah Țvetah Sveta. Perevod 3-go angliskogo izdaniia 1721 g. s primeceaniiami S.I. Vavilova. Moskva-Leningrad.

1932

Newton's Principia, 2 deelen Met 39 avbeeldingen tusschen tekst en 1 portrait. Beth H. I. E.

1934

Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of World. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translation revised and supplied with an historical and explanatory appendix, by Florian Cajori, Berkeley, California.

1936

Mathematiceskie Naceala Naturalnoi Filosofii. Sobranie Trudov Akademika A.N. Krîlova. t. VII. Moskva.

1937

Matematiceskie Rabotî. Metod Fluksii i Beskonecinîh Piadcv e Prilojeniem ego k gheometrii Krivîh. Percvod s latinskogo D.D. Morduhai-Boltovskogo.

1946

Lekții po Optike. Perevod, Kommentarii i Redakția Akademika S.I. Vavilova. Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR.

1954

Optika ili Traktat ob Otrajeniiak, Prelomleniiah, Izghivaniiah, i Țvetah Sveta. Perevod s tretvego angliiskogo izdaniia 1721 g. s primeceaniiami S.I. Vavilova. Izdanie vtoroe, prosmotrennoe G.S. Landsbergom. Moskva. 8°.

ADNOTĂRI

p. 11. *Prefața la ediția I*, scrisă de N e w t o n expune scopul și programa lucrării. În concepția sa rostul cercetării naturii este « să reducă fenomenele naturale la legi matematice ». Deci scopul cărții este « cultivarea matematicii întrucît ea privește filozofia ». De aceea el spune că nu se ocupă cu cele cinci puteri: pîrghia, scripetele, roata cu sul, planul înclinat și șurubul care formau preocupările celor vechi, ci cu forțele naturii, cum este greutatea, forțele elastice și în general forțele de atracție și de respingere. Acestui mod de tratare a mecanicii îi dă numele de *principiile matematice ale filozofiei*, numire care justifică și titlul cărții. Fiindcă « orice dificultate a filozofiei constă în a găsi din fenomenele de mișcare forțele naturii și din aceste forțe să demonstrăm celelalte fenomene », el își propune rezolvarea acestei probleme în cartea I și a II-a, determinînd din fenomenele observate forțele centrale, iar în a III-a să descrie cu ajutorul acestora sistemul lumii. N e w t o n însă merge și mai departe și-și exprimă dorința ca « și celelalte fenomene naturale să se poată deduce din principiile mecanice prin același fel de a demonstra ».

Deosebit de importantă este concepția lui N e w t o n că « geometria se bazează pe practica mecanică și nu este altceva decît acea parte a mecanicii universale care tratează și demonstrează arta de a măsura precis ». Reluînd această idee profundă, E i n s t e i n (1879 — 1955) își construi dinamica sub forma de geometrie a unui spațiu-timp curbat de materie.

p 12. *Societatea Regală*. Este vorba de vestita *Royal Society*, cea mai veche societate științifică ce există și azi. Ea s-a dezvoltat din *Invisible College* din Londra, înființat în 1645 și a fost întemeiată de matematicianul J o h n W a l l i s (1616—1703), lordul B r o u n c k e r (1620—1684), arhitectul C h r i s t i a n W r e n (1632—1723) și fizicianul R o b e r t B o y l e (1627—1691). Societatea s-a constituit formal la 1660 și a fost recunoscută legal la 15 iulie 1662, cu sediul în Londra.

p 12. În prima ediție a *Principiilor* prefața nu poartă iscălitura lui N e w t o n și nici data. În ediția a II-a găsim însă la sfîrșitul prefeței: « Dabam Cantabrigiae, e Collegio S. Trinitatis, Maii, 1686 » și semnătura « I s. N e w t o n ».

p. 13. *Prefața autorului la ediția a II-a*. Apariția *Principiilor* l-au făcut pe N e w t o n celebru. Atît importanța cărții, cît și faptul că ea s-a tipărit într-un număr mic de exemplare au adus cu sine epuizarea ei rapidă. În 1691 cartea nu se mai găsea pe piață. Aceasta l-a îndemnat pe N e w t o n să se gîndească la o nouă ediție. În acest scop el a făcut o mulțime de note marginale pe unul din exemplarele ce le poseda. Cu toate acestea apariția ediției s-ar fi amînat multă vreme, dacă nu s-ar fi găsit cineva care să se ocupe cu editarea ei, cum

făcuse H a l l e y cu ediția I. Cel care i-a solicitat lui N e w t o n permisiunea să retipărească *Principiile* pe cheltuiala și sub îngrijirea sa a fost episcopul R i c h a r d B e n t l e y, profesor la Cambridge și rector la Trinity College. N e w t o n își dădu învoirea, dar tocmai atunci B e n t l e y ajunse în conflict cu universitatea din Cambridge astfel că nu se mai putu ocupa cu această chestiune. Pentru ca totuși apariția cărții să nu se amîne prea mult el îi recomandă lui Newton pe R o g e r C o t e s (1682—1716), profesor la Cambridge.

N e w t o n primi cu plăcere oferta tînărului matematician și-i trimise în 1709 un exemplar adnotat și cuprinzînd adăugirile pe care le credea necesare, încredințînd lui C o t e s facerea corecturilor. C o t e s însă nu s-a mulțumit cu rolul de corector, ci s-a apucat să revadă cu un ochi critic întreaga operă. Refăcînd cu atenție toate calculele și citind șir cu șir cartea, el găsi o seamă de greșeli, asupra cărora atrase atenția lui N e w t o n. Analizînd demonstrațiile cerea incontinuu lămuriri de la N e w t o n, astfel că o vastă corespondență avu loc între ei. După patru ani, în 1713, ediția a II-a apăru revăzută temeinic și completată, cuprinzînd noi descoperiri și experiențe și expunînd mai pe larg unele capitole. Adausurile mai importante sînt menționate în prefețele acestor ediții. Ne putem da seama cît de numeroase sînt aceste adausuri și schimbări din observația următoare a lui W. W. R o u s e B a l l (*An Essay on Newton's Principia.* London, 1893, p. 74): « Posed în manuscris o listă de adausurile și schimbările făcute în ediția a doua ; schimbările sînt foarte numeroase; de fapt am aflat că din cele 494 de pagini ale primei ediții, 397 sînt mai mult sau mai puțin modificate în ediția a II-a. Schimbările mai importante sînt: noua prefață a lui C o t e s, propozițiile asupra rezistenței fluidelor, Cartea a II-a, secțiunea VII, propozițiile 34—40; teoria lunii în Cartea a III-a; propoziția despre precesiunea echinocțiilor, Cartea a III-a, propoziția 39; și propoziția despre teoria cometelor, Cartea a III-a, propozițiile 41 și 42 ».

Unele schimbări mai importante din cele din urmă două ediții față de întîia vor fi menționate în notele ce urmează.

p. 4 *Prefața editorului la ediția a II-a.* La îndemnul lui B e n t l e y, C o t e s nu s-a mulțumit cu revizia din punct de vedere științific a *Principiilor*, ci și-a propus să apere filozofia lui N e w t o n atît împotriva cartezienilor, cît și împotriva atacurilor leibnizienilor. De aceea a cerut lui N e w t o n învoirea de a scrie o prefață, a cărei necesitate o menționează în scrisoarea sa către acesta din 18 februarie 1713: « Cred că ar fi potrivit ca pe lîngă o apreciere a cărții și a îmbunătățirii sale să adăugăm cîte ceva îndeosebi în ce privește felul de filozofare întrebuințat și prin care acesta se deosebește de al lui D e s c a r t e s și al altora, adică demonstrînd mai întîi principiul folosit. Aș dori nu numai să afirm aceasta, ci să o și evidențiez printr-o scurtă deducere a principiului gravitației din fenomenele naturii într-un mod popular ca să poată fi înțeles de cititorii obișnuiți și să poată servi în același timp ca o exemplificare pentru ei a metodei întregii cărți» (*Edleston, Correspondance of Sir Issac Newton and professor Cotes.* London, 1850, pp. 151, 154). El voia deci să combată atît teoria vîrtejurilor lui D e s c a r t e s, cît și să apere teoria gravitației împotriva atacurilor lui L e i b n i z, care-l învinuia pe N e w t o n că reintroduce în filozofie « calitățile oculte » ale lui A r i s t o t e l. C o t e s nu amintește în prefață numele lui L e i b n i z, dar face aluzie la el prin cuvintele « al altora ».

C o t e s își începe prefața comparînd cele trei feluri de a trata fizica: a lui A r i s t o t e l, a lui D e s c a r t e s și a lui N e w t o n, arătînd defectele primelor două și avantajul celei de-a treia. Fizica lui A r i s t o t e l, care nu putu rezista atacurilor decisive ale lui G a l i l e u nu-și mai avea pe timpul lui N e w t o n decît foarte puțini adepți întîrziați. Ea a fost înlocuită pe încetul de fizica lui D e s c a r t e s, care a început să se răspîndească pe continent imediat după ce au apărut *Principia Philosophiae* (1644) ale acestuia. D e s c a r t e s explica mișcarea corpurilor cerești cu ajutorul unui fluid universal, care ocupă întreg spațiul și în

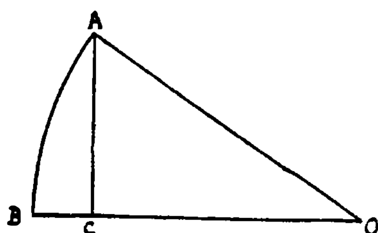
vîrtejurile căruia se rotesc corpurile cerești. Această teorie a vîrtejurilor se preda pe timpul apariției ediției a II-a a *Principiilor* lui Newton și în Anglia. Ea avea avantajul de a fi simplă și intuitivă, fiindcă oricine își poate imagina fără dificultate rotația astrelor în aceste vîrtejuri « la fel ca o corabie fără pînze și fără vîsle». Acestei imagini fizica lui Newton îi opunea concepția contrară că astrele se mișcă în vid susținute de forța gravitațională ce emană de la materie și a cărei cauză nu se cunoaște. Acest fel de a vedea nu putea fi înțeles de majoritatea cititorilor care nu erau familiarizați cu gîndirea matematică abstractă și care se lăsau ușor convinși de leibnizieni că se încearcă introducerea din nou în fizică a calităților oculte. Nu numai Leibniz respingea ideea forțelor de atracție universală, ci și lui Huygens i se părea prea îndrăzneață, scriindu-i în această privință lui Leibniz: « Mă mir că dl. Newton s-a trudit să edifice pe o ipoteză atît de puțin probabilă și de îndrăzneață o întreagă teorie a acțiunilor corpurilor cerești».

Teoria lui Descartes a fost răspîndită îndeosebi prin *Traité de Physique* a lui Rohault, apărută în 1671. Această carte a fost tradusă în latinește de Theophile Bonet și tipărită la Geneva în 1674, apoi la Londra în 1682. Samuel Clarke din Cambridge, « prieten și elev al lui Newton», scoase în 1697 o nouă ediție a cărții lui Rohault, cu titlul *Physica*. Ediția din 1710 a acestei traduceri cuprindea note adiționale în care Clarke explica teoria lui Newton în așa fel că în realitate notele erau o respingere a textului. Sub această formă cartea putea fi utilizată atît de cartesieni care întrebuințau textul lui Rohault, cît și de newtonieni, care foloseau notele lui Clarke. În 1730 a apărut ultima ediție în englezește a cărții lui Clarke.

Se pare că teoria lui Newton cîștigă teren chiar în Anglia numai cu încetul, datorită notelor lui Clarke. O privire clară asupra răspîndirii ideilor lui Newton în Anglia nu se poate avea din cauză că părerile contemporanilor sînt contradictorii. În această privință e interesantă observația lui Voltaire, care a vizitat Anglia în 1727 și care a devenit unul din cei mai mari admiratori și adepți a lui Newton: « Un francez care sosește la Londra găsește o mare schimbare în filozofie, ca și în alte lucruri. El lasă lumea plină și o află goală. La Paris vedeți universul compus din vîrtejuri și materie subtilă, la Londra nu vedem nimic de acest fel». *(Éléments de la philosophie de Newton*, Paris, 1738). În alt loc, același Voltaire scrie însă că deși Newton a mai trăit 40 de ani după apariția *Principiilor*, totuși la moartea sa nu avea în Anglia mai mult de 40 de aderenți. Pe continent teoria lui Descartes s-a menținut pînă pe la mijlocul veacului al XVIII-lea, cînd a fost înlocuită prin teoria lui Newton, astfel că în 1743 D'Alembert putea scrie în celebra *Dinamique* că secta lui Descartes a dispărut complet.

Leibniz, urmînd în această privință pe Descartes, nu admitea nici vidul, nici atracția universală și nici greutatea. În privința vidului el scrie: « Toți aceia care sînt pentru vid, se lasă conduși mai mult de imaginație, decît de rațiune. Cînd eram tînăr eu încă admiteam vidul și atomii, dar rațiunea m-a îndepărtat de ele». În privința atracției universale, îi scrie lui Huygens: « În ce privește cauza pe care Newton o atribuie mareelor, eu sînt tot atît de puțin de acord cu ea ca și cu toate celelalte teorii ale sale. pe care el le stabilește în baza principiului atracției, care mi se pare absurd». Referitor la greutate, Leibniz se exprimă astfel: « Atît mercurul, cît și apa sînt mase de materie grea poroasă prin care pătrunde multă materie fără greutate și care nu rezistă în mod sensibil, cum este în aparență aceea a razelor de lumină și a altor fluide insensibile. . . fiindcă e o ficțiune curioasă a considera totul ca materie grea».

p. 16. Prefața lui Cotes. *Sinus versus*. În principii se întîlnesc cîteva expresii matematice, care azi nu se mai întrebuințează și care nu pot fi traduse textual în romînește, fiindcă terminologia noastră matematică s-a format după ce acestea ieșiseră din uz. Un astfel de termen



este *sinus versus*, care nu are echivalent romînesc şi pe care a trebuit să-l păstrăm în traducere. Se numeşte *sinus versus* partea din raza cercului cuprinsă între arc şi sinusul lui. Fie *OB* raza cercului, *AC* sinusul arcului *AB*; deci *BC* este *sinus versus*-ul. Spre deosebire de acesta raza *BO* se numeşte *sinus totus*. Diferenţa dintre *sinus totus*, adică raza cercului şi sinus versus se numea *sinus complementi*, adică cosinus.

Pentru a nu înmulţi în mod inutil numărul adnotărilor dăm aici o listă a termenilor întrebuinţaţi de Newton împreună cu echivalentul lor modern pe care l-am întrebuinţat în traducere:

duplicata ratio = pătratul raportului;
subduplicata ratio = rădăcina pătrată a raportului;
triplicata ratio = cubul raportului;
ratio dimidiata = raportul rădăcinii pătrate;
subtriplicata ratio = rădăcina cubică a raportului;
quadruplicata ratio = puterea a patra a raportului;
sesquiplicata ratio = puterea 3/2 a raportului;
subsesquiplicata ratio = puterea 2/3 a raportului;
sesquialtera ratio = raportul de 3/2.

reciprociter in subduplicata ratio = în raport invers cu rădăcina pătrată. Termenul *proportio* fiind folosit de Newton în unele cazuri în înţelesul de raport, iar nu de proporţie, l-am tradus în acele cazuri cu acel termen. Pentru expresia *ex aequo perturbata* nu am găsit termen modern corespunzător, de aceea l-am tradus prin expresia *prin înmulţirea celor două proporţii*, care corespunde sensului expresiei latineşti.

Termenii geometrici neuzitaţi azi i-am tradus astfel:

latus rectum = parametru;
latus transversum = latura transversală, adică axa mare a unei conice;
latus quadratum = latura al cărei pătrat, sau rădăcina pătrată;
latus cubicum = latura al cărei cub, sau rădăcina cubică;
latus quadrato-quadratum = rădăcina a patra.

Mai amintim aici că Newton întrebuinţează termenul *trapezum* în sensul lui Euclid (*Elemente*, I, def. 22), înţelegînd prin el orice patrulater care nu este pătrat, dreptunghi, romb sau romboid, deci poate fi trapez sau trapezoid. De asemenea, cuvîntul *bisectoare* este întrebuinţat de Newton uneori în alt sens decît cel de azi, ceea ce de altfel reiese din text.

p. 16. *Natura gravitaţiei.* Din consideraţiile sale asupra gravitaţiei universale, Cotes ajunge la concluzia că « gravitatea aparţine tuturor corpurilor », considerînd-o drept o proprietate generală a corpurilor la fel cu extinderea, mobilitatea şi impenetrabilitatea. În această privinţă Cotes este în dezacord cu Newton, care totdeauna a fost împotriva acestui fel de a vedea. Astfel într-o scrisoare adresată lui Bentley, Newton scrie: « De multe ori vorbiţi despre gravitate ca de ceva esenţial şi inerent materiei. Vă rog să nu-mi atribuiţi această noţiune, deoarece cauza gravităţii este ceva ce eu nu am pretenţia să cunosc, şi deci ar cere mult timp ca să o studiem » (*Works of* Richard Bentley, vol. 3. London, 1838, pp. 210—11). Iar într-o altă scrisoare: « Nu se poate concepe ca materia brută, neînsufleţită să poată, fără mijlocirea a ceva ce nu e material, acţiona şi afecta altă materie fără contact reciproc, cum s-ar întîmpla dacă gravitatea, în sensul lui Epicur, ar fi esenţială şi inerentă ei. Şi aceasta e un motiv pentru care doream să nu-mi atribuiţi o gravitate înnăscută. Faptul

că gravitatea ar fi înnăscută, inerentă și esențială pentru materie, astfel că un corp poate acționa asupra altuia la distanță prin vid, fără mijlocirea unui corp oarecare, asupra căreia și prin care acțiunea și forța sa pot fi transportate de la unul la altul, este pentru mine o absurditate atît de mare, încît eu cred că nici un om, care în chestiuni de materie are o facultate competentă de gîndire, nu poate să o admită. Gravitatea trebuie să fie cauzată de un agent acționînd în mod constant după anumite legi; dar am lăsat la aprecierea cititorilor mei dacă acest agent este material sau imaterial».

De altfel însuși Cotes mai tîrziu și-a dat seama că afirmația sa a fost prea cutezătoare, de aceea într-o scrisoare adresată lui Samuel Clarke, referindu-se la acest pasaj din prefață spune: « În acest pasaj scopul meu nu era să susțin că gravitatea este ceva esențial materiei, ci mai vîrtos să afirm că sîntem ignoranți în ceea ce privește proprietățile fundamentale ale materiei si că în ce privește cunoștințele noastre gravitatea poate pretinde tot atît de bine acest titlu ca și celelalte însușiri pe care le-am amintit. Căci eu prin proprietăți esențiale înțeleg acele însușiri fără de care nu poate exista nici una din celelalte aparținînd aceleiași substanțe; și nu voi încerca să arăt că ar fi imposibil ca vreuna din celelalte proprietăți ale corpurilor să existe fără extindere».

Acțiunea la distanță. Lui Cotes i se atribuie și faimoasa *actio in distans* potrivit căreia un corp acționează asupra altuia, situat la o distanță oarecare de el, direct, fără intervenția vreunui mediu ce s-ar găsi între masele atractive. Este adevărat că în prefața sa Cotes nu vorbește de vreo acțiune la distanță, nici nu spune că spațiul interstelar ar fi vid, dar arată că mișcările planetelor nu pot avea loc decît dacă se elimină materia subtilă a vîrtejurilor lui Descartes. Mai departe afirmă că dacă spațiul dintre stele este plin cu o materie fluidă aceasta nu are inerție, deci cei care admit materia fluidă « prin cuvinte înlătură vidul în realitate îl repun».

În nici un caz ideea acțiunii la distanță nu se poate atribui lui Newton, care în repetate rînduri se declară împotriva ei, ca în scrisoarea menționată mai sus către Bentley. Răspîndirea ideii unei atari acțiuni se datorește în mare parte lui S. Clarke, care în adnotările ultimei ediții a tratatului de fizică a lui Rohault enunță că imensul spațiu interstelar este lipsit de orice fel de materie. Mai tîrziu acțiunea la distanță a fost interpretată și în sensul că acțiunea unui corp asupra altuia, de exemplu atracția sau respingerea, se transmite instantaneu, ceea ce iarăși e contrar felului de a vedea a lui Newton.

În veacul al XVIII-lea, acțiunea la distanță a fost adoptată și în explicarea fenomenelor electrice. Astfel Ch. A. Coulomb admitea că sarcinile electrice se atrag sau se resping printr-o acțiune la distanță. Faraday a ajuns cel dintîi la ideea că această concepție e greșită și că acțiunile electrice și magnetice sînt acțiuni moleculare care se propagă din aproape în aproape între particulele în contact ale unui mediu izolant, pe care el l-a numit dielectric. Maxwell a arătat apoi că această acțiune are loc în timp.

p. 20. *Orbita cea mare.* Copernic în cartea sa *De revolutionibus orbium coelestium*, 1543, Lib. I. Cap. VII, numește orbita Pămîntului în jurul Soarelui «orbita cea mare», nu fiindcă ea ar fi cea mai mare, ci din cauza importanței sale pentru astronomie. În același sens este folosită această numire de Kepler și apoi de Cotes și Newton.

p. 22. *Alfons al X-lea de Castillia* (1226—1284) a fost un protector al științelor și mai ales al astronomiei. La observatorul său de lîngă Toledo a adunat un mare număr de astronomi, în mare parte arabi, care au pregătit *Tablele astronomice* apărute în 1252. Se spune că după ce astronomii i-au explicat sistemul lumii al lui Ptolemeu, găsindu-l prea complicat, s-ar fi exprimat: « Dacă D-zeu mi-ar fi cerut părerea cînd a creat lumea, i-ași fi dat sfaturi

mai bune», ceea ce era cît pe aci să-l facă să-şi piardă tronul. La această exigenţă a lui Alfons face aluzie Cotes, vrînd să spună că însuşi regele Alfons ar fi mulţumit cu sistemul lui Newton.

p. 23. *Rolul lui Bentley.* În scrisoarea sa din 1713 către Newton în privinţa prefeţei sale Cotes aminteşte numai pe cartesieni şi face aluzie la leibnizieni, pe care vrea să-i combată. El nu aminteşte pe materialişti pe care-i atacă mai ales la sfîrşitul prefeţei numindu-i « hoardă impie ». Pentru a înţelege atacul vehement al lui Cotes împotriva materialiştilor e necesar să menţionăm rolul pe care l-a avut Bentley în scoaterea acestei ediţii şi mai ales scopul pe care-l urmărea prin aceasta. Ca om al bisericii Bentley îşi propusese să combată cu argumente ştiinţifice ateismul care se răspîndise în cercurile aristocratice engleze după « revoluţia glorioasă » din 1688. Drept ocazie foarte bună pentru începerea luptei împotriva ateismului a servit testamentul lui R. Boyle, care a lăsat o sumă de 50 de funţi sterlingi preotului care va ţine opt predici « pentru apărarea credinţei creştine împotriva necredincioşilor notorii... fără ca prin aceasta să atingă vreo problemă religioasă discutabilă ». La aceasta s-a angajat Bentley care, pentru a-şi duce la bun sfîrşit misiunea i-a cerut lui Newton argumente pentru a putea dovedi că lumea nu este eternă, ci a fost creată de o fiinţă exterioară care o şi menţine. Acelaşi scop l-a avut în vedere cînd l-a îndemnat să scoată ediţia a doua a *Principiilor* oferind ajutorul material necesar. Lui Bentley nu-i convenea că ediţia întîia a fost editată de ateul Halley şi de aceea nu cruţă nici o jertfă ca ediţia a doua să fie scoasă sub controlul şi directivele sale. De aceea, îi încredinţă lui Cotes revizia cărţii ca să îndepărteze din ea orice urmă de materialism pentru ca ea să se prezinte « ca o cetate fortificată împotriva atacului ateiştilor », astfel ca să nu se poată lua « din alt loc mai bine decît din această tolbă săgeţile împotriva hoardei impii ».

p. 24. *Prefaţa autorului la ediţia a treia. Henry Pemberton* (1694—1771) a fost profesor de medicină la Gresham College în Londra şi membru al Societăţii Regale. Admirator al lui Newton a îngrijit scoaterea ediţiei a III-a a *Principiilor* şi a scris *View of sir Isaac Newton's philosophy,* London, 1728.

James Pound (m.1724) a fost preot la Wansted în Essex şi membru al Societăţii Regale. A făcut observaţii astronomice importante îndeosebi asupra planetelor Jupiter şi Saturn.

Kirch Gottfried (1639—1710) elev al lui Hevelius, a ajuns în 1700 astronom la nou înfiinţata Academie de Ştiinţe din Berlin. În această calitate în 1706 a înfiinţat un observator astronomic unde a făcut observaţii importante. Observaţiile sale asupra cometei din 1680 de care aminteşte Newton, au apărut mai întîi în Germania, apoi în Anglia. Amintim aici numai *Observationes insignis cometae sub finem 1680 visi Coburgi Saxoniae habitae,* lucrare apărută în *Philosophical Transactions* din 1714.

James Bradley (1692—1762), profesor de astronomie la universitatea din Oxford, a ajuns după moartea lui Halley astronom la Greenwich, apoi membru al Societăţii Regale. A fost unul din cei mai de seamă astronomi dela începutul veacului al XVIII-lea. Lui i se datoreşte între altele descoperirea aberaţiei astronomice în 1729 şi o explicaţie a nutaţiei. Este cunoscută de asemenea formula sa empirică pentru corecţia refracţiei.

p. 27. *Definiţii.* În expunerea *Principiilor* Newton foloseşte metoda deductivă sau sintetică deşi modul în care a ajuns la rezultatele cuprinse în ele a fost în primul rînd cel analitic sau inductiv. În această privinţă el adoptă procedeul întrebuinţat de autorul *Elementelor,* care pornind de la definiţii, axiome şi postulate expune elementele geometriei într-o înlănţuire logică riguroasă. De aceea Newton întrebuinţează forma de expunere antică, geometrică neglijînd geometria analitică a lui Descartes, ca şi trigonometria şi calculul fluxiunilor pe care în epoca redactării cărţii sale îl stăpînea pe deplin.

Analogia între *Principiile* lui N e w t o n și *Elementele* lui E u c l i d nu este însă numai formală. În adevăr N e w t o n nu a păstrat numai forma de expunere a lui E u c l i d ci, la fel ca autorul *Elementelor*, a încercat să pună pe aceleași baze solide întreg edificiul mecanicei, cum a făcut Euclid cu geometria. Încercări de a stabili bazele diverselor părți ale fizicii în același fel cu ale geometriei s-au făcut deja în antichitate. Însuși E u c l i d a încercat acest lucru cu optica, dar fără succes. Abia mai tîrziu i-a reușit lui A r c h i m e d e să precizeze legile fundamentale ale staticii după modelul geometric.

În *Principiile* sale N e w t o n face același lucru pentru dinamică. La fel ca E u c l i d și A r c h i m e d e el își începe cartea cu definiții, al căror număr este de opt și în care precizează noțiunile fundamentale ale dinamicei, ca masa, cantitatea de mișcare și diversele feluri de forțe. Acestora le urmează o *scolie*, adică o observație sau comentar privind cele enunțate, în care-și propune să lămurească noțiunile de timp, spațiu și mișcare absolută și relativă Vin apoi cele trei axiome ale mișcării, cunoscute în general sub numirea de legile lui N e w t o n, iar după acestea șase corolare.

La fel ca în cazul *Elementelor* lui E u c l i d, definițiile și axiomele lui N e w t o n au format obiectul unor studii profunde și unele din ele au fost criticate. S-au făcut și încercări de a le înlocui cu altele. Cu toate acestea și azi, după aproape trei secole fenomenele macrocosmice obișnuite sînt studiate tot în baza mecanicii lui N e w t o n.

În ce privește definițiile lui N e w t o n li s-a adus obiecțiunea că nu sînt alese cu destulă grijă, nefiind potrivit să se definească masa cu ajutorul densității, forța prin intermediul acțiunii și să se introducă noțiunea de forță de inerție, care ar fi o noțiune scolastică de prisos. Ne vom ocupa de aceste critici în notele ce urmează.

p. 27. *Definiția I.* Noțiunea de masă diferită de cea de greutate s-a folosit de către unii fizicieni înaintea lui N e w t o n; Amintim aici pe K e p l e r care folosește termenul de *moles* pentru masă, iar pe cel de *pondus* pentru greutate. H u y g e n s discutînd forța centripetă arată că dacă mai multe particule se mișcă pe același cere avînd viteze egale, forțele centripete sînt între ele precum greutățile lor, sau precum cantitățile lor solide, înțelegînd prin cantități solide masele. N e w t o n este însă acela care a definit-o și a precizat-o cel dintîi.

N e w t o n consideră masa ca o mărime determinată de cantitatea de materie a unui corp și o definește cu ajutorul noțiunii de densitate și volum, dar fără să definească nici materia nici densitatea. Prin urmare, pe lîngă folosirea noțiunii geometrice de volum, el introduce două noțiuni fizice noi, pe cea de materie și pe cea de densitate, pe care le consideră drept noțiuni cunoscute.

Referitor la noțiunea de materie A. N. K r î l o v remarcă: «Ce este materia nu se poate defini prin cuvinte; se pot aduce numai exemple că lemnul, fierul, hîrtia pe care scriu cu creionul și altele sînt materie; se pot arăta proprietățile materiei atît de importante pentru chimie ca și pentru fizică, spunînd: se numește materie fiecare din cele 92 de corpuri simple și izotopii lor, sau atomii și moleculele lor și de asemenea orice corp compus sau amestecul unor astfel de corpuri cu corpurile simple sau cu altele compuse» (A. N. Krîlov, *Niuton i ego znacenie mirovoi nauke*, în *Isaac Niuton, pod redakții akademika S. I. Vavilova*, Moscova-Leningrad, 1943 p. 1).

Definiția masei cu ajutorul densității a fost criticată de E. M a c h, care scrie: « În ce privește concepția de masă, observăm că formularea lui N e w t o n, care definește masa ca o cantitate a materiei unui corp, definită de produsul dintre volum și densitate, este nenorocoasă. Deoarece nu putem defini densitatea decît ca masa unității de volum, ne aflăm într-un cerc vicios » (*Die Mechanik in ihrer Entwickelung*, ed. VIII, Leipzig, 1921, p. 188). A. N. K r î l o v observă că din acest cerc vicios « totuși se iese cu ușurință definind densitatea ca un număr abstract, care arată raportul dintre greutatea corpului și greutatea unui volum de apă egal cu al

corpului la temperatura de 4°C. Acest număr se determină prin aşa-numita cîntărire hidrostatică; el nu depinde nici de volumul corpului nici de acceleraţia forţei gravitaţionale şi este o constantă absolută care caracterizează corpul» (loc.cit.).

H. Crew aduce în această privinţă următoarele precizări: « Pe vremea lui Newton densitatea şi greutatea specifică erau întrebuinţate ca sinonime şi densitatea apei era luată în mod arbitrar ca unitate. Cele trei unităţi fundamentale întrebuinţate... erau densitatea, lungimea şi timpul, în loc de masa noastră, lungimea şi timpul. Într-un astfel de sistem este şi natural şi logic admisibil să definim masa în funcţie de densitate» (*The Rise of modern Physics*, Baltimore, 1928, p. 124). Criticii lui Mach i se mai poate răspunde că Newton fiind atomist nu a înţeles prin densitate masa unităţii de volum, ci particulele cuprinse în unitatea de volum. El ştia că dacă un volum de gaz se comprimă la jumătate, masa acestuia rămîne aceeaşi. Prin urmare a tras concluzia naturală că masa unui corp este determinată de numărul de particule care-l compun. Este evident că această definiţie nu ne prezintă masa ca o măsură a inerţiei ca la Descartes: ea este o măsură invariabilă a materiei.

Dar Newton nu numai că defineşte masa, ci ne dă imediat un mijloc experimental de a o măsura, prin greutatea unui corp. El însuşi a făcut măsurări cu ajutorul pendulului şi a aflat că ea este proporţională cu greutatea.

Mach critică definiţia masei dată de Newton şi chiar încearcă să o înlocuiască cu alta. El spune: «Adevărata definiţie a masei poate fi dedusă numai din relaţiile dinamice ale corpurilor», ajungînd la următoarea definiţie: « se numesc corpuri de mase egale, două corpuri care acţionînd unul asupra altuia îşi comunică acceleraţii egale şi opuse». În general, după Mach raportul maselor a două corpuri ce acţionează unul asupra celuilalt este dat de raportul invers al acceleraţiilor reciproce. În acest fel Mach consideră masa numai ca un coeficient al unei ecuaţii, neglijînd multiplele forme în care apare masa.

Această tendinţă de a elimina orice ipoteză prealabilă din definiţia masei a condus la o tendinţă spre formalism. Pe această cale s-a ajuns la definiţia masei cu ajutorul legii a doua a lui Newton ca raportul dintre forţă şi acceleraţie, noţiunea de forţă fiind cunoscută din statică prin mijlocirea greutăţii. În această definiţie masa nu mai poate fi interpretată ca o cantitate de materie primind o semnificare energetică. În teoria relativităţii această masă energetică nu mai rămîne constantă ca masa lui Newton, ci inerţia ei creşte cu viteza corpului ajungînd la valoarea infinită cînd viteza acestuia se apropie de viteza luminii.

Mai amintim că Newton consideră masa sub două aspecte: atît ca un conglomerat de particule materiale ce opun o rezistenţă schimbării stării de mişcare *(masa de inerţie)*, cît şi ca un număr de particule ce exercită o forţă asupra corpurilor vecine *(masa atractivă)*.

În *Principii* se întrebuinţează adesea cuvîntul *corp* în sensul de *masă*, iar termenul de *loc* în înţelesul de *poziţie*.

p. 27. *Definiţia II.* Definiţia cantităţii de mişcare este aceeaşi ca la Descartes. În plus Newton menţionează proprietatea aditivă a acesteia, ceea ce neglijează în cazul masei.

p. 27. *Definiţia III. Forţa ce rezidă în materie* este *forţa de inerţie.* Inerţia este proprietatea fundamentală a materiei şi o mărime ce nu are inerţie nu este materie, în sensul lui Newton. Această definiţie scoate în evidenţă noţiunea de masă ca o măsură a inerţiei.

p. 26. *Definiţia IV.* Newton defineşte aici forţa în mod dinamic considerînd ca dată definiţia statică cunoscută din antichitate sub forma de presiune sau tensiune. Cele două definiţii se pot pune de acord prin mijlocirea principiului inerţiei şi a legii a doua a lui Newton.

Față de definiția newtoniană definiția metafizică a lui L e i b n i z, nu prezintă nici un progres, dimpotrivă aceasta din urmă înseamnă un pas înapoi spre fizica peripateticiană: « Prin forță sau putință (potentia) eu nu înțeleg posibilitatea sau simpla proprietate, care nu e decît posibilitatea de a acționa imediat, și ea însăși e ceva mort, ci înțeleg prin ea un lucru intermediar între putință și acțiune, care cuprinde în sine o tendință, un act, o entelechie, fiindcă forța trece de la sine în acțiune dacă nu o împiedică nimic» (L e i b n i z, *Philosophische Schriften*, herausgeben von Gerhardt, Bd. IV, Berlin, 1880, p. 472).

Urmînd întru cîtva pe L e i b n i z, L a g r a n g e dă o definiție mai clară a forței, îndicînd și felul cum trebuie măsurată: « În general se înțelege prin forță sau putință (puissance) cauza, oricare ar fi ea, care imprimă sau tinde să imprime mișcare corpului la care e presupusă aplicată; și de asemenea forța sau putința trebuie evaluată prin cantitatea de mișcare imprimată. În starea de echilibru forța nu are efect actual; ea nu produce decît o simplă tendință spre mișcare, dar trebuie totdeauna măsurată prin efectul pe care l-ar produce dacă nu ar fi oprită» (*Mécanique analytique*, Paris, 1788, t.I, Première partie, Section I).

p. 30. *Scolie.* În scolia ce urmează după definiții N e w t o n explică sensul ce-l atribuie noțiunilor de timp, spațiu, loc, și mișcare, pe care le împarte în absolute și relative. Aceste noțiuni au fost obiectul de cercetare nu numai al fizicienilor ci și al filozofilor, atît înainte cît și după N e w t o n. Definițiile date de N e w t o n au fost analizate îndeosebi în epoca mai nouă și au condus la concepția modernă despre spațiu și timp.

N e w t o n consideră spațiul și timpul ca fiind obiective, punîndu-se în această privință pe poziție materialistă. Împrumutînd însă de la G a s s e n d i concepția de spațiu absolut separat de materie și pe cea de timp absolut independent de materie dă acestor categorii caracter metafizic. Plecînd de la faptul că orice mișcare (mecanică) este o schimbare continuă a poziției, care nu poate avea loc decît într-un timp ce variază și el în mod continuu, N e w t o n concepe spațiul absolut ca un mediu imaterial, invariabil, imobil și invizibil, iar timpul ca ceva ce se scurge în mod continuu. E u l e r a remarcat dificultățile ce le întîmpină aceste definiții, totuși ele au fost acceptate de materialiștii francezi din veacul al XVIII-lea, ca și de majoritatea fizicienilor din acea epocă. Astfel L a p l a c e concepe spațiul în felul următor: « Să ne imaginăm un spațiu nelimitat, imobil și penetrabil pentru materie; față de părțile acestui spațiu real sau ideal raportăm prin gînd poziția corpurilor» (*Mécanique céleste*, Paris, 1805, vol. IV).

K a n t se ridică împotriva ideilor materialiste despre spațiu și timp considerîndu-le ca forme ale cunoașterii cărora nu li se atribuie decît o realitate transcendentă. El considera aceste categorii ca anterioare și independente de experiență, deci ca noțiuni date *a priori.*

Un progres important pentru dezvoltarea ideilor materialiste asupra spațiului și timpului reprezintă geometria neeuclidiană a lui B o l y a i și L o b a c e v s k i. Mai ales savantul rus a legat proprietățile geometrice ale spațiului de cele fizice ale materiei. L o b a c e v s k i nu numai că a combătut concepțiile idealiste ale lui K a n t, ci a infirmat și ideile metafizice ale geometriei euclidiene și mecanicii newtoniene despre spațiu și timp. În acest fel s-a pregătit calea spre concepția modernă materialist-dialectică despre spațiu și timp, potrivit căreia spațiul și timpul sînt formele de bază ale existenței materiei. Nu există timp și spațiu separate de materie; spațiul și timpul deosebit de materie sînt o abstracție goală.

În strînsă legătură cu problema spațiului și timpului este cea a mișcării absolute și relative.

Încă în antichitate școala din Elea (Parmenide, Zenon etc.) și-a pus problema studierii noțiunii de mișcare în sine. După cum observă E n r i q u e s (*La relativita del movimento nell' antica Grecia*, în *Periodica di matematiche*, serie IV, vol. I, No. 2, 1912), negarea existenței mișcării de către eleați, care susțineau că o săgeată nu se mișcă în aer, nu este altceva decît o afirmare a relativității mișcării. Pe de altă parte, atomiștii (L e u c i p, D e m o c r i t din Abdera) susțineau existența unei mișcări absolute față de vid.

În evul mediu problema mişcării absolute şi relative a fost reluată de Nicolaus de Cusa, care referă mişcarea la sferă stelelor fixe, şi de Osiander care în prefaţa cărţii lui Copernic *De revolutionibus orbium coelestium*, 1543, afirmă că teoria lui Copernic e o pură ipoteză matematică ce ilustrează relativitatea geometrică a mişcării. Mai tîrziu Galileu revine la concepţia lui Democrit admiţînd mişcarea absolută faţă de vid. Existenţa vidului este fundamentală pentru legea inerţiei fiindcă mişcarea uniformă şi în linie dreaptă pentru un sistem apare curbă în general referită la alt sistem de corpuri. Relativitatea mişcării e susţinută mai ales de către Descartes, care neagă existenţa vidului. El consideră mişcarea drept o variaţie relativă a distanţei dintre două corpuri.

Newton scoate în evidenţă deosebirea dintre mişcarea de translaţie şi cea de rotaţie. La fel ca Galileu el recunoaşte relativitatea mişcării de translaţie susţinînd că mişcarea absolută de translaţie nu cade sub simţurile noastre şi nici nu poate fi determinată din mişcarea relativă. Newton crede însă că se poate determina mişcarea absolută a corpurilor în rotaţie. El consideră două sfere legate una de cealaltă cu o sfoară, care se învîrtesc în jurul centrului lor comun de greutate. Din tensiunea firului se poate afla « atît cantitatea, cît şi direcţia acestei mişcări circulare în orice spaţiu gol imens cînd nu se află nimic extern sau sensibil la care să se refere mişcarea sferelor ». Newtonienii au conchis de aici că mişcarea de rotaţie fiind absolută, Newton a fost condus să deducă relativitatea spaţiului, fiindcă altfel acesta ar avea o structură dublă, anume relativă pentru mişcarea rectilinie, şi absolută pentru mişcarea de rotaţie.

Controversa în jurul mişcării absolute şi relative s-a continuat şi după apariţia *Principiilor*. Referitor la această chestiune a avut loc o vastă corespondenţă între Huygens şi Leibniz, începută în 1694. Huygens admite de la început numai mişcarea relativă ca reală, pe cînd Leibniz mai întîi se pare că admite mişcarea absolută şi abia mai tîrziu îşi modifică părerea. În tot cazul, în scrisoarea sa către Clarke, din 1715, Leibniz se ridică împotriva spaţiului şi a mişcării absolute; în baza principiului stabilit de el al raţiunii suficiente: « Spaţiul este ceva absolut uniform şi fără lucrurile ce se găsesc în el un punct al spaţiului nu diferă de altul. De aici urmează că, admiţînd că spaţiul este în sine însuşi ceva dincolo de ordinea lucrurilor între ele, nu poate exista o cauză pentru care Dumnezeu, păstrînd poziţiile reciproce ale corpurilor, să fi aşezat corpurile în spaţiu într-un anumit mod şi nu altfel, şi pentru care toate acestea nu s-au făcut invers, de exemplu, ca un schimb de la răsărit la apus. Dar dacă spaţiul nu e altceva decît această ordine sau raport şi propriu-zis nu e nimic fără corpuri, decît posibilitatea ca corpurile să fie situate, cele două stări, una care există şi cealaltă presupusă inversată, nu diferă de loc între ele ».

Ideile lui Newton despre mişcarea absolută au fost însuşite îndeosebi de Euler, care acceptă drept axiomă că « orice corp, chiar în lipsa altor corpuri, se află fie în repaus fie în mişcare, adică în repaus absolut şi în mişcare absolută » (*Teoria motus corporum solidorum*, Cap. I). De asemenea el postulează spaţiul absolut: « Cine neagă spaţiul absolut ajunge în mare încurcătură. Deoarece el se simte constrîns să abandoneze repausul şi mişcarea absolută ca o vorbă deşartă fără înţeles, nu e numai forţat să părăsească legile mişcării, dar chiar să afirme că nu există nici un fel de legi ale mişcării».

Kant merge şi mai departe şi încearcă să arate că trebuie să existe undeva în univers un corp central, al cărui centru de greutate este punctul cardinal de referinţă al mişcării tuturor corpurilor: « Dacă în spaţiul infinit, în care s-au format toţi Sorii din Calea Laptelui, luăm un punct, în jurul căruia, nu ştiu din ce cauză, s-a început formarea naturii din haos, acolo va trebui să se formeze masa cea mai mare şi un corp de o atracţie enormă, care prin aceasta e în stare să silească toate sistemele în formaţie pe o sferă imensă din jurul său, să cadă spre el ca spre un centru, şi să creeze în jurul său exact acelaşi sistem, după cum a

făcut în mic aceeaşi substanţă elementară, care a format planetele în jurul Soarelui» (*Naturgeschichte des Himmels*).

Ideea că ar fi posibilă punerea în evidenţă a mişcării absolute de rotaţie a dus la experienţa pendulului lui Foucault (1850), considerată de contemporani ca o demonstraţie a rotaţiei absolute a pămîntului. Abia mai tîrziu E. Mach a arătat că această experienţă nu relevă decît mişcarea relativă faţă de stelele fixe, iar nu faţă de vid.

Către sfîrşitul veacului al XIX-lea problema fixării unui sistem de referinţe al mecanicii deveni acută. Reech enunţă că legea inerţiei nu e nici principiu, nici nu provine din experienţă ci e pur şi simplu o convenţie. El voieşte să pună bazele unei statici relativiste « fără ca să trebuiască vreodată invocată nici ipoteza rigidităţii corpurilor, nici aceea a unei stări absolute de mişcare rectilinie uniformă în spaţiu» (*Cours de Mécanique*, 1852). Mai tîrziu J. M. C. Duhamel se exprimă astfel: « Mişcarea absolută admisă în general pînă aici este o pură himeră, fondată pe o altă himeră, aceea a unui spaţiu etern şi absolut, care face din timp o fiinţă eternă independentă de orice creaţie» (*Méthodes dans les sciences de raisonnement*, Paris, 1870, IV, p. 454).

Aproape în acelaşi timp C. Neumann relevă că principiul inerţiei pretinde existenţa unui corp absolut rigid situat într-un loc bine determinat şi invariabil, faţă de centrul căruia trebuie să referim toate mişcările: « fie-mi permis să numesc acest corp pe scurt corpul alfa. Ar trebui apoi să adăugăm că prin mişcarea unui corp nu înţelegem schimbarea locului său faţă de pămînt sau soare, ci variaţia poziţiei sale faţă de acel corp alfa» (*Über die Prinzipien der Galilei-Newton'schen Theorie*, Leipzig, 1870).

E. Mach în cartea sa *Die Mechanik in ihrer Entwickelung, historisch-kritisch dargestellt*, 1883, supune unei critici severe noţiunea de mişcare şi ajunge la concluzia că întocmai după cum nu putem deosebi mişcarea de translaţie absolută de cea relativă, la fel nu putem face distincţie între mişcarea de rotaţie absolută şi cea relativă: « O rotaţie relativă faţă de stelele fixe dă naştere într-un corp la forţe de îndepărtare de la axă. Dacă rotaţia nu e relativă faţă de stelele fixe, aceste forţe de îndepărtare nu există ».

La sfîrşitul veacului trecut problema mişcării relative şi absolute ajunse într-o fază decisivă, devenind dintr-o problemă de mecanică una generală de fizică. Pe deoparte experienţele lui Faraday au arătat că fenomenele de inducţie electromagnetică nu pot fi explicate decît considerînd mişcarea ca relativă, pe de altă parte căutarea unui corp alfa a dus la ideea de a considera drept un astfel de corp eterul material al lui Newton, Huygens şi Hooke, prin care se propagă lumina, sau eterul nematerial al lui J. C. Maxwell şi H. R. Hertz, prin care se propagă toate fenomenele electromagnetice. Unii fizicieni considerau eterul ca fiind în repaus, Pămîntul şi corpurile cereşti deplasîndu-se prin el fără să-l antreneze, pe cînd alţii, ca G. Stokes susţineau că el este antrenat de corpurile cereşti la fel ca apa prin care pluteşte un vapor. Experienţa trebuia să decidă care din aceste două păreri e justă. În adevăr dacă Pămîntul nu duce cu sine eterul, trebuie să se poată constata existenţa unui *vînt eteric*. Experienţa a fost făcută la Cleveland (Ohio) de către Michelson şi Morley în 1887, cu ajutorul interferometrului. Rezultatul experienţei a fost că nu se poate observa nici un fel de vînt eteric, prin urmare dacă eterul există, el este antrenat de Pămînt în mişcarea sa. Acest rezultat negativ a fost considerat ca nesatisfăcător de lumea ştiinţifică de atunci, fiindcă admiţînd eterul în mişcare nu se poate explica fenomenul aberaţiei luminii descoperit de Bradley în 1725. Totuşi experienţa lui Michelson-Morley era atît de precisă, încît rezultatul ei nu se putea nega.

Pentru a explica rezultatul negativ al experienţei lui Michelson şi Morley în 1895, Fitzgerald din Dublin şi independent de el H. A. Lorentz din Leida au emis ipoteza că un corp ce se află în mişcare de translaţie se contractă în direcţia mişcării sale. Utilizînd această idee Albert Einstein pune bazele relativităţii restrînse, negînd existenţa eterului

ca o ipoteză de prisos, precum şi mişcarea absolută ca neavînd bază experimentală. Teoria lui Einstein pleacă de la două axiome. Întîia este că viteza luminii în vid este constantă şi independentă de starea de mişcare a sursei. A doua, care exprimă propriu-zis principiul relativităţii restrînse, se poate exprima astfel: dacă un sistem de referinţă se mişcă faţă de un altul cu o mişcare rectilinie şi uniformă, fenomenele fizice au loc în ambele sisteme după aceleaşi legi. În această teorie însă fiecare sistem îşi are timpul său, deci timpul este relativ, iar nu absolut cum îl credea Newton. Relaţiile dintre distanţele şi timpurile unui sistem de referinţe faţă de un altul ce se mişcă cu o mişcare relativă, rectilinie şi uniformă sînt date de formulele cunoscute sub numirea de transformaţiile lui Lorentz.

p. 37. *Legea I.* Enunţul legii I a mişcării nu este exact acelaşi în toate trei ediţiile lui Newton ale *Principiilor.* În ediţia întîia (1687) şi a doua (1713) enunţul e următorul:

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

În ediţia a treia (1726) enunţul e acesta:

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Această lege, numită de obicei legea inerţiei a fost formulată mai întîi de Galileu în celebrele sale cărţi *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo,* Firenze, 1632, şi *Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* Leida, 1638; în cazul mişcării corpurilor de pe Pămînt, apoi în formă generală şi abstractă de către Descartes în *Principia Philosophiae,* Amsterdam, 1644. Ea a fost generalizată pentru mecanica cerească de către Newton şi enunţată, la fel ca celelalte două, sub o formă foarte precisă şi prudentă. El nu putea să-i dea decît o formulare relativă, fiindcă starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă sînt respectiv în funcţie de starea de mişcare a sistemului de referinţă. Prin urmare legea inerţiei nu e valabilă în mod riguros decît pentru un sistem de referinţă în repaus absolut. Un astfel de sistem însă nu există, fiindcă nici un corp din natură nu se găseşte în repaus absolut. Din acest motiv legea inerţiei a dat loc la multe discuţii.

A. Einstein supunînd acest principiu unei critici profunde se exprimă în felul următor asupra valabilităţii lui: «După cum ştim legea fundamentală a mecanicii lui Galileu-Newton cunoscută sub numirea de legea inerţiei se exprimă astfel: un corp destul de îndepărtat de alte corpuri persevereează în starea sa de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă. Această lege ne lămureşte nu numai asupra mişcării corpurilor, ci şi asupra corpurilor de referinţă sau a sistemelor de coordonate admisibile în mecanică, ce pot fi întrebuinţate în descrierile mecanice. Corpuri, asupra cărora legea inerţiei poate fi aplicată cu mare aproximaţie sînt stelele fixe vizibile. Dacă folosim un sistem de axe de coordonate legat de pămînt, orice stea fixă descrie faţă de el în decursul unei zile (siderale) un cerc de o rază enormă, în contrazicere cu enunţul legii inerţiei. Dacă admitem această lege, trebuie să referim mişcările numai la sisteme de coordonate faţă de care stelele fixe nu efectuează mişcări de rotaţie. Un sistem de coordonate, a cărui stare de mişcare este astfel, încît faţă de el e valabilă legea inerţiei îl numim sistem de coordonate galilean. Numai pentru un sistem de coordonate galilean sînt valabile legile mecanicei lui Galileu-Newton» (*Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie.* Gemeinverständlich, 1921, ed. 13, p. 7).

Newton admitea că mişcarea accelerată absolută poate fi constatată cu ajutorul forţelor de inerţie. Enunţul legii inerţiei ar avea deci valabilitate absolută dacă s-ar putea constata mişcarea absolută a unui sistem accelerat. Potrivit teoriei relativităţii generale acest lucru e imposibil, fiindcă toate sistemele de referinţă indiferent de starea lor de mişcare sînt echivalente, pentru formularea legilor naturii. Pentru formularea legii inerţiei în această teorie trebuie să înlocuim spaţiul tridimensional al lui Euclid cu un spaţiu-timp cu patru dimen-

siuni care este curbat de masele pe care le conține. Într-un astfel de spațiu neeuclidian un punct material descrie o *linie geodezică* prin care se înțelege linia cea mai scurtă între două puncte din acest spațiu.

p. 37. *Legea II.* Enunțul legii a doua este același în toate trei edițiile *Principiilor:*

Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

E de observat că aici prin «motus», Newton nu înțelege mișcarea, ci cantitatea de mișcare, deci forța f este definită ca variația cantității de mișcare, adică a produsului dintre masa m și viteza v. Fiindcă în concepția lui Newton masa rămîne neschimbată, avem formula de definiție a forței $f = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma$, unde a este accelerația. Remarcăm însă că în cazul masei variabile chiar definiția lui Newton $f = \frac{d}{dt}(mv)$ rămîne valabilă.

Formularea limpede și precisă a principiilor dinamicei de către Newton constituie încoronarea nenumăratelor sforțări făcute de-a lungul veacurilor pentru a explica, plecînd de la legi simple, fenomenele complicate ale mișcării corpurilor. În antichitate aceste sforțări sînt sintetizate în doctrina lui Aristotel care poate fi rezumată astfel:

1. Pentru ca un corp să poată fi menținut în stare de mișcare este necesar ca asupra lui să acționeze în permanență o forță. Dacă forța este constantă mișcarea corpului va fi uniformă.

2. Forța ce acționează asupra unui corp este proporțională cu viteza acestuia.

Ideile lui Aristotel s-au menținut în evul mediu, făcîndu-li-se unele corectări. Astfel prin mecanica lui Aristotel era greu de explicat cum își păstrează un proiectil în aer starea de mișcare. În acest scop prin veacul al IV-lea s-a admis ipoteza că forța cu care lansăm proiectilul comunică acestuia un «impuls» *(impetus)* care întreține mișcarea pînă ce acesta se consumă complet.

O idee vagă despre principiul inerției aflăm abia la Nicolaus de Cusa care admite că o sferă perfect netedă aruncată de-a lungul unui plan orizontal de asemenea neted își continuă mișcarea pînă la infinit, apoi la Kepler, care concepe inerția ca o tendință a materiei de a-și păstra starea de repaus.

Galileu a enunțat cel dintîi primele două legi ale mișcării, în cazul particular al corpurilor grele. El ajunge la principiul inerției observînd că o sferă ce cade fără frecare pe un plan înclinat se urcă pe un alt plan înclinat pînă la aceeași înălțime. De aici trage concluzia că pe un plan orizontal sfera s-ar mișca la infinit. De asemenea enunță că un proiectil, dacă ar putea fi sustras acțiunii greutății, și-ar continua mișcarea în linie dreaptă la infinit. Tot el definește forța drept o cauză a accelerației, înțelegînd prin forță greutatea. Descartes a enunțat legea întîia, dar a doua era pentru el neclară.

Meritul lui Newton este că a generalizat enunțurile lui Galileu și a considerat drept forță care produce accelerație nu numai greutatea, ci orice cauză care schimbă starea de mișcare a unui corp producînd accelerație, cum ar fi atracția planetelor de către Soare și între ele, forțele electrice, magnetice etc. În definiția ce o dă Newton forțele se măsoară prin accelerația pe care o produc. Raportul dintre forța și accelerația unui corp este *masa de inerție* a corpului. Spre deosebire de aceasta raportul dintre greutatea corpului și accelerația lui în cădere liberă se numește *masa gravitațională* a acestuia. Experiența a arătat că masa de inerție și cea gravitațională sînt proporționale între ele.

Mach critică formularea primelor două legi ale lui Newton obiectînd că cea dintîi este cuprinsă în a doua. În adevăr din formula $f = m\frac{dv}{dt} = ma$ rezultă că dacă $f = 0$,

atunci şi $m \frac{dv}{dt} = a = 0$, deci corpul asupra căruia nu acţionează nici o forţă urmează legea inerţiei. Critica lui Mach însă este neîntemeiată fiindcă, după cum observă Enriques: « pentru a înţelege adevăratul spirit al construcţiei newtoniene, trebuie să admitem că legea a doua avea pentru el un sens imediat, exprimînd o relaţie între trei concepţii definite în mod independent: forţa, masa şi acceleraţia, şi că numai în dezvoltarea ulterioară a doctrinei acest sens se poate extinde în parte în mod convenţional, potrivit principiului *conservării proprietăţilor formale*, pe care Hankel l-a enunţat ca un criteriu regulator al progresului gîndirii matematice » (I. Newton, *Principii di filosofia naturale*, Roma, 1925, p. 173).

Acad. S. I. Vavilov (*Isaac Newton*, traducere, Editura de stat, 1947, p. 164) face observaţia că în formularea legilor mişcării nu intră în mod evident noţiunea de masă. În adevăr, legea a doua spune că variaţia cantităţii de mişcare este proporţională cu forţa, adică $\frac{d(mv)}{dt} = f$, ceea ce e scris sub forma $d(mv) = f dt$. În aceste expresii, variaţia cantităţii de mişcare reprezintă variaţia unei mărimi independente egale cu impulsul forţei. Dacă folosim legea a doua pentru definiţia masei, noţiunea de masă se poate generaliza.

În adevăr, experienţele lui Lebedev au arătat în mod neîndoielnic că lumina exercită o presiune asupra corpurilor pe care cade, deci produce asupra lor un impuls. Presiunea exercitată de lumină pe un cm² al unui ecran absolut negru va fi ε/c^2, unde ε este energia luminoasă pe această suprafaţă într-o secundă, iar c viteza luminii. Potrivit legii a doua acest impuls este egal cu variaţia cantităţii de mişcare $d(mv)$. În cazul luminii ce cade pe ecran viteza ei iniţială este c, iar cea finală este zero, fiindcă lumina este oprită de ecranul care o absoarbe. În consecinţă, avem relaţia $d(mv) = mc - m_0 = \frac{\varepsilon}{c^2}$, de unde masa luminii este dată de formula

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2}.$$

În felul acesta sîntem conduşi să atribuim luminii masă. Dacă atribuim la fel masă oricărei forme de energie, îndeosebi energiei cinetice, putem arăta că masa m a unui corp ce se mişcă cu viteza v e diferită de masa m_0 a corpului în repaus, relaţia dintre ele fiind

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Vavilov continuă astfel: « Masa devine o mărime relativă, întrucît noi nu putem în nici un caz să spunem cu certitudine ce înseamnă viteza absolută v. Aceste concluzii deduse din a doua lege a lui Newton, înfăţişată într-o formă generală, coincid cu concluziile teoriei relativităţii a lui Einstein. Din acest punct de vedere se poate spune că legea îşi păstrează valabilitatea şi în « noua mecanică » a teoriei relativităţii. Dacă presupunem însă de la început că m nu depinde de viteză, ceea ce putem afirma pe baza experienţei cel puţin pentru mişcările mecanice, care au viteze mici, atunci ecuaţia se transformă într-o formă obişnuită » (op. cit., p. 166).

În ce priveşte punerea de acord a forţei statice considerată de Newton ca primitivă şi a celei dinamice introdusă de el, Enriques (*I. Newton, Principii di filosofia naturale*, p. 174) face următoarele consideraţii. Considerînd forţa ca o presiune sau tensiune « legea a doua capătă o semnificaţie numai referitor la mişcarea începătoare, comparînd forţa exercitată asupra unui punct legat cu acceleraţia pe care o primeşte cînd această legătură se rupe: în adevăr nu se poate măsura forţa în mod static atunci cînd ea acţionează asupra unui corp în mişcare. Dar luînd legea astfel în înţeles restrîns, ea nu exprimă însă ceea ce trebuie

postulat în ştiinţa generală a mişcării; dar e uşor de văzut că adăugînd principiul inerţiei şi postulînd în mod implicit compunerea mişcărilor, ansamblul celor două legi primeşte tocmai acea semnificaţie largă ce rezultă din întrebuinţarea pe care i-o dă Newton. În acest scop trebuie să avem în vedere că teoria lui Newton e dominată de consideraţia forţelor de poziţie, adică independente de viteză: cu alte cuvinte se foloseşte noţiunea de cîmp de forţe, în care forţa ce acţionează asupra unui punct determinat se poate măsura ca o tensiune sau presiune exercitată asupra unităţii de masă, ce vrea să rămînă imobilă în acel punct. De aceea credem că cele două legi ale lui Newton se pot explica astfel: fiind dat un cîmp de forţe, să considerăm un punct material ce se mişcă în el; dacă forţele sînt nule mişcarea este rectilinie şi uniformă, altfel la viteza de inerţie se adaugă în orice poziţie P acea viteză infinitezimală pe care i-ar comunica-o forţa ce acţionează în P, plecînd de la o stare iniţială de repaus (şi aceasta natural în sens vectorial, potrivit legii de compunere a lui Galileu)». Enriques tinde să descopere în felul cum întrebuinţează Newton primele două legi ca implicit un principiu de inerţie generalizat, care s-ar releva şi în gîndirea lui Galileu, la baza descoperirii principiului inerţiei.

Lagrange (*Mécanique analytique*, t.1, p. 245) face legătura între forţa măsurată cu ajutorul cantităţii de mişcare, cînd ea acţionează în timp, şi între măsura forţei dată de legea a doua, prin următorul raţionament. Deoarece cantitatea de mişcare mv exprimă forţa finită a corpului de masă m în mişcare cu viteza v, la fel produsul masei cu acceleraţia exprimă forţa elementară sau născîndă. Aceasta din urmă ca măsură a sforţării pe care corpul poate să o facă datorită vitezei elementare pe care a luat-o sau tinde să o ia, constituie presiunea; pe cînd dacă o considerăm drept o măsură a forţei sau putinţei capabile să imprime această viteză, ea constituie forţa motoare.

p. 37. *Legea III.* Formularea legii a treia, numită şi principiul acţiunii şi reacţiunii, este aceeaşi în cele trei ediţii:

Lex III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Legea a treia este dedusă din experienţă şi constituie generalizarea observaţiilor şi intuiţiilor lui Descartes şi Huygens în cazurile particulare ale ciocnirii şi forţei centrifuge născute prin învîrtirea în jurul unui centru a unui corp greu legat de o sfoară. Principiul a fost formulat pentru întîia oară sub forma generală şi în mod clar mai întîi în *Principii* de către Newton.

Referitor la principiul acţiunii şi reacţiunii Newton dă următoarea lămurire în scrisoarea sa către Cotes în legătură cu ediţia a doua a *Principiilor:* « Dacă un corp oarecare ar putea atrage un alt corp situat în apropiere, dar el însuşi n-ar fi atras cu aceeaşi forţă de către acesta din urmă, atunci corpul care atrage mai puţin ar fi împins de celălalt înaintea lui şi amîndouă ar începe să se mişte cu acceleraţie *ad infinitum*, ceea ce contrazice legea întîia a mişcării ».

Mach apreciază astfel importanţa acestei legi: « Poate contribuţia cea mai importantă a lui Newton privitoare la principii este egalitatea acţiunii şi reacţiunii, a presiunii şi contrapresiunii. Problemele privitoare la mişcarea corpurilor care se influenţează reciproc nu se pot rezolva numai cu ajutorul principiilor lui Galileu. E necesar un nou principiu care determină tocmai acţiunea reciprocă » (loc. cit.).

p. 38. *Corolar I.* Principiul paralelogramului forţelor de asemenea a fost formulat mai întîi în mod clar de către Newton, ca o consecinţă a legilor mişcării, în termenii următori:

Corollarium I. Corpus viribus conjunctis diagonales parallelogrami eodem tempore describere, quo latera separatis.

În traducerea noastră am folosit pentru « *viribus conjunctis* » expresia « sub acţiunea a două forţe unite », mai potrivită cu spiritul limbii romîneşti.

Antichitatea cunoştea principiul compunerii vitezelor. Astfel în *Quaestiones mechanicae*, atribuite lui Aristotel întîlnim această lege enunţată precis în felul următor: « Dacă un mobil se mişcă în acelaşi timp cu două mişcări în aşa fel că spaţiile parcurse în acelaşi timp sînt într-un raport invariabil, mobilul se mişcă în linie dreaptă după diagonala paralelogramului care are drept laturi două linii ale căror lungimi sînt în acest raport ». Dar potrivit axiomei dinamicei lui Aristotel o forţă constantă produce o mişcare uniformă şi viteza unei astfel de mişcări e proporţională cu forţa, prin urmare a cunoaşte legea compunerii vitezelor însemna a cunoaşte legea compunerii forţelor.

Mai tîrziu Leonardo da Vinci, Stevinus şi Roberval au încercat să demonstreze această lege static, considerînd dinamica peripateticiană ca nesatisfăcătoare. În acelaşi timp cu Newton au enunţat principiul paralelogramului forţelor Pierre Varignon şi Lamy. Întîiul enunţă principiul într-o lucrare intitulată *Nouvelle Mécanique ou Statique*, apărută după moartea autorului, în 1725, sub forma unei teoreme ce se poate enunţa astfel: *Momentul rezultantei a două forţe faţă de un punct oarecare luat în planul lor comun este egal cu suma algebrică a momentelor componentelor.* P. Lamy şi-a exprimat ideile într-o scrisoare adresată în 1687 « à Monsieur de Dieulamant, Ingénieur du Roy, à Grenoble ».

Comparînd raţionamentele prin care au ajuns Newton, Lamy şi Varignon la formularea legii paralelogramului forţelor, P. Duhem scrie: « Varignon obţine legea paralelogramului forţelor prin mijlocirea legii compunerii vitezelor şi a acestei axiome: o forţă este dirijată după viteza mişcării pe care o produce; ea este proporţională cu această viteză. Newton şi P. Lamy, dimpotrivă, se folosesc de regula compunerii acceleraţiilor şi a postulatului următor: acceleraţia unui mobil este dirijată după forţa care-l solicită şi e proporţională cu această forţă. Dintre aceste două principii pe întîiul îl considerăm ca o eroare gravă, pe al doilea ca un adevăr esenţial» (*Les origines de la Statique*, Paris, 1906, tome II, p. 260).

Principiul paralelogramului forţelor are un caracter experimental atît în forma dată de Varignon, cît şi în acea a lui Lamy şi Newton. Totuşi mai tîrziu Daniel Bernoulli a încercat să-i dea o demonstraţie geometrică, considerîndu-l ca un adevăr geometric independent de orice experienţă fizică. Demonstraţia lui Bernoulli a fost studiată şi criticată de Mach (l.c., p. 39).

p. 42. *Scolie.* La sfîrşitul capitolului care tratează despre axiomele sau legile mişcării Newton a pus o scolie, în care se ocupă cu verificarea experimentală a acestor legi. Ca exemplu convingător aduce mai întîi legile căderii corpurilor aflate de Galileu, care verifică primele două legi şi principiul şi corolarele ce se ocupă cu paralelogramul forţelor. Dar în timp ce în ediţia întîia a *Principiilor* abia atinge această chestiune într-o singură propoziţie, în ediţia a treia îi dă o dezvoltare mai largă. Aceleaşi legi şi corolare ne dau şi perioada de oscilaţie a pendulului, verificată zilnic de orologiu.

Legea a treia este verificată de experienţele asupra ciocnirii corpurilor făcute în mod independent unul de altul de Wallis, Wren şi Huygens, pe care-i menţionează Newton.

Studiul sistematic al legilor ciocnirii se datoreşte îndemnului dat de Societatea Regală care în 1668 a instituit un premiu pentru cele mai bune lucrări privitoare la acest fenomen. Dintre lucrările primite au fost premiate cele ale lui Wallis, Wren şi Huygens şi au fost publicate în *Philosophical Transactions* din 1669. Wallis nu s-a ocupat decît cu ciocnirea corpurilor neelastice pentru care a dat formula

$$(m + m')\, u = mv + m'v',$$

unde v şi v' sînt respectiv vitezele maselor m şi m' dinainte de ciocnire, iar u viteza lor comună după ciocnire. Chr. Wren se ocupă numai de ciocnirea centrală a corpurilor elastice, enunţînd fără să demonstreze mai multe teoreme. Făcînd experienţe asupra pendulelor de mase diferite ajunse la formula

$$C = \frac{MV + mv - m(V - v)}{M+m},$$

unde C este viteza corpului de masă M după ciocnirea cu cel de masă m. Huygens deduce pentru ciocnirea elastică relaţiile

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + n(v_2 - v_1) m_2}{m_1 + m_2}, \qquad u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - n(v_2 - v_1) m_1}{m_1 + m_2}.$$

Mai tîrziu Huygens adaugă la lucrarea sa o completare, iar în 1703 scoate un studiu complet al ciocnirii corpurilor cu titlul: *De motu corporum expercussione.* El aplică la ciocnirea corpurilor principiul conservării forţei vii, pe care-l enunţă sub forma următoare: « Suma produselor dintre mărimea fiecărui corp dur, multiplicată prin pătratul vitezei sale este totdeauna aceeaşi înainte şi după întîlnire».

În cît priveşte pe Mariotte, Newton face aici aluzie la lucrarea acestuia intitulată *Traité de la percussion ou choc des corps,* în care sînt expuse nu numai cercetările celor trei savanţi menţionaţi mai sus, ci şi experienţele sale proprii. Această lucrare a lui Mariotte a apărut la Leida în 1717, cînd s-au tipărit operele sale complete.

Fiind vorba de verificarea legii a treia pe care el a descoperit-o şi a formulat-o exact, Newton nu s-a mulţumit cu experienţele contemporanilor săi, ci le-a repetat el însuşi cu mai multă precizie decît aceştia, corectînd-o în ce priveşte rezistenţa aerului. Ca rezultat al acestor experienţe pe care le descrie în scolie, el poate trage concluzia că « în acest fel legea a treia a fost verificată în ce priveşte ciocnirea şi reflexia, prin teorie care e în acord perfect cu experienţa ».

După ce arată că legea a treia se verifică şi în cazul atracţiei, în care scop a făcut el însuşi experienţe cu doi magneţi, trece în revistă materialul experimental bogat pe care-l oferă maşinile mecanice. Scolia se termină cu următoarea observaţie importantă: « dacă apreciem acţiunea corpului activ prin produsul dintre forţa şi viteza aceluia, iar reacţiunea rezistenţei din vitezele diverselor părţi ale aceleia şi ale forţelor de rezistenţă provenite din frecare, coeziune, greutate şi acceleraţie, acţiunea şi reacţiunea vor fi egale între ele în întrebuinţarea oricărui instrument ».

Acad. Krîlov are aici următoarea observaţie: « În ultimele cuvinte ale scoliei se poate descoperi nu numai principiul deplasării virtuale şi aplicaţia lui generală la teoria echilibrului maşinilor, adică a sistemelor de corpuri complet legate sau cu un grad de libertate, ci se relevă în ele şi esenţa principiului lui D'Alembert, dar atît de concis, încît numai geniul lui Lagrange a fost capabil să exprime acest principiu general printr-o singură formulă matematică, care cuprinde în ea întreaga statică şi dinamică».

Newton întrebuinţează în această scolie adesea termenul de *forţă* în sensul de *impuls,* adică de forţă înmulţită cu timpul.

CARTEA I

p. 49. *Lema I, II, III. Metoda primelor şi ultimelor rapoarte.*

Deşi Newton a aflat calculul fluxiunilor în 1666 şi e foarte probabil că s-a folosit de el la demonstrarea teoremelor din *Principii,* totuşi a evitat întrebuinţarea lor în expunere, utilizînd metoda sintetică a vechilor geometri. Motivul pare a fi fost prudenţa excesivă de a nu

compromite noua teorie întrebuințînd un calcul care, pe atunci, nu putea fi înțeles de majoritatea cititorilor. Astfel se explică pentru ce fluxiunile nu intervin în *Principii* decît incidental, de exemplu în Cartea a II-a, lema II și în Cartea a III-a, lema III, unde amintește de două ori de « o cantitate fluentă a cărei fluxiune este. . . ». În acele demonstrații, în care intervine infinitul, se folosește de metoda primelor și ultimelor rapoarte, care în definitiv nu e altceva decît metoda trecerii la limită pe care o expune pe scurt în aceste leme.

p. 74. *Prop. XVI, Cor. 4. Distanța mijlocie.* Prin distanța mijlocie de la focarul elipsei se înțelege aici semiaxa mare, sau distanța *SB* de la focar la una din extremitățile axei mici *BC*. Această distanță coincide cu raza cercului de care e vorba.

p. 107. *Lema XXVIII. Ovale.* Newton încearcă să demonstreze că nici o figură de formă ovală nu admite o cvadratură exactă, adică aria unei astfel de curbe nu poate fi exprimată în numere raționale sau iraționale, rădăcini ale ecuațiilor algebrice cu coeficienți raționali, ci numai prin numere transcendente. Brougham și Routh (*Analytical View of Sir Isaac Newton's Principia*, London, 1855, p. 72) au arătat însă că există unele excepții, aducînd ca exemplu curba

$$y^m = x^{(n-1)} (a^n - x^n),$$

unde m și n sînt numere întregi. Această curbă satisface condițiilor puse de Newton, totuși admite o cvadratură exactă. Astfel pentru a întreg și $m = n = 2$, aria curbei în intervalul $o < x \leq a$ este:

$$A = \int_0^x 2y \, dx = -\frac{1}{3}\left[(a^2-x^2)^{3/2}\right]_0^x = \frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}.$$

Scăpîndu-ne de radical obținem o ecuație algebrică de gradul al doilea privitoare la A. Prin urmare aria acestui segment, deși în general e irațională, nu este transcendentă pentru valori algebrice ale lui x. În cazul cînd $x = a$ se obține aria ovalei întregi $\frac{a^2}{3}$, care este rațională.

p. 109 și 110. *Prop. XXXI și Scolia. Problema lui Kepler.* Problema cu care se ocupă Newton aici provine de la Kepler (*Astronomia nova*, 1609) și constă în a determina în ecuația $x - e \sin x = z$, pe x admițînd că e și z sînt date. Astronomul J. C. Adams într-un articol, *On Newton's Solution of Kepler's Problem* în *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (London, vol. 43, 1882, pp. 43—49), publică o metodă rapidă de aproximație menționînd că ea « este exact echivalentă cu cea dată de Newton în *Principii*. . . dacă transcriem expresiile lui Newton în forma analitică modernă ». El descrie astfel metoda: « Ecuația ce trebuie rezolvată prin aproximații succesive este $x - e \sin x = z$, unde z este anomalia medie cunoscută, e excentricitatea, iar x anomalia excentrică ce trebuie determinată.

Să presupunem că x_0 este o valoare aproximativă a lui x, aflată fie prin estimare, prin construcție grafică, ori printr-un calcul grob preliminar, și fie $x_0 - e \sin x_0 = z_0$.

Atunci dacă $\delta x_0 = \frac{z - z_0}{1 - e \cos x_0}$ și $x' = x_0 + \delta x_0$, x' va fi o valoare cu mult mai aproximativă a lui x decît x_0. De asemenea, dacă punem $x' - e \sin x' = z'$ și dacă $\delta x' = \frac{z - z'}{1 - e \cos x'}$ și $x'' = x' + \delta x'$, atunci x'' va fi o valoare cu mult mai aproximativă a lui x decît x' ș.a.m.d. »

Cu problema lui Kepler s-au ocupat, după Newton, o mulțime de astronomi. În *Bulletin Astronomique*, Paris, vol. 17, 1900, pp. 37—47 se găsește o bibliografie a lucrărilor referitoare la această chestiune, cuprinzînd 123 lucrări.

p. 133. *Prop. XLV, Cor. 3. Mişcarea apsidelor pe orbite.* În ediţia a II-a şi a III-a a *Principiilor*, Newton adaugă fraza: «Apsida Lunii este aproximativ de două ori mai rapidă», adică de două ori unghiul 1°31′28″, ce reprezintă mişcarea progresivă a apsidei într-o revoluţie a Lunei pe orbita sa. În ediţia I, valoarea unghiului dat este de 1°31′14″. Vedem deci că valoarea calculată de Newton este abia jumătatea celei observate. Întîlnim aici celebra diferenţă dintre mişcarea observată şi cea calculată a Lunii.

Newton a dat o atenţie specială mişcărilor Lunii. Ea a jucat un rol important în însăşi descoperirea legii gravitaţiei, şi asupra ei a încercat Newton să verifice această lege. Problema Lunii l-a preocupat timp de mai mulţi ani şi de multe ori se plîngea lui Halley că ea îi cauzează dureri de cap. Se ştie că dacă luăm în considerare numai Pămîntul şi Luna, legea atracţiei ar face ca Luna să descrie o elipsă invariabilă în jurul centrului comun de greutate al celor două corpuri. Aceasta este *problema celor două corpuri*, ce se poate rezolva complet cu ajutorul calculului. În studiul precis al mişcărilor Lunii însă nu putem lăsa deoparte nici influenţa considerabilă a Soarelui, nici pe cea a planetelor. Avem astfel *problema celor trei* sau *a mai multor corpuri*, care se poate formula precis, dar nu s-a putut rezolva cu mijloacele matematice de care dispunem. Din fericire însă de multe ori sînt suficiente soluţii aproximative, care se pot împinge cît mai departe posibil.

Primii paşi în această privinţă i-a făcut însuşi Newton. El a arătat că din cauza atracţiei Soarelui linia nodurilor Lunii descrie o mişcare retrogradă, iar cea a apsidelor una progresivă. Rezultatele sale în această privinţă sînt o manifestaţie strălucită a geniului său creator. O mare parte din datele observaţiilor le-a primit pe la 1694 de la astronomul Flamsteed (1646—1719) din Greenwich.

După părerea lui Cajori, lui Newton probabil i-a reuşit să pună de acord teoria cu observaţia, deşi nicăieri în *Principii* nu dă vreo explicaţie în această privinţă. În sprijinul observaţiei sale Cajori citează observaţia lui Newton din Cartea a III-a, prop. XXIII: « Dar mişcarea apsidelor astfel aflată trebuie micşorată în raportul de 5 la 9, sau aproape de 1 la 2, dintr-o cauză pe care nu o pot expune aici». Pemberton, care a editat ediţia a treia a *Principiilor*, i-a propus să adauge la propoziţia menţionată « o scurtă indicaţie asupra principiului din care se deduce regula cuprinsă în aceste şiruri», dar fără succes. Adams observă că dacă Newton ar fi dat atenţia cuvenită cererii lui Pemberton « toate dificultăţile împreunate cu mişcarea apogeului Lunii ar fi fost înlăturate». Mişcarea apsidelor Lunii rămase astfel o problemă deschisă.

Primii care au reluat problema au fost Clairaut şi D'Alembert, cărora li se datoreşte explicaţia evecţiunii. A. C. Clairaut în lucrarea sa *Théorie de la lune*, Petersburg, 1752, aplică cel dintîi analiza modernă la mişcarea Lunii. Rezultatul calculului său a fost că perigeul trebuia să-şi efectueze revoluţia ca un nod, în 18 ani, pe cînd observaţia arată că ea se face în 9 ani. Neputînd explica această diferenţă el admise că legea atracţiei universale necesită un termen corectiv invers proporţional cu cubul distanţei, care pentru distanţe mari ar fi neglijabil, ar deveni însă sensibil pentru distanţa mică dintre Pămînt şi Lună. Neputînd obţine rezultat satisfăcător, Clairaut reveni la primele sale calcule, pe care le completează ajungînd la valori foarte apropiate de datele observaţiei, ceea ce fu considerat ca un triumf al gravitaţiei universale.

Teoria Lunii a fost continuată cu succes de Euler, Laplace, Poisson, Hansen, Delaunay, Adams etc. Laplace se ocupă amănunţit de această problemă în *Mécanique céleste*, 1799—1825, tome III, livre VII, pp. 169—303. Dintre celelalte lucrări merită să amintim îndeosebi *Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen* a lui P. A. Hansen, publicată în *Abhandlungen der mathem. phys. Classe der Sächs. Ges. der Wissenschaften*, Leipzig, vol. VI, 1864, vol. 7, 1865, apoi *Theorie de la lune*, 1860, a lui Delaunay, lucrările lui G. W. Hill, bazate în mare parte pe metode noi

de calcul, completate şi perfecţionate de Ernest Brown, şi în sfîrşit pe cele ale lui De Sitter.

Cu toate aceste lucrări excelente, mişcarea Lunii nici azi nu este deplin cunoscută. Se referă aceasta îndeosebi la acceleraţia seculară a Lunii, descoperită de Halley şi confirmată de Dunthorne, Tobias Mayer şi Lalande, care au aflat valori cuprinse între 6, 7 şi 10.

Teoretic acceleraţia seculară a fost studiată mai întîi de Lagrange, apoi de Laplace, care a arătat că ea ar putea fi cauzată de micşorarea foarte înceată a excentricităţii orbitei pămînteşti. Laplace află o acceleraţie seculară de 10, de perfect acord cu observaţiile lui Dunthorne şi Lalande. Problema părea astfel rezolvată, cînd ea a fost reluată de Baily în 1811, apoi de Airy în 1853 şi 1857, în baza discuţiilor eclipselor de Soare cunoscute din antichitate. Pentru a explica aceste eclipse Airy ajunse la concluzia că trebuie să atribuim acceleraţiei seculare valoarea de 12 sau 13, deci mai mare decît cea aflată de Laplace. Adams, în 1853, dimpotrivă arată că valoarea acceleraţiei ar fi de numai 6,1. Mai tîrziu Newcomb admite 8,3, iar Tisserand obţine 7.

În acest fel valoarea teoretică şi cea observată a acceleraţiei seculare nu sînt de acord, cauza diferenţei lor nefiind cunoscută. Se pare că ea ar putea fi atribuită efectelor combinate ale mareelor şi răcirii Pămîntului, cauzată probabil de micile schimbări periodice ale formei Pămîntului.

Rezultă din cele de mai sus că mişcarea Lunii nu este explicată exact pînă în prezent prin teoria gravitaţiei.

p. 149. *Prop. LX. Două medii proporţionale.* Dacă x şi y satisfac proporţiei $a:x = x:y = y:b$, zicem că x şi y sînt medii proporţionale între a şi b; x este întîia, iar y a doua medie proporţională.

p. 171. *Prop. LXXV şi Cartea III, Prop. VIII. Atracţia între sfere.*

Acad. A. N. Krîlov expune mai complet demonstraţia lui Newton asupra atracţiei unui punct extern de către o sferă, cu ajutorul analizei moderne în *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, London, vol. 85, 1925, p. 571.

p. 157. *Prop. LXVI, Cor. 7. Aux.* Newton întrebuinţează pentru afeliu termenul *aux* rămas din vechea astronomie ptolemaică şi care azi nu se mai întrebuinţează. El era definit ca punctul de pe orbita unei planete, în care ea e mai îndepărtată de centrul lumii. În astronomia lui Ptolemeu, *aux* avea înţelesul de apogeu. În sistemul heliocentric însă, în centrul sistemului planetar fiind situat Soarele, *aux* are înţelesul de afeliu, după cum l-am tradus aici.

p. 192. *Prop. XCVI. Viteza luminii.* Pe la sfîrşitul veacului al XVII-lea asupra luminii s-au stabilit două ipoteze, cea corpusculară a lui Newton şi cea ondulatorie a lui Huygens. Newton admitea că lumina constă din particule foarte fine emise de corpul luminos, care se propagă în linie dreaptă şi atingînd ochiul îl impresionează. Huygens dimpotrivă susţinea că ea nu e altceva decît o mişcare de oscilaţie ce se propagă în toate direcţiile sub formă de unde printr-un eter material foarte fin şi care pătrunde în toate corpurile. Fiecare din ele explica unele fenomene optice mai simplu, altele în mod mai complicat. Astfel teoria lui Newton explică foarte simplu propagarea luminii în linie dreaptă şi reflexia, fenomene care devin mai complicate în teoria ondulatorie. Dimpotrivă, refracţia se explică mai uşor cu teoria lui Huygens şi mai greu cu cea corpusculară. Pentru a explica refracţia luminii, Newton admite că viteza ei într-un mediu mai dens este mai mare decît într-unul mai rar, contrar de cum admitea Huygens. Cele două teorii şi-au disputat multă vreme întîietatea, pînă ce în veacul al XVIII-lea, cei mai mulţi fizicieni au adoptat teoria lui Newton,

din cauza autorității sale incontestabile. Cu toate acestea vreo cîțiva savanți, printre care și E u l e r, susțineau ipoteza lui H u y g e n s. La începutul veacului al XIX-lea, datorită îndeosebi descoperirilor lui F r e s n e l, teoria ondulatorie a început să cîștige din nou teren. Pentru a tranșa definitiv discuția J e a n L e o n F o u c a u l t, în 1850, măsură viteza luminii în apă și află că ea este mai mică decît în aer. Experiența lui F o u c a u l t a fost considerată ca un « experimentum crucis », prin care teoria lui N e w t o n era înlăturată complet. Mai de curînd însă teoria corpusculară s-a reluat sub o altă formă și experiența lui F o u c a u l t nu s-a mai considerat ca decisivă. Mecanica ondulatorie tinde să unifice cele două teorii, cea corpusculară și cea ondulatorie a luminii. L u d w i g F l a m (*Die Naturwissenschaften*, vol. 15, 1927) explică experiența lui F o u c a u l t în baza mecanicii ondulatorii.

CARTEA A II-A

p. 197. *Secțiunea I.* În timp ce Cartea I se ocupă cu mișcarea corpurilor în vid, în Cartea a II-a el studiază influența mediului rezistent asupra acestei mișcări. Această influență se manifestă sub forma de rezistență ce depinde de viteza corpului în mișcare. În Secțiunea I N e w t o n face ipoteza că rezistența mediului e proporțională cu viteza corpului.

p. 197. *Prop. I.* În mod analitic demonstrația lui N e w t o n se reduce la:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{ deci } \int_{v_1}^{v_2} m\mathrm{d}v = -k\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x, \text{ de unde } m(v_2 - v_1) = k(x_1 - x_2).$$

p. 195. *Prop. II.* În mod algebric demonstrația are forma următoare: dacă în intervale egale și consecutive de timp vitezele sînt respectiv v_1, v_2, $v_3, \ldots$ și rezistențele sînt cv_1, cv_2, $cv_3, \ldots$ atunci

$$v_2 = v_1 - cv_1,\quad v_3 = v_2 - cv_2,\quad v_4 = v_3 - cv_3, \ldots$$

deci

$$\frac{1}{c} = \frac{v_1}{v_1 - v_2} = \frac{v_2}{v_2 - v_3} = \frac{v_3}{v_3 - v_4} = \ldots$$

Dar din lema I, avem

$$v_1 : v_2 = v_2 : v_3 = v_3 : v_4 = 1 : (1-c),$$
$$v_1 : v_3 = v_1v_2 : v_2v_3 = 1 : (1-c)^2,$$
$$v_1 : v_4 = v_1v_2v_3 : v_2v_3v_4 = 1 : (1-c)^3,$$

. . . .

Prin urmare

$$v_2 = v_1(1-c),\quad v_3 = v_1(1-c)^2, \ldots\ v_{n+1} = v_1(1-c)^n,$$

ceea ce ne arată că viteza scade în progresie geometrică.

p. 204. *Secțiunea II.* N e w t o n consideră în scolia de la sfîrșitul secțiunii I ipoteza rezistenței proporționale cu viteza mai mult ca o ipoteză matematică decît naturală. De aceea în secțiunea II face ipoteza mai conformă cu experiența că rezistența mediului este proporțională cu pătratul vitezei.

p. 205. *Prop. VII. Rezistența sferelor.* În mod analitic demonstrația lui N e w t o n se poate transcrie astfel. Fie V viteza inițială a unui corp și v viteza următoare, R rezistența inițială și r rezistența următoare, iar t timpul. Pentru un alt corp fie notațiile corespunzătoare V_1, v_1, R_1, r_1 și t_1. Prin ipoteză

$$V^2 : v^2 = R : r,$$
$$V_1^2 : v_1^2 = R_1 : r_1,$$
$$t : t_1 = \frac{V}{R} : \frac{V_1}{R_1}.$$

Atunci pierderea vitezei, $-dv$, a primului corp în intervalul de timp infinitezimal dt va fi

$$-dv = rdt = \frac{Rv^2}{V^2} dt.$$

Prin împărţire cu v^2 şi integrare se obţine

$$v^{-1} = \frac{R}{V^2} t + C.$$

Dacă $t = 0$ avem $v = V$, deci $C = V^{-1}$, astfel că înlocuind şi răsturnînd egalitatea se obţine

$$v = \frac{V^2}{Rt + V}.$$

Aşadar pierderea de viteză este

$$V - v = \frac{VRt}{Rt + V}.$$

Pentru cel de-al doilea corp

$$V_1 - v_1 = \frac{V_1R_1t_1}{R_1t_1 + V_1} = \frac{V_1Rt}{Rt + V}.$$

Deci pierderile de viteză în timpurile t şi t_1 a celor două corpuri sînt între ele ca vitezele lor iniţiale V şi V_1.
Pentru a demonstra partea a doua referitoare la spaţiul s, vom înlocui expresia de mai sus a lui v în $ds = vdt$, deci

$$ds = \frac{V^2}{Rt + V} dt.$$

Integrînd ajungem la relaţia

$$s = \frac{V^2}{R} [\log (Rt + V) - \log V].$$

Scriind formula analogă pentru corpul al doilea şi simplificînd obţinem

$$s : s_1 = Vt : V_1t_1.$$

p. 206. *Lema II.* În primele sale lucrări şi în ediţia întîia a *Principiilor*, Newton întrebuinţează cantităţi infinit de mici, adică *infinitezimale fixe.* Menţionînd aceasta, De Morgan observă: « Pe la anul 1704 şi în ce privea calculul algebric Newton folosea numai cantităţi infinit de mici şi nimic altceva în documentele publicate pînă acum. Primele şi ultimele rapoarte apar în *Principii*, dar sînt abandonate în acele locuri în care se face aluzie la fluxiuni... În prima ediţie a *Principiilor* descrierea fluxiunilor se bazează pe infinitezimale, dar în a doua ediţie această întemeiere e întru cîtva schimbată. În ediţia întîia momentele sînt cantităţi infinit de mici; în a doua nu e clar ce sînt ele. Ca exemplu dăm următorul extras din ediţia întîia comparat cu cel care-l înlocuieşte în a doua:

EDIŢIA I. LEMA II.	EDIŢIA a II-a. LEMA II.
Cave tamen intellexeris particulas finitas. *Momenta, quam primum finitae sunt magnitudinis, desinunt esse momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento.* Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum.	Cave tamen intellexeris particulas finitas. *Particulae finitae non sunt momenta sed quantitates ipse ex momentis genitae.* Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum.

De Morgan comentează pasajele citate astfel: « Prin dificultăţile frazelor în cele două extrase apare mai distinct că în prima ediţie, momentele sau creşterile momentelor sînt cantităţi infinit de mici: şi aceasta este ceea ce eu afirm... Newton a început cu sistemul infinitezimal într-o formă absolută cum a făcut Leibniz întrucît priveşte cantităţile infinit de mici de ordinul întîi. Mai departe de aceasta nu a mers; şi deosebirea între sistemele celor doi este că Newton, ţinînd la concepţia vitezelor sau fluxiunilor, a întrebuinţat creşterea infinit de mică drept un mijloc de a o determina, pe cînd la Leibniz relaţia creşterilor infinit de mici este ea înseşi obiect de determinare » (*On the Early History of Infinitesimala in England.* Philosophical Magazine, ser. IV, vol. 4, 1852, pp. 321—330).

În *Tractatus de quadratura curvarum* apărut în 1704, Newton explică în introducere bazele fluxiunilor, încercînd să înlăture orice utilizare a infinitezimalelor fixe. Privitor la aceasta, De Morgan observă că în această lucrare Newton « a renunţat la cantităţile infinit de mici şi le-a renegat; a făcut-o însă în aşa fel încît am putea fi conduşi să credem că el nu le-a susţinut niciodată » (loc. cit).

Menţionăm că prin fluxiunea unei cantităţi fluente x Newton înţelegea derivata acesteia faţă de timp, pe care o nota cu $\dot{x}$. Creşterea infinit de mică a lui x într-un interval de timp o era $\dot{x}o$ şi o numea *momentul fluentei.* În *Principii* Newton neglijează termenii înmulţiţi cu puterile superioare ale lui o; astfel în Cartea I, prop. XXXIX, cor. III; prop. XLV, exemplul 2 şi 3; Cartea a II-a, prop. X şi XV.

Rouse Ball în *History of Mathematics*, London, 1927, ed. IV, observă că deşi se pare că prin intermediul fluxiunilor Newton a introdus în geometrie noţiunea de timp, totuşi în realitate el a ştiut să o evite admiţînd că unele fluente variază în mod egal. Fie o astfel de fluentă de exemplu abscisa unui punct al curbei; rezultatul depinde de raportul creşterii ordonatei faţă de abscisa x considerată ca variabilă independentă. Newton numeşte fluxiunea lui x « fluxiune principală » şi dacă x variază în mod egal, $\dot{x}$ este constantă, deci $\ddot{x} = 0$.

În traducerea noastră am păstrat termenul *genita* întrebuinţat de Newton. El corespunde noţiunii de *funcţie*, iar momentul unei *genita*, adică al unei funcţiuni este identic cu noţiunea de *diferenţială.*

p. 208. *Scolie.* Spre deosebire de textul ediţiei a III-a, în ediţia I şi a II-a textul acestei scolii este următorul:

« În schimbul de scrisori care a avut loc între mine şi excelentul geometru G. W. Leibniz, înainte cu zece ani, cînd i-am făcut cunoscut că am aflat o metodă de determinare a maximelor şi minimelor, de a trasa tangente şi altele asemenea, aplicîndu-le atît la mărimile raţionale, cît şi la cele iraţionale, şi cînd i-am ascuns aceasta într-o anagramă ce cuprindea următoarea propoziţie: (Fiind dată o ecuaţie oarecare conţinînd cantităţi fluente, să aflăm fluxiunile şi invers), acest bărbat distins mi-a răspuns că şi el a aflat o metodă de acelaşi gen şi mi-a comunicat metoda sa, care abia se deosebeşte de a mea în formularea cuvintelor şi a simbolurilor. Baza ambelor se cuprinde în lema precedentă ».

În ediţia a II-a Newton adause la propoziţia penultimă cuvintele: « şi în concepţia generării cantităţilor ».

Cu toată afirmaţia contrară a lui Newton se pare că în privinţa calculului infinitezimal concepţia sa diferea de a lui Leibniz. Într-adevăr pe cînd Leibniz considera ca fundamentali înşişi infiniţii mici, concepţia lui Newton în această privinţă a evoluat cu timpul, deoarece, după cum am menţionat, în timp ce la început se folosea de cantităţi infinit de mici pentru a afla fluxiunile, mai tîrziu le-a abandonat. Astfel în *Tractatus de quadratura curvarum* din 1704 scrie: « În acest loc nu consider cantităţile matematice ca alcătuite din părţi foarte mici, ci ca descrise de o mişcare continuă ». Se vede de aici că în acea

epocă el nu mai făcea uz de infinitezimale fixe, astfel că adaosul din ediţia a II-a « şi concepţia generării cantităţilor » este potrivit.

Pasajul citat mai sus a jucat un mare rol în controversa ce s-a ivit între Newton şi Leibniz referitor la prioritatea asupra calculului infinitezimal. Anume în acest pasaj Newton recunoaşte că Leibniz a inventat noul calcul în mod independent. Mai tîrziu însă a negat această interpretare afirmînd că el a inventat acest calcul şi i-a comunicat acest lucru lui Leibniz. De aceea în ediţia a III-a a *Principiilor* pasajul a fost înlocuit cu altul în care nu se mai aminteşte numele lui Leibniz. În toiul discuţiei, Leibniz într-o scrisoare din 1716 adresată preotului italian A. S. Conti, pe atunci la Londra, îi reaminti lui Newton de afirmaţia din scolie. Curînd după aceea, în acelaşi an Leibniz muri. Totuşi la 14 noiembrie 1716 Newton publică în *Fluxions* a lui Raphson următoarele: « El (Leibniz) pretinde că în cartea mea *Principia* I am afirmat că el a inventat *Calculus differentialis* independent de mine, şi că a-mi atribui această invenţie mie însumi este în contrazicere cu buna mea ştiinţă. Dar în pasajul menţionat eu nu am folosit nici un cuvînt în acest sens».

Controversa referitoare la prioritatea asupra calculului infinitezimal a continuat multă vreme între newtonieni şi leibnizieni, chiar după moartea celor doi protagonişti luînd un caracter destul de vehement, în care au jucat rol nu numai ambiţii personale, ci şi naţionale. Această controversă nu a avut nici un sens, critica modernă arătînd că ea era fără obiect fiindcă nu se poate vorbi de *un* inventator al calculului infinitezimal. Fără a diminua meritul lui Newton şi Leibniz în ce priveşte fundamentarea acestui calcul, nu se poate nega opera de pregătire a lui Cavalieri, Torricelli, Roberval, Fermat, Barrow, Wallis etc., fiecare din aceştia contribuind în mod efectiv la construcţia edificiului acestei mari invenţii matematice. Azi se poate afirma că atît Leibniz, cît şi Newton au ajuns cam în acelaşi timp pe căi diferite la acelaşi rezultat, pe care l-a prezentat fiecare după felul său propriu de a vedea. Controversa dintre ei a fost regretabilă şi din cauza că a arătat slăbiciunile omeneşti de care nu sînt feriţi nici oamenii de geniu.

John Collins (1625—1683) pe care-l aminteşte Newton în scolia din ediţia a III-a s-a născut la Oxford şi a murit la Londra. Fiind devotat matematicilor a purtat o vastă corespondenţă cu matematicienii epocei sale, cărora le-a comunicat informaţii utile, din care cauză a fost numit Mersenne al englezilor, prin comparaţie cu francezul père Mersenne.

R. Fr. Walther de Sluze sau cu numele latinizat Slusius (1622—1685) a fost canonic la Liége. Ca matematician s-a ocupat cu deosebire de spirale şi de puncte de inflexiune şi a aflat pentru subtangenta unei curbe de forma $f(x, y) = 0$ o expresie echivalentă cu

$$y = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}.$$

Johann Hudde (1633—1704) a fost burgmeister al oraşului Amsterdam. S-a ocupat cu matematicile în timpul liber şi a dat atenţie deosebită ecuaţiilor ce au rădăcini duble şi subtangentelor curbelor.

p. 213. *Prop. X.* Demonstraţia lui Newton din ediţia I a *Principiilor* referitoare la determinarea rezistenţei ce întîmpină un proiectil în aer este greşită. Eroarea a fost adusă la cunoştinţa lui Newton de către Nicolas Bernoulli (1687—1759) cu ocazia călătoriei ce făcuse acesta în Anglia în toamna anului 1712, cînd îl vizită şi pe Newton. De altfel încă Jean Bernoulli (1667—1748) într-o scrisoare către Leibniz din august 1710 şi în *Mémoires de l'Académie des Sciences* din Paris pe anul 1711 arată că

rezultatul lui Newton în cazul cînd curba descrisă e un cerc este greşit. De aceea la 14 octombrie 1712 Newton îi scrie lui Cotes: «În propoziţia X a cărţii a II-a, problema III este o eroare care va pretinde o retipărire de aproximativ o coală şi jumătate. Am descoperit-o după ce v-am scris şi am corectat-o. Voi plăti costul retipăririi şi am să v-o trimit imediat ce o voi da gata».

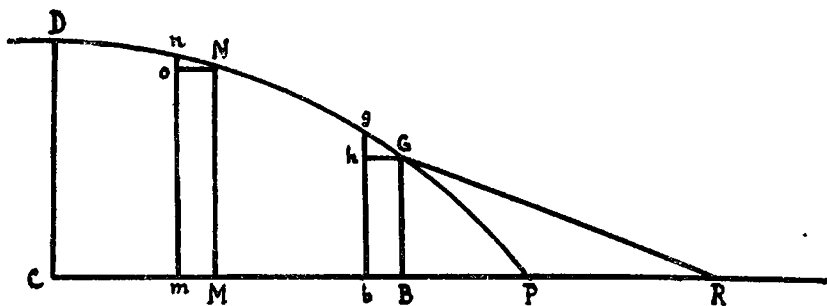
p. 267. *Scolie.* Propoziţiile XXXIII—XLI diferă mult în cele trei ediţii ale *Principiilor*. Astfel propoziţia XXXIII în prima ediţie are nouă corolare, pe cînd în a doua şi a treia numai şase, cel din urmă fiind refăcut. Propoziţiile următoare sînt redactate din nou şi completate cu experienţe noi. Chiar numerotarea propoziţiilor e schimbată, căci propoziţia XXXIV din ediţia a II-a şi a III-a este identică cu propoziţia XXXV din ediţia I. De asemenea scolia ce urmează după propoziţia XXXIV din ultimele două ediţii este aproape aceeaşi cu cea care urmează după propoziţia XXXV din ediţia I.

Această scolie se ocupă cu suprafaţa de rezistenţă minimă, cea mai veche problemă de acest gen; Newton enunţă aici, fără să demonstreze, condiţiile la care trebuie să satisfacă o suprafaţă de revoluţie pentru ca mişcîndu-se în direcţia axei sale într-un mediu rezistent să întîmpine o rezistenţă minimă.

Portsmouth Collection of Books and Papers Written by or Belonging to Sir Isaac Newton, Cambridge, 1888, cuprinde o scrisoare din 1694 a lui Newton către un corespondent din Oxford, probabil David Gregory, în care dă acestei probleme următoarea demonstraţie:

«Domnule, vă mulţumesc din inimă atît pentru vizita ce mi-aţi făcut-o, cît şi pentru greşelile semnalate în cartea mea... Forma care prezintă rezistenţa minimă în scolia propoziţiei XXXIV, cartea a II-a se poate demonstra astfel.

1. Dacă pe BM ridicăm paralelogramele infinit de mici $BGhb$ şi $MNom$ şi e dată distanţa lor Mb şi înălţimile MN, BG, şi e dată semisuma bazelor lor $\frac{Mm+Bb}{2}$ şi o numim S, şi semidiferenţa $\frac{Mm-Bb}{2}$ o numim x, şi dacă liniile BG, bh, MN, mo întîlnesc curba $nNgG$ în punctele n, N, g şi G, şi liniile infinit de mici on şi hg sînt egale între ele şi se numesc C, şi rotim figura $mnNgGB$ în jurul axei sale BM pentru a genera un solid, şi acest solid se mişcă în mod uniform în apă de la M la B după direcţia axei sale BM: suma rezistenţelor celor două suprafeţe generate de liniile infinit de mici Gg, Nn va fi minimă dacă $(gG)^4$ este către $(nN)^4$ precum $BG\times Bb$ către $MN\times Mm$



Intr-adevăr rezistenţele suprafeţelor generate prin învîrtirea lui Gg şi Nn sînt precum $\frac{BG}{(Gg)^2}$ şi $\frac{MN}{(Nn)^2}$, adică dacă pe $(Gg)^2$ şi $(Nn)^2$ le notăm cu p şi q, precum $\frac{BG}{p}$ şi $\frac{MN}{q}$, şi suma lor $\frac{BG}{p}+\frac{MN}{q}$ este minimă dacă fluxiunea ei

$$-\frac{BG.}{p^2}\dot{p}-\frac{MN.}{q^2}\dot{q} \text{ este zero, sau } -\frac{BG.}{p^2}\dot{p}=\frac{MN.}{q^2}\dot{q}.$$

Dar

$$p=(Gg)^2=(Bb)^2+(gh)^2=s^2-2sx+x^2+c^2$$

şi deci

$$\dot{p} = -2s\dot{x} + 2x\dot{x}$$

şi din aceeaşi cauză

$$\dot{q} = 2s\dot{x} + 2x\dot{x}$$

şi prin urmare

$$\frac{BG \times (2s\dot{x} - 2x\dot{x})}{p^2} = \frac{MN\,(2s\dot{x} + 2x\dot{x})}{q^2}$$

sau

$$\frac{BG\,(s-x)}{p^2} = \frac{MN\,(s+x)}{q^2}$$

şi astfel p^2 este către q^2 precum $BG\,(s-x)$ către $MN\,(s+x)$, adică $(gG)^4$ către $(nN)^4$ precum $BG \times Bb$ către $MN \times Mm$.

2. Dacă linia curbă *DnNgG* este de aşa fel că suprafaţa solidului generat prin rotaţia ei suferă rezistenţa minimă a unui solid de acelaşi vîrf şi bază *BG* şi *CD*, atunci rezistenţa suprafeţelor înguste inelare generate de învîrtirea (liniilor infinit de mici *nN*) *Gg* este mai mică decît dacă se mişcă solidul intermediar *bgNM* (de-a lungul lui *CB* fără alterarea lui *Mb*, pînă ce *bg* ajunge) la *BG* (presupunînd ca mai înainte că *om* este egal cu *hg* şi în consecinţă e cea mai mică posibilă), şi deci $(gG)^4$ este către $(nN)^4$ precum BG ($\times\, Bb$ către $MN \times Mm$).

(Deci dacă) *gh* e egală cu *hG*, astfel că unghiul (*gGh* este de 45°), atunci 4 $(Bb)^4$ va fi (către $(nN)^4$ precum $BG \times Bb$ este către) $MN \times Mm$, şi în consecinţă 4 $(BG)^4$ este către $(GR)^4$ precum $(BG)^2$ către $MN \times BR$, sau 4 $(BG)^2 \times BR$ este către $(GR)^3$ (precum *GR* către *MN*).

Dacă înălţimea trunchiului de con menţionat în paragraful precedent este infinit de mică, semiunghiul conului devine egal cu 45°. Prin urmare dacă rezistenţa totală este minimă, curba întîlneşte ordonata extremă *GB* sub un unghi de 45°.

De aici rezultă uşor propoziţia ce trebuie demonstrată».

Cuvintele din paranteză sînt intercalate în textul din *Portsmouth Collection* de către editori pentru a uşura înţelegerea demonstraţiei.

Cu soluţia lui Newton şi cu studiul suprafeţei de rezistenţă minimă s-au ocupat mai cu seamă Oscar Bolza în *Bibliotheca Mathematica*, seria 3, vol. 13, pp. 140—149, şi A. R. Forsyth în volumul comemorativ *Isaac Newton*, 1642—1727, editat de W. I. Greenstreet, London, 1927, pp. 45—86.

p. 270. *Prop. XXXVI.* Referitor la această problemă, Brougham şi Routh fac observaţia: « Soluţia acestei chestiuni, după cum a dat-o Newton în prima sa ediţie este complet greşită. El a neglijat cu totul contracţia vînei după ce fluidul a trecut prin orificiu, de aceea el a dedus că viteza efluxului era aceea datorită *jumătăţii* înălţimii apei din vas. Mai tîrziu a corectat această eroare, dar cercetarea rămîne totuşi susceptibilă de obiecţiuni foarte serioase ».

p. 284. *Prop. XL. Scolie, Exp. 13.* În măsurarea timpului 1 secundă=60 de terţe, 1 terţă = = 60 de cvarte. În măsurarea unghiului avem $1° = 60'$, $1' = 60''$, $1'' = 60'''$. Newton foloseşte aceleaşi notaţii pentru fracţiunile de oră ca şi pentru cele de grad, deci la el 1 oră $= 60^m$, $1^m = 60^s$ etc.

p. 299. *Prop. XLVIII—L. Viteza sunetului.* Newton admite că sunetul se propagă sub forma de unde longitudinale, în linie dreaptă, în mod uniform în toate direcţiile cu o viteză v proporţională cu rădăcina pătrată din « forţa elastică » E împărţită cu « densitatea mediului », adică $v = \sqrt{\frac{E}{d}}$. Aceasta este cunoscuta *formulă a lui Newton* din acustică. Înlocuind în această formulă valorile lui E şi d determinate în mod experimental pentru aer se obţine pentru viteza sunetului la temperatura obişnuită valoarea de 979 picioare, diferită de cea obţinută prin măsurări directe de 1142 picioare. Toate încercările lui Newton de a explica cu ajutorul

diverselor ipoteze diferența dintre valoarea teoretică și cea experimentală, au rămas infructuoase.

Problema vitezei de propagare a sunetului a fost rezolvată la un secol după Newton de către Laplace, care a înlocuit formula de mai sus cu următoarea: $v = \sqrt{\frac{E}{d}\gamma}$, unde γ este raportul dintre căldura specifică a mediului la volum constant c_p și căldura lui specifică la presiunea constantă c_v, adică $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. În cazul aerului și al gazelor diatomice valoarea lui γ este aproximativ 1,41. În felul acesta discordanța dintre formula teoretică și rezultatele experienței au dispărut. Corecția lui Laplace se datorește faptului că aerul și în general gazele fiind rele conducătoare de căldură, iar vibrațiile sunetului fiind foarte rapide, propagarea sunetului are loc în mod adiabatic și nu în mod izoterm, cum admisese Newton.

Laplace și-a publicat formula în *Annales de Physique et de Chimie*, vol. 3, 1816, pp. 238—241, dar fără a-i da vreo demonstrație. În ce privește demonstrația lui Newton, el are următoarea apreciere: « Felul în care el ajunge la ea este una din trăsăturile cele mai remarcabile ale geniului său », iar în cartea sa *Mécanique céleste*, Livre XII, p. 95 se exprimă astfel: « Teoria sa, deși imperfectă, este un monument al geniului său ».

p. 301. *Prop. L.* Joseph Sauveur (1653—1716) născut în La Flèche, a fost profesor la College Royal din Paris. Are realizări importante în acustică, unde independent de Noble și Piggot, a descoperit tonurile armonice la coarde. De asemenea a dat o explicație corectă bătăilor acustice.

CARTEA A III-A

p. 313. *Cartea a III-a* prezintă caractere diferite de primele două cărți ale *Principiilor*. Scopul pe care și-l propusese Newton de a pune bazele dinamicei, de a prezenta legea gravitației și de a distruge filozofia lui Descartes a fost ajuns prin Cartea I și a II-a, de aceea el voia să încheie cu acestea marea sa operă. Dar la îndemnul lui Halley și dîndu-și seama că în acest fel lucrarea ar fi rămas neînțeleasă de cea mai mare parte a cititorilor, care nu erau familiarizați cu demonstrațiile matematice riguroase, Newton se hotărî să publice și Cartea a III-a despre sistemul lumii, în care dinamica sa apare ca o știință cosmică. În ce privește forma de expunere a noului sistem, Newton s-a gîndit mult care ar fi calea cea mai potrivită. La început a scris Cartea a III-a « în mod popular, ca să fie citită de cît mai mulți », dar apoi ca să evite discuțiile a expus esențialul cărții « sub formă de propoziții, după obiceiul matematicii », ca să fie citit numai de aceia care au înțeles principiile anterioare ». Dar și acestora le dă sfatul să nu citească întreaga carte, ci e deajuns să pătrundă sensul propozițiilor, legilor mișcării și primele trei secțiuni ale Cărții I, trecînd direct la Cartea a III-a. Se vede de aici că el a ales calea mijlocie între o largă popularizare și o prezentare strict matematică. Prudența lui Newton se manifestă și în faptul că înaintea Cărții a III-a a pus regulele de filozofare, anticipînd în acest fel concluziile acestei cărți.

p. 314. *Regule de filozofare.* În ediția I a *Principiilor* Newton nu folosește expresia de *reguli de filozofare*, ci termenul de *ipoteze*, care sînt în număr de nouă. Acestea sînt (împreună cu explicațiile lui Newton):

« *Ipoteza I. Nu trebuie să admitem mai multe cauze pentru lucrurile naturale, decît acele care sînt adevărate și suficiente pentru explicarea fenomenelor lor.*

Căci natura este simplă și nu face lux cu cauzele de prisos ale corpurilor,

Ipoteza II. Și de aceea efectele naturale de același gen au aceleași cauze.

Ca respirația la om și la animal; căderea pietrelor în *Europa* și în *America*; lumina focului din sobă și din soare; reflexia luminii pe pămînt și pe planete.

Ipoteza III. Orice corp se poate transforma în alt corp de orice gen, și poate lua succesiv toate gradele intermediare ale calităților.

Ipoteza IV. Centrul sistemului lumii este în repaus.

Aceasta este admisă de toți, în timp ce unii afirmă că în centru este așezat pămîntul, alții că e soarele.

Ipoteza V. Planetele din jurul lui Jupiter descriu, cu razele duse la centrul lui Jupiter, arii proporționale cu timpurile, și timpurile lor periodice sînt în raportul de 3/2 al distanțelor de la centrul acestora.

. . . .

Ipoteza VI. Cele cinci planete primare: Mercur, Venus, Marte, Jupiter și Saturn înconjură cu orbitele lor Soarele.

. . . .

Ipoteza VII. Timpurile periodice ale celor cinci planete primare, și (fie a Soarelui în jurul pămîntului, fie a Pămîntului în jurul Soarelui) sînt în raportul de 3/2 a distanțelor mijlocii de la Soare.

Ipoteza VIII. Planetele primare, cu razele duse la Pămînt, nu descriu arii proporționale cu timpurile; dar cu razele duse la Soare parcurg arii proporționale cu timpurile.

. . . .

Ipoteza IX. Luna descrie cu raza dusă la centrul Pămîntului o arie proporțională cu timpul».

În ediția a II-a Newton și Cotes nu au menținut ca ipoteză decît pe a patra care se referă la centrul lumii. Nu e greu de ghicit din ce motiv a continuat Newton să considere sistemul lui Copernic ca o ipoteză pe care o susțin «unii», în timp ce «alții» aderă la sistemul lui Ptolemeu. Primele trei ipoteze capătă numirea de reguli de filozofare și în același timp în locul celei de-a treia apare următoarea regulă:

«*Regula III. Calitățile corpurilor care nu pot fi nici intensificate și nici slăbite, și care se află în toate corpurile în care se pot face experiențe, trebuie considerate drept calități ale tuturor corpurilor*».

Ipotezele V—IX au primit numele de *fenomene*, cărora li s-a adăugat încă unul referitor la sateliții lui Saturn.

În ediția a III-a a *Principiilor* schimbările de mai sus s-au păstrat adăugîndu-se însă și regula IV.

p. 314. *Regula III.* În ediția a II-a și a III-a a *Principiilor*, această regulă înlocuiește ipoteza III din ediția I, care era formulată astfel: «Orice corp se poate transforma în alt corp de orice gen, și poate lua succesiv toate gradele intermediare ale calităților».

Ipoteza III exprimă concepția lui Newton despre unitatea materiei. O astfel de concepție era naturală la Newton care s-a ocupat mult cu chimia și a studiat transformările reciproce ale corpurilor. Încă într-un memoriu din 1675 își exprimă părerea că «este probabil că toate substanțele s-au născut din eter». El merge chiar mai departe și în Întrebarea 30 din *Optica* sa se întreabă: «Oare corpurile dense și lumina nu se transformă reciproc unul în celălalt, și corpurile nu primesc o mare parte din activitatea lor prin particulele luminoase ce intră în compoziția lor?... Transformarea corpurilor materiale în lumină și invers este de acord cu rațiunea și cu natura, care pare că de asemenea se delectează în transformări de acest fel».

Această concepție carteziană despre unitatea materiei, potrivit căreia toate transformările din natură au loc după legi simple, era însă în contradicție cu ideile lui Bentley și Cotes,

care susţineau că fenomenele naturii au loc numai din voinţa lui Dumnezeu. Bentley, într-o scrisoare către Newton din 18 februarie 1692, caută să combată teoria lui Descartes, care afirma că materia trebuie în mod necesar să se transforme din haos în lume, pe care o guvernează legi simple.

Cauza înlocuirii ipotezei III cu regula III nu poate fi deci decît antagonismul celor două concepţii. Şi aici ca şi în alte chestiuni ideologice Newton a avut slăbiciunea de a ceda insistenţelor lui Bentley-Cotes.

În regula III Newton se ocupă cu calităţile tuturor corpurilor, adică cu proprietăţile generale ale materiei. Ca atari consideră el extinderea, duritatea, impenetrabilitatea, mobilitatea şi forţa de inerţie; nu introduce în această listă nici divizibilitatea şi nici gravitaţia.

Cu dezvoltarea ştiinţei, concepţia lui Newton asupra proprietăţilor generale ale materiei a fost depăşită. Potrivit concepţiei materialist-dialectice ştiinţa nu poate stabili proprietăţile şi manifestările materiei fiindcă materia este inepuizabilă, ca şi procesul cunoaşterii ei. Prin urmare deodată cu evoluţia ştiinţei progresează şi cunoştinţele asupra proprietăţilor materiei. Astfel, dezvoltarea cunoştinţelor despre structura materiei, mai ales despre moleculă şi atom, au infirmat felul de a vedea al lui Newton privitor la impenetrabilitatea materiei. După ce s-a descoperit structura complexă a atomului nu se mai poate vorbi de impenetrabilitatea materiei. Fizica modernă a arătat că nucleul atomic este separat de electroni printr-un spaţiu care întrece de mii de ori dimensiunile acestuia. Particulele de iuţeală mare pot pătrunde în interiorul atomului, avînd posibilitatea să atingă nucleul şi, dacă au iuţeală suficientă, îl pot dezagrega. Prin urmare o impenetrabilitate absolută, în sensul lui Newton a materiei nu există.

În privinţa gravitaţiei, Newton nu este de acord cu Cotes. În timp ce Cotes în prefaţa ediţiei a II-a « din faptul că toate corpurile asupra cărora posedăm experienţe sînt grele » deduce că « chiar şi acelea asupra cărora nu posedăm experienţe sînt grele », prin urmare gravitatea este o proprietate tot atît de generală ca şi extinderea, mobilitatea şi impenetrabilitatea, Newton este cu mult mai rezervat; scriind: « dacă prin experienţe şi observaţii astronomice în mod universal se constată că toate corpurile din jurul Pămîntului sînt grele... trebuie să zicem potrivit acesteia că toate corpurile gravitează unul spre celălalt », el ajunge la altă concluzie în privinţa gravităţii. Într-adevăr el spune: « Totuşi nu afirm că gravitatea este esenţială corpurilor », cum este extinderea, impenetrabilitatea etc. Apoi continuă: « Prin forţă inerentă eu înţeleg numai forţa de inerţie. Aceasta e invariabilă. Îndepărtîndu-ne de pămînt gravitatea se micşorează ». De ce a permis totuşi lui Cotes să pună în prefaţă afirmaţii pe care el nu le aproba? Atitudinea lui se vede clar din următoarele rînduri scrise lui Cotes cu privire la prefaţă: « Dacă veţi scrie o nouă prefaţă, eu nu trebuie să o văd, pentru a nu fi răspunzător de ea ». Se vede de aici atitudinea de compromis ce caracteriza epoca ce a condus la « revoluţia glorioasă » din 1688.

O altă problemă importantă pe care o menţionează Newton în explicările date regulei III este aceea a forţei de inerţie, singura pe care o consideră ca forţă inerentă a materiei. Forţa de inerţie este o proprietate pasivă care face ca corpurile să-şi păstreze starea de mişcare opunîndu-se atît măririi, cît şi micşorării vitezei, dar datorită căreia ele nu pot să se pună singure în mişcare. Cu acest singur principiu de inerţie nu se poate explica mişcarea corpurilor, prin urmare este necesar un alt principiu activ care să producă mişcarea. În concepţia lui Newton acesta ar fi « primul impuls » de origine divină. Bentley, care în această privinţă e de acord cu Newton, merge mai departe şi admite ca principiu activ, imaterial, care pune în mişcare materia, gravitaţia. Newton însă nu-l urmează pe Bentley pe acest drum afirmînd că problema forţelor active necesită cercetări serioase.

p. 316. *Fenomenul I.* În ediţia I a *Principiilor*, în primul alineat al explicărilor date acestui fenomen, în propoziţia: « Iar astronomii sînt de acord că timpurile periodice sînt în raportul puterii 3/2 a semidiametrelor orbitelor», Newton scrie: «şi Flamsteed, care toate le-a măsurat mai precis cu micrometrul şi din eclipsele sateliţilor, prin scrisorile trimise mie, ca şi prin datele sale numerice pe care mi le-a comunicat, a confirmat că raportul de 3/2 se obţine atît de precis, cît e posibil să-l cuprindem cu simţurile. Ceea ce este evident din următorul tablou».

În ediţiile ulterioare ale *Principiilor* numele lui Flamsteed nu mai e amintit, propoziţia de mai sus fiind pur şi simplu ştearsă. Motivul acestei ignorări a contribuţiei lui Flamsteed este cearta ce s-a iscat între acesta şi Newton. Cei doi oameni de ştiinţă s-au cunoscut în 1670, iar în 1680 a început între ei o corespondenţă ştiinţifică referitor la comete, urmată de comunicarea observaţiilor pe care le făcea Flamsteed la Greenwich şi de care Newton avea mare trebuinţă. Colaborarea lui Flamsteed a fost atît de preţioasă, încît Newton a menţionat-o în ediţia întîi a *Principiilor.* Ea a devenit şi mai valoroasă după apariţia cărţii lui Newton, în momentul cînd acesta a elaborat o teorie a lunei, pentru verificarea căreia erau necesare observaţii precise. Flamsteed i-a furnizat date preţioase lui Newton pînă în 1692. Trimiţîndu-i materialul de observaţie necesar, Flamsteed se plîngea de atitudinea dispreţuitoare a lui Newton. Într-una din scrisori se plînge direct de lipsa de apreciere de către Newton: «Sînt de acord că sîrma este mai scumpă decît aurul din care e făcută. Dar eu am strîns acest aur, l-am curăţat, l-am spălat şi nu îndrăznesc să cred că dv. apreciaţi prea puţin ajutorul meu, numai fiindcă l-aţi obţinut cu atîta uşurinţă».

Relaţiile dintre Newton şi Flamsteed s-au înăsprit şi mai mult cu ocazia tipăririi de către Societatea regală a catalogului de stele întocmit de Flamsteed. Propunerea pentru tipărire fiind făcută de Newton, prinţul George care a finanţat tipărirea a propus o comisiune pentru supravegherea editării catalogului, sub prezidenţia lui Newton. Comisiunea a procedat însă în aşa fel încît Flamsteed s-a simţit jignit, plîngîndu-se de modul arbitrar în care aceasta tratează problema tipăririi. Tensiunea s-a mărit şi mai mult cînd regina Angliei a numit o comisiune a Societăţii Regale pentru supravegherea observatorului din Greenwich. Preşedintele acestei comisii a fost iarăşi Newton. În 1711 Flamsteed a fost invitat în faţa comisiei pentru a prezenta un raport despre starea instrumentelor observatorului. Felul în care l-a tratat Newton a fost umilitor pentru Flamsteed, care trebuia să dea seama de starea instrumentelor care, în mare parte, erau proprietatea sa. Cearta a continuat în jurul tipăririi catalogului şi cei doi adversari nu s-au împăcat, Flamsteed murind în 1720. Acad. S. I. Vavilov (*Isaac Newton*, p. 239) caracterizează antagonismul celor doi savanţi astfel: « Certurile cu Flamsteed sînt o ciocnire tipică între Faust şi Wagner, unde geniul este opus răbdării ».

p. 316. Newton menţionează aici o « lunetă de 123 de picioare» folosită de James Pound în 1719. Obiectivul i-a fost împrumutat de Societatea Regală şi l-a montat în Naustead Park, Essex, pe vîrful unui stîlp înalt, pe care i l-a procurat însuşi Newton. Astfel de lunete se întrebuinţau curent pe timpul lui Newton şi concurau cu telescopul inventat de el.

Primele lunete construite de Zacharias Jansen, Lippershey, Galileu etc. aveau dezavantajul că posedau o putere măritoare mică şi nu dădeau o imagine clară, atît din cauza aberaţiei de sfericitate, cît şi a celei cromatice. Pentru a înlătura aceste inconveniente Christian Huygens a calculat, în 1655, o mulţime de lunete avînd o distanţă focală mare si deci o lungime considerabilă. Ele au fost construite cu ajutorul fratelui său Constantin, care avea o abilitate deosebită de a construi aparate. Newton scrie în *Optica* sa din 1704: « o lunetă de 64 picioare lungime cu o apertură de 2 1/2 degete măreşte de aproape 120 de ori cu aproape aceeaşi claritate ca una avînd lungimea de un picior, apertura

de 1 1/3 degete, care mărește de 15 ori». Societatea Regală primi de la Huygens trei lentile cu distanțe focale respectiv de 123, 170 și 210 picioare. Obiectivul de 123 de picioare mprumutat lui Pound era tocmai una din cele trei lentile împrumutate de Huygens.

Lui Newton i-a reușit să înlăture aberația de sfericitate a lentilelor, dar nu și pe cea cromatică, de aceea a imaginat și a construit telescopul cu reflexie. Construcția lunetelor foarte lungi era cît se poate de nepractică, mai ales că s-a ajuns la lunete de 300 de picioare lungime. Huygens a încercat să simplifice construcția lunetelor, adoptînd pentru observațiile nocturne luneta « aeriană », fără tub, al cărei obiectiv era montat pe un stîlp înalt, fiind adus în direcția ocularului cu ajutorul unoi frînghii. Luneta folosită de Pound era o astfel de lunetă « aeriană ».

Pe la mijlocul veacului al XVIII-lea, lunetele « aeriene » au fost scoase din uz în urma invenției de către opticianul londonez John Dollond a lunetei acromatice. El și-a prezentat luneta Societății Regale în 1758. În curînd lentilele acromatice au fost întrebuințate și la construcția microscoapelor.

p. 321. *Prop. IV. Verificarea legii gravitației.* În toate trei edițiile *Principiilor* această propoziție este identic formulată, cu excepția astronomilor citați. În timp ce în ediția I menționează pe Vendelin, Copernic, A. Kircher și pe Tycho Brahe, în ediția a III-a amintește pe Ptolemeu, Vendelin, Huygens, Copernic, Street și Tycho. În ediția a III-a după propoziție este adăugată o scolie.

Luna a jucat un rol fundamental în descoperirea și în verificarea legii atracției universale. Newton însuși povestește că, în 1666, « am început să mă gîndesc că gravitatea se extinde pînă la orbita Lunii... și deci am comparat forța necesară să mențină Luna pe orbita sa cu forța gravității la suprafața Pămîntului» (*Portsmouth Collection*, Sect. III, Div. XI, No. 41). Cu toate că această comparație, adică întîia verificare a fost făcută în 1666, el nu a publicat nimic despre ea pînă la apariția *Principiilor.*

Asupra cauzei amînării publicării legii gravitației universale timp de 20 de ani există două păreri. Cea dintîi e a lui H. Pemberton, editorul ediției a III-a a *Principiilor.* El susține că în 1666 Newton nu dispunea de o valoare exactă a razei pămîntești, necesară verificării legii, deoarece ea se baza pe valoarea meridianului cunoscută de marinarii englezi, anume de 60 de mile pentru un grad de latitudine, valoarea adevărată fiind de 69,5 mile. De aici Pemberton trage concluzia că Newton nefiind satisfăcut de precizia verificării, « a renunțat deocamdată să se mai cugete asupra acestui lucru». Abia în 1684, luînd cunoștință la o ședință a Societății Regale de măsurările lui Jean Picard care, din însărcinarea Academiei de Științe de la Paris, a măsurat un grad de latitudine obținînd valoarea de 69 1/3 mile, Newton își verifică din nou legea și văzînd că ea e confirmată se hotărî să o publice. Robison publică în *Mechanical Philosophy* din 1804, p. 288 pentru întîia dată anecdota care circula pe atunci că Newton, refăcîndu-și calculele cu noile date, a fost cuprins de o emoție atît de intensă încît nu a putut să-și continue operațiile și a rugat pe un prieten al său să le ducă la bun sfîrșit.

În 1887, cu ocazia aniversării celui de-al doilea centenar al apariției *Principiilor*, astronomul J. C. Adams și matematicianul L. Glaisher, cercetînd manuscrisele lui Newton publicate în *Portsmouth Collection* au ajuns la altă concluzie. Într-unul din manuscrise au găsit că Newton comparînd în 1666 valoarea teoretică dată de legea gravitației cu accelerația gravitatională, a găsit că « ele corespund aproape exact». Această mărturisire scrisă de însuși Newton nu se poate explica — spun Adams și Glaisher — decît admițînd că el s-a folosit de date exacte. Atari date existau mai multe, începînd cu măsurările lui Snellius din 1617 care dau pentru un grad de latitudine valoarea de 66 1/3 mile, și ale lui Norwood din 1636, care au dat 68 1 2 mile. Cajori, care se alătură

la părerile lui Adams și Glaisher, în nota la această propoziție scrie următoarele:

« Newton nu cunoștea în 1666 valorile lui Snellius și Norwood asupra mărimii Pămîntului ? Este curios că Newton nicăieri în scrierile sau scrisorile sale nu menționează nici o valoare numerică înainte de apariția *Principiilor* (1687) în care adoptă determinarea lui Picard. Totuși acum s-a stabilit definitiv că Newton era familiar cu valoarea lui Snellius, cel puțin începînd cu 1672 și foarte probabil de la 1666. Aceasta se știe din ediția sa a *Geografiei* lui Varen publicată în acel an. Varen dă în această carte o mică tabelă a distanțelor la care se poate vedea un vîrf de munte de înălțime cunoscută de pe mare, abstracție făcînd de refracție. Calculul lui Varen e greșit și e corectat de Newton. *Această corecție a fost făcută folosind valoarea lui Snellius.* Astfel un munte înalt de o milă germană se putea vedea la o distanță de 291/4 de mile germane după Varen și la 411/2 mile germane după Newton (*Mathematical Gazette*, vol. 14, 1929, p. 415)».

Cauza care l-a determinat pe Newton să amîne publicarea legii gravitației a fost alta. Adams, studiind cu atenție corespondența lui din perioada dinaintea apariției *Principiilor* a arătat că dificultatea verificării legii atracției universale era de altă natură. Anume Newton nu putuse calcula atracția unei sfere asupra unui punct exterior. Abia în 1685 fu în stare să arate că o sferă, a cărei densitate variază numai în funcție de distanța de la centru, atrage un punct exterior ca și cînd întreaga sa masă ar fi concentrată în centrul ei, după cum expune în *Principii.* Cartea I, propr. LXXV și LXXVI și în corolare. Prin această demonstrație legea gravitației universale căpătă și baza teoretică necesară.

În prop. IV, Newton ia ca distanță mijlocie a Lunii de la Pămînt, considerat ca nemișcat, 60 de raze pămîntești. La sfîrșitul propoziției însă menționează că, dacă admitem că Pămîntul și Luna se mișcă în jurul Soarelui, această distanță trebuie luată de 601/2 raze terestre. Ipoteza este adevărată căci se știe că raza cercului descris de Lună în jurul Pămîntului considerat ca imobil este mai mică decît distanța ei de la centrul Pămîntului. ce se mișcă în jurul centrului comun de greutate, după cum rezultă din cartea I, prop. LX. Newton s-a convins de exactitatea ipotezei sale prin aceea că mărind valoarea de 60 de raze terestre în raportul cerut de legea gravitației universale presupusă neschimbată pentru cazul cînd Pămîntul se mișcă, obținu pentru distanța Lunii de la Pămînt 60 1/2 raze terestre, de acord cu valoarea dată de astronomi.

p. 329. *Ipoteza I.* Dintre toate cele nouă ipoteze ale ediției întîi a *Principiilor*, în edițiile următoare n-a rămas ca ipoteză decît cea referitoare la sistemul lui Copernic. Cu toate că potrivit legii gravitației universale nici Soarele, nici Pămîntul nu pot fi în repaus, ele mișcîndu-se în jurul centrului lor comun de greutate, Newton nu are curajul să considere sistemul lui Copernic decît ca o ipoteză, în ediția întîi. Cu atît mai puțin nu avea să se pronunțe în ediția a II-a editată de Cotes. El afirmă numai că centrul lumii e în repaus, de unde deduce imediat că și centrul sistemului solar trebuie să fie în repaus. Dar acest centru al sistemului solar este în același timp și centrul lumii și fiind foarte aproape de Soare, centrul lumii, adică al universului este foarte aproape de Soare. Indirect se ajunge deci tot la sistemul lui Copernic.

p. 329. *Prop. XI–XII.* Maclaurin, unul din urmașii lui Newton, pornind de la ipoteza că centrul universului este în repaus, își imaginează astfel formarea universului: « Putem presupune că întreaga materie din care e compus universul a fost creată într-o singură masă, unde se găsește acum centrul de greutate al sistemului; că din această masă s-au format diferite corpuri și s-au separat unele de altele la distanțe convenabile, unde își primiră mișcările de proiecție; și că forțele care le separară și le puseră în mișcare observă legea naturii care pretinde o egalitate a acțiunii și reacțiunii și care actual are loc în acțiunile tuturor forțelor;

în acest fel au început aceste mişcări şi vor continua în etern, fără a produce vreo schimbare în centrul de greutate al sistemului general» (*An account of Sir Isaac Newton's philosophical discoveries*, London, 1748).

p. 330. *Prop. XIII. Perturbaţii.* Această propoziţie ne relevă unul din aspectele *metodei* de cercetare a lui Newton, diferită de accea a predecesorilor săi. În timp ce Bacon de Verulam preconiza ca mijloc de cercetare ştiinţifică inducţia, adică metoda analitică, Descartes afirma prioritatea aproape excluzivă a deducţiei, adică a metodei sintetice. În metoda lui Newton inducţia şi deducţia sînt strîns legate una de cealaltă, ambele contribuind la aflarea adevărului ştiinţific. El mînuieşte cu aceeaşi dibăcie cînd analiza, cînd sinteza, combinîndu-le în mod potrivit.

Metoda pe care o foloseşte Newton la stabilirea legilor mişcării este cea inductivă. Axiomele mişcării nu sînt nici definiţii, cum crede Mach, şi nici adevăruri evidente prin sine însuşi, cum erau considerate axiomele geometriei, ci concluzii provizorii bazate pe cea mai largă generalizare a fenomenelor observate direct sau studiate prin experienţe. Potrivit regulei IV aceste concluzii deduse din fenomene trebuie considerate ca absolut sau aproximativ adevărate, pînă ce alte fenomene le vor confirma sau infirma. Dar prin aceasta Newton nu consideră încheiat procesul cunoaşterii, ci aplică metoda sintetică, arătînd că dacă admitem legile mişcării ca adevărate consecinţele lor sînt de acord cu experienţa. Acest lucru îl face în capitolul despre «axiomele şi legile mişcării» din *Principii* unde, după ce expune legile mişcării şi consecinţele lor, arată cu o bogăţie de exemple mai ales din funcţionarea maşinilor că toate legile şi îndeosebi legea acţiunii şi reacţiunii, care era o lege nouă şi greu de înţeles, se verifică în toate cazurile cunoscute.

În cazul gravitaţiei universale Newton procedează invers. El consideră ca date legile lui Kepler, din care deduce că planetele se mişcă pe elipse din cauza unei forţe îndreptată spre Soare şi care variază invers proporţional cu pătratul distanţei planetei de la focarul ocupat de Soare. Generalizînd apoi legea atracţiei la planete, admiţînd deci că între planete şi sateliţii lor, sau între oricare planete se exercită aceeaşi forţă de atracţie, ajunge la concluzia că elipsele lui Kepler sînt numai o primă aproximaţie a unei mişcări mai complicate, în care trebuie să ţinem seama de perturbaţiile datorite acţiunii mutuale a planetelor. În acest fel Newton foloseşte ca mijloc de generalizare nu inducţia, ca în cazul legilor mişcării, ci deducţia, care serveşte la corectarea legilor lui Kepler.

Newton menţionează în prop. XIII efectele calitative ale perturbaţiilor; studiul lor precis avea să absoarbă munca celor mai mari fizicieni ai veacului al XVIII-lea şi al XIX-lea, dintre care amintim pe Clairaut, D'Alembert, Lagrange, şi Laplace. Încă Halley prevăzuse că potrivit legii lui Newton cometa ce s-a văzut în anii 1531, 1607 şi 1682 se va reîntoarce prin 1759. Clairaut făcînd calcule precise determină întoarcerea acesteia cu o eroare de o lună. În realitate cometa Halley apăru în ziua de Crăciun a anului 1758 cu o lună şi o zi înainte de data calculată de Clairaut.

Rezultate splendide pentru legea atracţiei universale s-au obţinut în cazul *problemei celor trei corpuri.* Această problemă are două aspecte. Dacă considerăm că unul din corpuri este foarte îndepărtat ea conduce la cazul particular al teoriei Lunii, pe cînd dacă masa perturbatoare este foarte mică ajungem la teoria planetelor.

Pentru a explica perturbaţiile planetei Uran descoperită de Herschel în 1789, Le Verrier calculă poziţia planetei care putea cauza aceste iregularităţi. Astronomul Galle de la observatorul din Berlin descoperi în ziua de 23 septembrie 1846 planeta Neptun la o distanţă mai mică de un grad de la poziţia calculată de astronomul francez.

Inegalităţile Lunii sînt calculate de astronomi cu o precizie atît de mare că abaterea maximă a satelitului nostru de la poziţiile calculate în tabele astronomice nu trece de 15″

în două secole şi jumătate, ceea ce înseamnă un avans sau întîrziere de cel mult o secundă de timp de apariţie în faţa reticulului lunetei a marginii Lunii faţă de previziunea tabelelor astronomice.

Legea gravitaţiei universale a fost stabilită de Newton pentru sistemul nostru solar; ea se verifică însă pentru regiunile cele mai îndepărtate ale stelelor fixe. Astfel mişcările de revoluţie ale stelelor duble puse în evidenţă de W. Herschel au loc după legile lui Kepler, după cum a arătat mai întîi F. Savary în 1827 pentru ξ din constelaţia Ursa Mare.

p. 333. *Prop. XVIII. Nicolaus Mercator* (1620—1687) cu numele adevărat Kauffmann, născut la Holstein, a trăit mult în Anglia, de unde a trecut în Franţa. A făcut planul şi a construit fîntînele săritoare de la Versailles. Refuzîndu-i-se plata lucrării pînă nu va trece la catolicism, a murit de necaz, în mizerie. Opera sa principală este *Logaritmotehnis* apărută în 1668, datorită căreia a ajuns membru al Societăţii Regale. În această lucrare el propune o nouă metodă de a calcula logaritmii, bazată pe teoria seriilor.

p. 333. *Prop. XVIII şi XIX. Turtirea Pămîntului.* Teoria gravitaţiei universale permite determinarea formei planetelor şi în particular a Pămîntului admiţînd că aceste corpuri au evoluat de la starea fluidă spre cea solidă. Un corp fluid în rotaţie va lua o figură de echilibru sub acţiunea forţei centrifuge şi a celei gravitaţionale, Newton a ajuns la concluzia că în această ipoteză forma planetelor şi a Pămîntului nu este sferică, ci ele sînt turtite la poli. Acest lucru a fost cunoscut de Newton pentru Jupiter din observaţiile astronomului Domenico Cassini de la Paris şi ale lui Flamsteed, pe care îi citează în ediţia I a *Principiilor*, Cartea a III-a, prop. XIII. În ediţia a III-a nu mai aminteşte pe nici unul, în prop. XVIII spunînd numai că «observaţiile astronomilor fiind de acord», iar în prop. XIX citîndu-l numai pe Cassini împreună cu alţi astronomi.

Newton află că diametrul ecuatorului pămîntesc faţă de lungimea axei sale de rotaţie este de aproximativ 230 către 229, în ipoteză că densitatea pămîntului este aceeaşi. Turtirea Pămîntului dedusă de aici ar fi deci de 1/230. Acest fapt nou trebuia verificat prin măsurări precise. Ele au durat mult timp şi au dat naştere la discuţii aprinse în lumea ştiinţifică. Măsurările au fost făcute îndeosebi de francezi din iniţiativa Academiei de Ştiinţe de la Paris. Ele au început prin 1680 sub conducerea lui D. Cassini şi au continuat sub aceea a fiului său J. Cassini. Terminate la 1718 aceste măsurări au dus la concluzia că nu este turtit la poli, ci lungit în direcţia axei.

Discuţiile au urmat timp de două decenii între englezii care susţineau pe Newton şi francezii care negau turtirea pămîntului şi au avut drept rezultat trimiterea a două expediţii ştiinţifice în vederea măsurării meridianului terestru, una la ecuator, cealaltă în apropierea polului nord. Cea dintîi a plecat în 1735 sub conducerea lui La Condamine şi Bouguer în Peru. Rezultatele acestei expediţii s-au publicat în lucrarea: *La figure de la terre determinée par les observations de MM. Bouguer et de la Condamine*, Paris, 1749.

A doua expediţie a plecat în 1736 în Laponia, sub conducerea lui Maupertuis şi a publicat rezultatele cu mult mai curînd într-o broşură intitulată: *Sur la figure de la terre determinée par les observations de Mr. Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier et Outhier*, Amsterdam, 1738.

Rezultatele celor două expediţii au confirmat în mod neîndoielnic teoria lui Newton. Controversele au mai durat cîtva timp, dar în urmă au dispărut. Ţinta atacurilor a fost mai ales Maupertuis, pe care Voltaire îl numi «applatisseur de la terre et du Cassini», iar în *Discours sur la moderation* îi adresă versurile:

«Vous avez confirmé dans des lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui»

Potrivit măsurărilor geodezice recente turtirea Pămîntului este de 1/297,4. Această turtire se poate determina şi printr-o perturbaţie specială a mişcării Lunii, care depinde de ea.

p. 336. *Prop. XX. Variaţia greutăţii cu latitudinea.* Newton stabileşte că greutatea corpurilor la suprafaţa Pămîntului variază de la ecuator spre poli proporţional cu pătratul sinusului latitudinii. Helmert a ajuns, în baza a numeroase măsurări geodezice precise la formula empirică

$$g_\varphi = 978{,}00(1+0{,}00531 \sin^2\varphi)$$

unde g_φ este acceleraţia gravitaţională la latitudinea de φ grade.

Toise este o unitate de măsură veche franceză egală cu 1949 metri.

Piciorul francez este egal cu 32,4 cm, iar *piciorul englez* era de 30,4 cm.

p. 341. *Prop. XXIII. Sateliţii lui Jupiter.* Pe timpul lui Newton se cunoşteau numai cei patru sateliţi ai lui Jupiter pe care-i descoperise Galileu. « Satelitul cel mai din afară » menţionat aici de Newton este Callisto. Azi se cunosc 11 sateliţi ai lui Jupiter, dintre care unul este în interiorul, ceilalţi în afara sferei lui Callisto.

p. 341. *Prop. XXIV. Flux şi reflux.* Încă în antichitate s-a încercat să se explice fenomenul mareelor, cunoscut atît de bine de marinari. Cea mai răspîndită idee era că el depinde de mersul Lunii şi s-au încercat diferite teorii care să explice relaţia dintre aceste fenomene. Astfel Srabon menţionează teoriile lui Eratostene, Seleucos şi Posidonius asupra mareelor. Idei analoge despre acţiunea Lunii asupra mareelor au fost susţinute de Ptolemeu, sf. Augustin, R. Bacon, Albertus Magnus, Gilbert, Leonardo da Vinci etc.

În afara acestei păreri aproape generale alţii au încercat să explice mareele punîndu-le în legătură cu alte fenomene, respingînd acţiunea ocultă a Lunei. Atari păreri se întîlnesc deja la vechii saxoni şi danezi, după cum relatează Paulus Diaconus (720—787), care o acceptă ca şi Ateneodorus din Tars (80 î.e.n.- 2). Cea mai importantă dintre aceste teorii este a lui Galileu care atribuie mareele mişcării neregulate ce rezultă din compunerea rotaţie diurne şi anuale a pămîntului.

Newton a supus unei critici severe teoria lui Galileu, ajungînd cel dintîi la o explicare calitativă satisfăcătoare a mareelor cu ajutorul teoriei gravitaţiei universale. El reuşeşte să stabilească un acord aproximativ între teorie şi observaţii. În afară de aceasta încearcă să determine acţiunea separată a Lunii şi a Soarelui asupra apei mării. Astfel el arată că forţa cu care Luna singură ridică apa mării este proporţională cu masa Lunii şi invers proporţională cu cubul distanţei dintre Lună şi Pămînt. Fenomenul e analog pentru cazul Soarelui singur şi al Pămîntului. Calculînd raportul acestor forţe cu ajutorul observaţiilor mareelor de la Bristol, efectuate de Sturmy, şi cunoscînd masa Soarelui, Newton găseşte că masa Lunii este de 1/39 din masa Pămîntului, deci o valoare aproape de două ori mai mare decît cea reală, care este aproximativ de 1/91 din masa Pămîntului.

Teoria aproximativă a lui Newton bazată pe ipoteze simplificatoare nu putea prevedea mersul mareelor. Problema fiind şi de ordin practic, fiindcă interesa în mare măsură navigaţia, Academia de Ştiinţe de la Paris puse un premiu pentru cea mai bună lucrare referitor la acest subiect. Premiul s-a împărţit în 1740 între Euler, Maclaurin şi Daniel Bernoulli. Îndeosebi este important memoriul lui Bernoulli, care între alte ipoteze interesante admise că densitatea pămîntului creşte către centru. De aici deduse că acţiunea Soarelui şi a Lunii sînt cu mult mai mari decît crezuse Newton. El mai află că masa Lunii este de aproape a 60-a parte a masei Pămîntului, valoare cu mult mai apropiată de cea adevărată decît cea dată de Newton.

Un progres important în teoria mareelor a fost realizat de Laplace care, în 1775, stabili ecuaţiile diferenţiale ale unui fluid ce acopere suprafaţa Pămîntului şi este atras atît de Soare cît şi de Lună. Dar nici ipoteza lui Laplace nu era cu totul de acord cu faptele, fiindcă la fel cu Newton şi el făcu ipoteza că Pămîntul este complet acoperit cu apă. Teoria lui Laplace ducînd la calcule prea complicate, către sfîrşitul veacului al XVIII-lea G. G. Lubbock şi G. Whewell au încercat să ajungă la cunoaşterea fluxului şi refluxului cu ajutorul a numeroase observaţii. Concluzia lor este că pentru ca fenomenele mareelor să aibă loc conform teoriei, ar trebui să avem o suprafaţă mare de apă neîntreruptă, condiţie realizată numai în Oceanul de sud. Prin urmare în acest ocean se nasc mareele care se propagă în toate direcţiile, deci şi în Oceanul Atlantic, unde maximul fluxului unei sizigii a echinocţiului ajunge după un anumit timp. În adevăr observaţia arată că fluxul maxim care la orele 12 se află în strîmtoarea Magellan, la miezul nopţii se găseşte la Capul Corrientes (Rio de La Plata), ziua următoare la amiazi este la insulele Canare, iar la orele 24 următoare ajunge la Brest, adică parcurge distanţa Magellan-Brest în 36 de ore. Cu toate că observaţiile ulterioare au arătat că afirmaţiile lui Lubbock şi Whewell nu sînt de acord perfect cu realitatea, ele constitue totuşi un punct de plecare de importanţă fundamentală.

Cu lordul Kelvin, G. Darwin, Rebeur-Paschwitz etc. studiul mareelor intră într-o fază nouă permiţînd stabilirea şi cunoaşterea mareelor solide. Îndeosebi sînt importante studiile lui G. Darwin (*Scientific Papers*, vol. II) asupra fenomenului frecării produs de maree, studii care l-au condus la o interesantă teorie cosmogonică.

p. 348. *Prop. XXVIII.* « Razele » din text sînt la fel ca Ad din Cartea I, lema XI, unghiul curbiliniu dAB fiind unghiul de contact. Dacă gA şi gB se iau drept raze de curbură, avem aproximativ $(gb+bd)^2 = gA+Ad^2$, sau curbura $\frac{1}{gA} = \frac{2bd}{Ad^2}$. Dacă luăm pe bd ca tangentă evanescentă a unghiului de contact, curburile a două curbe, pentru valori infinitezimale egale ale lui Ad sînt între ele precum tangentele acestor unghiuri.

p. 378. *Lema III.* Prin « mişcare » se înţelege *momentul* sau cantitatea de mişcare mv. Admiţînd, pentru simplificarea problemei, că atît viteza unghiulară, cît şi densitatea au valori unitare, prima afirmaţie a lui Newton că sfera şi cilindrul circumscris au momente în raportul de $3\pi:16$ se poate demonstra astfel.

Momentul unei arii circulare de rază R, ce se roteşte în jurul unei axe perpendiculare pe ea şi care trece prin centru (luînd r drept rază variabilă a unui inel plat, circumferinţa $2\pi r$, şi lăţimea dr) este

$$2\pi \int_0^R r^2\, dr = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Prin urmare momentul cilindrului în chestiune este $\frac{4}{3}\pi R^4$.

În ce priveşte sfera rotitoare, să luăm fiecare secţiune a ei perpendicular pe axa de rotaţie, momentul căreia este de $\frac{2}{3}\pi R^3 \sin^3\alpha$ ori grosimea infinitezimală $R\sin\alpha\, d\alpha$, sau $\frac{2}{3}\pi R^4 \sin^4\alpha\, d\alpha$, α fiind unghiul dintre R şi abscisă. Momentul întregei sfere este deci

$$\frac{4}{3}\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\alpha\, d\alpha = \frac{1}{4} R^4 \pi^2$$

Avem deci momentul sferei: momentul cilindrului $= \frac{1}{4}\pi^2 R^4 : \frac{4}{3}\pi R^4 = 3\pi : 16$ (1)

A doua afirmaţie a lui N e w t o n, că momentul cilindrului şi al unui inel îngust, ambele luate în jurul axei cilindrului, sînt precum dublul materiei din cilindru către triplul materiei din inel, este evidentă din proporţia

$$\frac{4}{3}\pi R^4 : 2\pi R^2 . dR = 2(2\pi R^3) : 3(2\pi R . dR). \quad (2)$$

Pentru a obţine momentul acestui inel în jurul propriului său diametru să înmulţim arcul său infinitezimal $Rd\alpha$ cu distanţa $R\cos\alpha$ a acestui arc de la diametrul vertical. Momentul inelului va fi atunci

$$4R^2 dR \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \, d\alpha = 4R^2 \, dR.$$

Deci a treia afirmaţie a lui N e w t o n în demonstraţie este evidentă din proporţia

$$2\pi R^2 dR : 4R^2 dR = 2\pi R : 4R. \quad (3)$$

Înmulţind între ei termenii corespunzători din proporţiile (1), (2), (3) şi simplificînd obţinem:

momentul sferei: momentul inelului în jurul diametrului său $= \pi^2 R^2 : 32dR = 3\pi^2 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) :$ $32(2\pi R dR) = 925\,275 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) : 1\,000\,000\,(2\pi R dR)\Big)$.

p. 384. *Prop. XL—XLII. Comete.* Aceste propoziţii nu sînt identice în cele trei ediţii ale *Principiilor,* fiindcă în ediţia a II-a şi a III-a textul e schimbat şi sînt introduse unele adaosuri. Atari adaosuri sînt corolarul IV din prop. XL şi corolarul şi scolia ce urmează după lema VIII. De asemenea sînt adause datele asupra cometei din 1681, ce urmează după « 20 noiembrie » în prop. XLI, şi în sfîrşit cele ce urmează după Q.E.I. în prop. XLII.

p. 385. *Lema V. Formule de interpolare.* N e w t o n se mai ocupă de formule de interpolare:

1. În *Methodus differentialis,* 1711;
2. în scrisoarea din 8 mai 1675 către John Smith;
3. într-un manuscris publicat abia în 1927;
4. într-o scrisoare din 13 iunie 1676 şi alta din 24 octombrie 1676 publicate mai întîi de J o h n C o l l i n s în *Commercium Epistolicum,* 1712.

p. 388. *Lema X.* Acad. A. N. K r î l o v, în *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* London, vol. 84, 1924, p. 392 atrage atenţia că teorema numită în tratatele moderne « teorema lui Euler », « teorema lui Lambert », sau « teorema lui Euler-Lambert » referitoare la relaţia dintre timpul de descriere al arcului unei orbite parabolice a cometelor, razele vectoare ce cuprind extremităţile arcului, şi coardă, nu e altceva decît expresia analitică a lemei X a lui N e w t o n. Acest lucru a fost relevat încă de L a g r a n g e în *Mécanique analytique,* part. II, § VII, p. 26. În articolul său K r î l o v arată că transformările algebrice sînt uşor de efectuat.

p. 389. *Prop. XLI. Exemplu.* N e w t o n se referă aici la observaţiile astronomice făcute de el însuşi în 1671 cu ajutorul unui « telescop de şapte picioare », probabil un reflector.

p. 408. *Prop. XLII.* În ediţia I-a *Principiile* se termină cu prop. XLII a cărţii a III-a, operaţia 3, cu formula consacrată « Q.E.I ». În ediţiile următoare, N e w t o n adaugă material de observaţie bogat asupra cometelor datorit lui H e v e l i u s, H a l l e y etc.

p. 416. *Scolie generală.* La sfîrşitul *Principiilor,* în ediţia a II-a şi a III-a, probabil la îndemnul lui B e n t l e y şi C o t e s, N e w t o n a pus o scolie generală, o concluzie a

marei sale opere. Dată fiind importanța filozofică a acesteia menționăm mai întîi adaosurile și schimbările din ediția a III-a față de textul primitiv al ediției a II-a.

În ediția a III-a este adausă propoziția: « Și pentru ca sistemul stelelor fixe să nu cadă din, cauza gravitații, unul către altul, a așezat aceste sisteme la distanțe imense unul de celălalt », apoi după « Dumnezeul lui Israel » cuvintele « Dumnezeul Dumnezeilor și Stăpînul Stăpînilor ». Propoziția « să nu zicem Perfecțiunea mea, Perfecțiunea voastră, Perfecțiunea lui Israel » din ediția a II-a a înlocuit-o cu « Dumnezeul etern; nu trebuie să zicem Infinitul meu sau Perfecțiunea mea ». În locul cuvintelor « El nu e eternitate sau infinitate » din ediția a II-a a pus « El nu e eternitate și infinitate ».

A adaos propoziția « Orice suflet care are percepție este ... Dumnezeu este același Dumnezeu, totdeauna și pretutindenea », precum și fraza: « Căci noi îl adorăm pe el și servitorii săi ... printr-o anumită asemănare, care deși nu este perfecta, totuși are ceva asemenea ».

Termenul de « cauză finală » e întrebuințat de Newton în sensul lui Aristotel, care deosebște patru feluri de cauze: materială, formală, eficientă și finală. Prin cea finală înțelege scopul pentru care e făcut un lucru. Filozofia marxistă a eliminat complet cauzele finale.

În scolia generală Newton trage concluzia definitivă că teoria vîrtejurilor nu poate explica mișcarea planetelor. Sistemul solar nu-și poate găsi explicarea numai în mecanică cu ajutorul gravitației universale. Admițînd atracția universală ne putem da seama de mișcarea planetelor și cometelor pe orbite, dar nu și de « poziția primitivă regulată a orbitelor ». « Acest sistem foarte elegant al soarelui, planetelor și cometelor nu a putut să se nască decît din mintea și puterea unei ființe inteligente și puternice » — adică a lui dumnezeu, spune Newton.

Combinarea materialismului mecanic cu teismul este una din caracteristicile principale ale filozofiei lui Newton. Engels scrie în această privință următoarele: « Dar ceea ce caracterizează îndeosebi această perioadă este elaborarea unei concepții de ansamblu originale, al cărei miez îl constituie ideea *invariabilității absolute a naturii.* Oricum ar fi luat naștere natura însăși, o dată ce există, ea rămîne neschimbată atîta timp cît dăinuește. Planetele și sateliții lor, o dată puși în mișcare de misteriosul « impuls inițial », continuă să se învîrtească în vecii vecilor pe elipsele trasate, sau în orice caz, pînă la sfîrșitul tuturor lucrurilor. Stelele rămîn pentru totdeauna fixe și nemișcate pe locurile lor, menținîndu-se reciproc în această poziție datorită « gravitației universale ». *(Dialectica naturii,* Editura de stat, 1954, p. 8).

Vorbind de teismul lui Newton, Voltaire scrie: « Intreaga filozofie a lui Newton conduce în mod necesar la cunoașterea unei ființe supreme, care a creat totul, a aranjat totul în mod liber. Căci, dacă după Newton, și după rațiune, lumea este finită, dacă există vid, materia nu există în mod necesar, deci ea și-a căpătat existența dintr-o cauză liberă. Dacă materia gravitează, după cum s-a demonstrat, ea nu gravitează din natura sa, după cum ea este extinsă din natură; ea a primit deci gravitația de la Dumnezeu. Dacă planetele se învîrtesc într-un sens și nu în altul, într-un spațiu fără rezistență, mîna creatorului lor este aceea care le-a dirijat cursul în acest sens cu o libertate absolută » *(Elements de philosophie de Newton,* première partie, chap. I).

Argumentul principal al existenței lui dumnezeu se reduce în *Principii* la așa-numitele « condiții inițiale ». In adevăr principiile mecanicii și legea atracției universale ne permit calculul traiectoriei unui corp dacă cunoaștem anumite condiții inițiale ca poziția, viteza, masa, care pot fi arbitrare. Aceste condiții inițiale în univers nu le-a putut stabili decît dumnezeu.

In afară de aceste argumente scoase din dinamică, Newton mai aduce și altele: armonia naturii și cauzele finale. In întrebarea 28 din *Optica* sa se întreabă: « Cum au fost

născocite corpurile animalelor atît de artistic şi la ce scop servesc diferitele părţi ale acestuia? S-a construit ochiul fără îndemînare în optică şi urechea fără cunoaşterea acusticii?...» La întrebări de acest gen răspunde: «Şi fiindcă toate acestea sînt atît de bine aranjate, din fenomenele naturii nu devine evident că trebuie să existe o fiinţă imaterială, vie, inteligentă şi pretutindenea de faţă, care în spaţiul infinit, ca şi în *sensorium*-ul său, vede toate lucrurile în interiorul lor cel mai profund şi le înţelege perfect în toată intimitatea lor?».

Cum îşi închipue Newton pe acest Dumnezeu? Răspunsul e cuprins atît în citatul de mai sus din Optică, cît şi în Scolia generală, unde spune în legătură cu universul: «toate acestea fiind construite de o minte asemănătoare vor fi supuse stăpînirii *Unuia*». Va să zică nu dumnezeirea în trei persoane, ci unul singur.

Această concepţie a unui Dumnezeu unic se reoglindeşte şi în lucrarea lui Newton «*An historical account of two notable corruptions of scripture. In a letter to a friend*», unde ia atitudine negativă faţă de dogma trinităţii. Mohr, care a găsit mai multe manuscrise de ale lui Newton, necunoscute înainte ajunge la convingerea că Newton era arian *). Acad. S. I. Vavilov atrage atenţia că «pentru o justă apreciere a opiniilor religioase ale lui Newton, nu trebuie uitată legătura strînsă între curentele politice şi religioase din Anglia acelei epoci. Protestantismul şi arianismul lui Newton au fost una din formele de luptă împotriva catolicismului Stuarţilor, împotriva partidului «tory». Aceleaşi rădăcini politice pot fi uşor identificate aproape în toate lucrările istorico-teologice ale lui Newton» *(Isaac Newton*, p. 246).

Argumentele de natură religioasă ale lui Newton au avut influenţă asupra contemporanilor şi urmaşilor săi. *Principiile* au devenit nu numai un izvor de idei ştiinţifice, ci o carte consultată şi de teologi. Una din caracteristicile newtonianismului a fost şi combinarea materialismului mecanic cu teismul. Materialismul dialectic a înlăturat atît materialismul metafizic, cît şi ideea «primului impuls» newtonian.

p. 418. *Cauza gravitaţiei.* În partea din urmă a scoliei generale, Newton aminteşte problema delicată a cauzei gravitaţiei, declarînd că «pînă acum nu am putut afla cauza acestor proprietăţi ale gravitaţiei» şi mulţumindu-se să constate că «e deajuns ca gravitaţia să existe în realitate». El se pune prin urmare pe punctul de vedere pozitiv al existenţei gravitaţiei, renunţînd să caute cauza adevărată. A luat această atitudine rezervată pentru a evita discuţiile şi certurile cu «acea femeie arţăgoasă care e filozofia», dar aceasta nu înseamnă că el nu a încercat diferite ipoteze asupra gravităţii.

O astfel de ipoteză i-a comunicat lui Boyle într-o scrisoare din 1678 sau 1679 în care spune: «Voi face o conjectură mai mult ... ea priveşte cauza gravităţii. În acest scop voi presupune că eterul constă din părţi ce diferă una de cealaltă prin subtilitate şi prin grade infinite; că în porii corpurilor se găseşte mai puţin eter mai grosolan în raport cu cel mai fin decît în spaţiile libere şi că din partea de sus a atmosferei către suprafaţa Pămîntului şi iarăşi de la suprafaţa Pămîntului spre centrul acestuia aerul este din ce în ce mai fin. Să ne. imaginăm acum un corp oarecare susţinut în aer sau zăcînd pe Pămînt: şi eterul fiind prin ipoteză mai grosolan în porii care sînt în părţile de sus ale corpului decît în aceia care se află în părţile de jos, şi că eterul mai grosolan fiind mai puţin potrivit să se plaseze în aceşti pori, decît eterul mai fin de jos, el va încerca să iese şi să cedeze locul eterului mai fin de jos, ceea ce nu se poate întîmpla fără ca corpurile coborînd să facă loc în sus ca el să poată ieşi» *(Isaaci Newtoni Opera quae extant omnia.* Londini, 1779—85, vol. IV, pp. 385—394).

---

*) Arie (sec. IV) din Libia a fost preot în Alexandria, unde a întemeiat o sectă care nega dumnezeirea lui Hristos. Arianismul susţine deci că Hristos nu e de aceeaşi natură cu Tatăl. Arianismul a fost condamnat şi declarat eretic de conciliul ecumenic de la Niceea din anul 325.

La sfîrşitul aceleiaşi scrisori către Boyle însă Newton scrie: «În ce mă priveşte însă mă simt atît de puţin atras spre astfel de lucruri (ipoteze) încît fără încurajarea dv. în nici un caz nu aş fi luat pana în mînă».

În Întrebarea 21 din *Optica* sa, Newton de asemenea menţionează că eterul ar putea fi o cauză a gravitaţiei, dar în Întrebarea 31 din aceeaşi carte vorbind de atracţia particulelor între ele se exprimă astfel: « Felul cum are loc această atracţie nici nu vreau să-l cercetez aci».

Pasajul ultim din scolia generală, în care Newton vorbeşte despre « spiritul (eterul) foarte fin » ce pătrunde corpurile compacte, a fost adesea interpretat ca o aluzie la posibilitatea explicării gravitaţiei cu ajutorul eterului. Acad. S. I. Vavilov atrage însă atenţia că « despre gravitaţie, despre eter în spaţiul universal nu e nici un cuvînt în pasajul citat » (l. c. p. 176). El a omis intenţionat să vorbească aici despre gravitaţie şi eterul din spaţiul universal, astfel că ipoteza eterului o foloseşte numai pentru explicarea forţelor ce acţionează între particule la distanţe mici, cum sînt forţele electrice, capilare etc.

În legătură cu problema cauzei gravitaţiei, Engels caracterizează astfel gravitaţia universală a lui Newton: « Ceea ce se poate spune despre ea mai bun este că ea nu explică, ci reprezintă concret starea actuală a mişcării planetelor ».

p. 418. *Hypotheses non fingo.* După ce recunoaşte că nu a putut afla cauza gravitaţiei Newton spune: « şi nu imaginez ipoteze » *(hypotheses non fingo).* Această frază devenită celebră arată atitudinea negativă a lui Newton faţă de ipoteze. La fel se exprimă în Întrebarea 28 din *Optică,* cînd scrie: « problema fundamentală a filozofiei naturale este ca din fenomene să tragă concluzii fără ipoteze şi să deducă cauzele din efectele lor », cum şi în Întrebarea 31. unde scrie: « ipotezele nu trebuie considerate în filozofia experimentală ».

Mai clar arată atitudinea lui Newton faţă de ipoteze următorul pasaj dintr-o replică la unele obiecţiuni ale lui Pardies: « Căci cea mai bună şi mai sigură metodă de filozofare mi se pare a fi, mai întîi să cercetăm cu rîvnă proprietăţile lucrurilor şi să le stabilim prin experienţă, şi apoi să căutăm ipoteze care să le explice. În adevăr, ipotezele trebuie stabilite numai ca să explice proprietăţile lucrurilor şi nu să încerce să le predetermine decît întrucît ele pot fi de folos experienţelor. Dacă cineva face conjuncturi asupra adevărului lucrurilor numai din posibilitatea pură a ipotezelor, nu văd cum poate fi vreun lucru determinat în mod sigur în vreo ştiinţă; fiindcă totdeauna e posibil să imaginăm ipoteze, una după alta, care să fie abundente în noi tribulaţii. De aceea eu consider că ar trebui să ne abţinem de a ne folosi de ipoteze ca de un argument înşelător, şi că forţa opoziţiei lor trebuie înlăturată ca să putem ajunge la o explicaţie mai matură şi mai generală» *(Opera quae extant omnia,* Londini, 1779—85, vol. IV, pp. 314—315).

Scepticismul pe care-l manifestă Newton faţă de ipoteze este o consecinţă a metodei sale inductive. El căuta pe baza materialului experimental ce-l avea la dispoziţie sau pe care-l aduna el însuşi să stabilească principii generale. Dar nu totdeauna i-a reuşit acest lucru. Astfel în optică aceste principii s-au dovedit atît de numeroase încît realizarea opticei sintetice a fost imposibilă. Pentru explicarea fenomenelor luminoase era necesară o ipoteză şi Newton însuşi a imaginat pentru explicarea propagării luminii ipoteza corpusculară, în acelaşi timp în care Huygens făcea ipoteza că lumina e de natură ondulatorie.

Fizica lui Newton, lipsită de ipoteze, bazată numai pe principii se poate numi *fizica principiilor,* în contrast cu fizica lui Descartes, care e *fizica ipotezelor.* O mare parte din fizicienii ce au urmat după Newton, aşa-numiţii *newtonieni,* s-au mulţumit a aplica schema lui Newton cu rigurozitate, a descrie fenomenele fizice în mod matematic, fără a recurge la ipoteze, a considera *Principiile* drept forul suprem, infailibil în problemele de fizică. În acest fel s-a născut fizica newtoniană, fizica clasică, în care principiile mecanice dominau toate ramurile fizicii.

Această supremaţie neconstatată a fizicii principiilor a început a fi subminată la începutul veacului al XIX-lea atît prin ridicarea la suprafaţă a teoriei ondulatorii a luminii, cît şi prin teoria cîmpului electric şi magnetic al lui F a r a d a y, arătînd că teoria newtoniană nu este infailibilă. Mai tîrziu studiul proceselor din interiorul atomului a arătat caracterul limitat al fizicii lui N e w t o n, ca şi necesitatea reviziei însăşi a bazelor ei. E i n s t e i n a supus unei critici profunde noţiunile fundamentale ale fizicii clasice, a spaţiului, timpului, masei etc. Dar nici teoria relativităţii, nici mecanica cuantică sau cea ondulatorie nu a înlăturat fizica lui N e w t o n. Noua fizică nu contrazice fizica lui N e w t o n, ci numai o completează. Pentru fenomenele macroscopice, fenomenele obişnuite din natură, cu care ne întîlnim la fiecare pas, fizica lui N e w t o n îşi păstrează întreaga valoare. În acest sens — scrie acad. S. I. V a v i l o v — opera lui N e w t o n este eternă şi nu-şi va pierde niciodată marea ei însemnătate » (op. cit., p. 152).

T. 2609

Dat la cules 10.05.1956. Bun de tipar 27.11.1956. Tiraj 4200. Hîrtie velină 80 g.m.² Format 8/61×86. Coli editoriale 39,4. Coli de tipar 60¹/₂+1 planșe tipo. A. 03876/1955.
Indicele de clasificare pentru biblioteci mari: 521,1; 531
Indicele de clasificare pentru biblioteci mici: 521,531

Tiparul executat sub com nr. 750, la Întreprinderea Poligrafică nr. 4 Calea Șerban-Vodă, nr. 133—135, București, R.P.R.